unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

CONTINUUM: MATEMÁTICA, FILOSOFIA E COMPUTAÇÃO

BRUNO HENRIQUE LABRIOLA MISSE

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

Dezembro 2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro

BRUNO HENRIQUE LABRIOLA MISSÉ

CONTINUUM: MATEMÁTICA, FILOSOFIA E COMPUTAÇÃO

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Rio Claro - SP

Dezembro 2019

M678c

Misse, Bruno Henrique Labriola
Continuum : Matemática, Filosofia e Computação / Bruno Henrique Labriola Misse. -- Rio Claro, 2020
100 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo

1. Contínuo. 2. Continuum. 3. Filosofia da Matemática. 4. Ciência da Computação. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Bruno Henrique Labriola Misse

***CONTINUUM*: MATEMÁTICA, FILOSOFIA E COMPUTAÇÃO**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Prof. Dr. Orlando de Andrade Figueiredo

Profa. Dra. Rosemeire de Fátima Batistela

Conceito: Aprovado

Rio Claro, 18 de dezembro de 2019

Para minha esposa, meu

primeiro pensamento. Sempre!

β

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha orientadora, Prof.ª Dr.ª Maria A. V. Bicudo, que contribuiu com a minha formação e com a produção deste trabalho. Um exemplo de pesquisadora e de orientadora a ser seguido.

Aos membros da banca de avaliação, Roberto R. Baldino, Marta C. Gadotti, Orlando A. Figueiredo e Rosemeire F. Batistela, meus sinceros agradecimentos pela leitura atenta e pelas contribuições. Todas as conversas, questionamentos e *e-mails* trocados foram fundamentais para a produção deste trabalho.

Quero agradecer toda minha família pelo apoio e compreensão que tiveram comigo. Alguns estiveram mais próximos, e me ajudaram durante as discussões de ideias, outros que estavam mais distantes demonstravam preocupação com o andamento da Tese, mas todos estavam lá para me ajudar.

Não há palavras para agradecer a minha esposa, Bruna Lammoglia, que esteve presente em todos os momentos, desde a primeira folha do projeto até a correção do último ponto final. Ela sempre me deu o apoio necessário, e a motivação para não desistir. Ela me aguentou filosofando em ideias novas, trabalhando, escrevendo e chorando nas crises. Não foi um caminho fácil, mas não há lugar que eu não consiga chegar ao seu lado.

Devo meu agradecimento a pessoas sem as quais eu não conseguiria ter chegado até aqui. Aos meus companheiros de Orientação, Rose, José Milton, João e Carla, com os quais tive a honra de aprender e discutir sobre a pesquisa. Aos amigos Danilo e Diego, que me levaram a discussões nunca imaginadas, e que me apoiaram durante o doutorado. Em especial, gostaria de agradecer a Rose, uma amiga, que cedeu sua casa quando precisei, e que me mostrou novos caminhos para pensar sobre os problemas da vida. E quero agradecer as pessoas que fizeram uma leitura atenta da Tese, apontando erros e sugerindo alterações: Bruna, Talita e Maria Clara.

Quero agradecer às escolas que eu trabalhei durante esses anos de doutorado. A Escola Estadual Professor Paula Santos, o Colégio Prudente de Moraes e ao Instituto Federal Catarinense pelo apoio e a compreensão dos compromissos que a pós-graduação exige. Também, quero agradecer a todos os meus alunos pela compreensão nas minhas ausências e por me darem coragem e energia para continuar com a pesquisa.

E por fim, minha gratidão a tudo que eu consegui conquistar durante o meu processo de doutoramento, a todas as experiências que tive e a todos que passaram em minha vida, deixando uma marca.

Importante não é ver o que ninguém nunca viu, mas sim, pensar o que ninguém nunca pensou sobre algo que todo mundo vê.

Arthur Schopenhauer

Resumo

A *continuidade* é um tema que sempre trouxe desafios aos filósofos e matemáticos, desde a Grécia antiga com os paradoxos sobre o *movimento*, que persistem até os dias atuais, quando nos encontramos discutindo a continuidade da consciência e do tempo. Com o advento da tecnologia digital uma perspectiva se abre nessa discussão, pois modelos matemáticos contínuos estão sendo aplicados a problemas numéricos computacionais, que são caracteristicamente discretos. Essa possível discretização do contínuo mostra-se de modo claro, levando-nos a investigar a presença do contínuo ao se produzir Matemática junto ao computador. Investigaremos esse assunto realizando um movimento característico do pensar filosófico, tomando o tema como uma *lectio*, entendida como momento de discussão sobre textos numa dimensão argumentativa filosófica sobre nossa interrogação de pesquisa, ou seja, nossa *quaestio*. Nossa compreensão dos textos é exposta de maneira articulada e dividida em três seções, que versam sobre os estudos realizados no âmbito das Ciências Matemática, Filosofia e Computação. Finalizaremos trazendo uma meta-compreensão dos estudos realizados, tomando como centro articulador da reflexão a interrogação formulada. Nosso objetivo com esse exercício filosófico é compreender o fenômeno “contínuo-discreto” na região de inquérito das Ciências Ocidentais e sua presença na computação.

Palavras-chave: Contínuo. Continuum. Filosofia da Matemática. Ciência da Computação.

Abstract

Continuity has been a challenging topic to philosophers and mathematicians, since the ancient Greece, with paradoxes of movement, until present days when continuity of consciousness and of time are discussed. With the advent of digital technology another perspective has brought into the discussion, because continuous mathematical models are being applied in numerical computational problems, which are characteristically discrete. This possibility of continuos' discretization is drawing our attention. Therefore, this research aims to understand the presentification of continuous when we are producing Mathematics with computers. We will investigate this subject via a philosophical approach. This thesis is constituted as a *lectio*, understood as a moment of discussion about texts in a philosophical argumentative dimension about our research question, that is, our *quaestio*. Our understanding of the texts is articulated and divided into three sections, which deal with the studies carried out in Mathematics, Philosophy and Computer Science. Our goal with this philosophical exercise is to explore the "continuous-discrete" phenomenon under Western Sciences influence and its presence in computation.

Key words: Continuous. Continuum. Philosophy of Mathematics. Computer Science.

Sumário

CAPÍTULO I – Introdução: A inquietação e o exercício filosófico

A pesquisa desenvolvida no presente trabalho é tecida diante de uma perplexidade que nos assola enquanto estudiosos da Matemática. Quando pensamos no conhecimento matemático produzido e difundido no mundo ocidental, tanto para estudantes, quanto para professores e pesquisadores de diferentes áreas, deparamo-nos com certos temas marcados por questões complexas que, muitas vezes se abrem em labirintos, pelos quais nosso raciocínio se movimenta procurando uma possível saída. Entendemos que a tecnologia computacional pode elevar a complexidade de alguns crivos do pensamento, uma vez que a transcendência ou as indicações de atualização computacional para certos problemas não é clara.

A Matemática foi desenvolvida de modo a abarcar conceitos abstratos os quais solicitam a generalização para que sejam compreendidos. Porém, uma máquina computacional não pode processar determinados recursos como um humano o faz. Sua estrutura, tal como apresentaremos no corpo desta tese, é capaz de operacionalizar cálculos de maneira mais rápida e é isenta do cansaço humano. Contudo, sua não capacidade de processar noções abstratas e sua capacidade finita de armazenamento podem ser limitações que ainda precisam ser superadas. Podemos destacar três temas estudados pela Matemática Ocidental que tencionam a relação com a Matemática Computacional: *Infinito, Álgebra* e *Continuidade.*

Os estranhamentos que vislumbramos sobre esses temas se mostram no movimento de nos afastarmos das concepções canônicas, assumindo uma postura interrogativa frente à estrutura de Ciência subjacente à Matemática. Nessa perspectiva, os questionamentos que são levantados não são problemas *de* Matemática, mas sim problemas *sobre* a Matemática. Concordamos com Silva (2007) que questões desse tipo “extrapolam os domínios da Matemática, elas não podem ser objetos de teorias Matemáticas. São questões de metodologia, ontologia, epistemologia, ou seja, questões *filosóficas* que só podem ser objetos de reflexão filosófica” (SILVA, 2007, p. 15. Grifo do autor). Nesse sentido, entendemos que nossos questionamentos repousam sobre a Filosofia da Matemática.

Articular uma discussão filosófica sobre assuntos da Matemática requer tanto o conhecimento sobre as estruturas e as teorias que foram cultural e socialmente estabelecidas no âmbito dessa Ciência, quanto o afastamento daquilo que nos é dado de imediato, buscando os sentidos e significados transcendentes. Portanto a reflexão do pesquisador, que se põe intencionalmente a olhar àquilo que já foi feito e pensar sobre as articulações possíveis deve ser apresentada com rigor e, por meio de um exercício filosófico, permitir novas compreensões sobre os estranhamentos que apresentaremos.

Como ponto de partida para nossa pesquisa, olhamos para os fundamentos da Matemática e avançaremos pelos caminhos que foram sendo fundamentados e por fim buscar compreender a relação entre a Matemática Ocidental e a Matemática Computacional, tendo como propulsor nosso estranhamento aos temas apresentados.

Em nossas leituras encontramos diversos autores, como Russell (1966), Husserl (1994), Araújo (1998), Weyl (1994), Silva (2007) que buscam fundamentar a gênese da Matemática na ideia de número. Embora haja diferenças entre esses autores, uma convergência aponta para duas ideias centrais: o início do estudo da Matemática se dá com os Números Naturais e há a necessidade da existência de um sucessor. Dessas duas ideias decorre a construção da Aritmética e suas operações, que dão base para o desenvolvimento da Ciência Matemática como está constituída no Ocidente. Contudo, um horizonte se abre quando pensamos no todo dos números.

Ao representarmos os números como uma coleção disposta em certa ordem de forma que o primeiro número fosse *o um* e cada número seguinte fosse o sucessor do anterior, então poderíamos formular a questão: qual seria o último número? Hoje, parece-nos simples responder: *Não existe o último número! O infinito é incontável*. Porém, o infinito já esteve no centro de muitas discussões matemáticas e filosóficas.

Desde a Grécia antiga o infinito tem sido visto como um dilema e já teve várias interpretações. Na perspectiva de Arquimedes (287 – 212 a.C), por exemplo, o infinito é compreendido como os grãos de areia do universo, ou seja, o infinito é um número natural que representa aquilo que ainda não foi contado. Uma interpretação mais recente, atribuída a Cantor (1845 – 1918), é a existência de múltiplos infinitos, de dimensões e densidades distintas. De um modo geral, sempre que buscamos compreender a natureza do infinito nos deparamos com labirintos que, entre outros caminhos, nos conduzem pela noção de continuidade.

O contínuo e o infinito já foram alvos de diferentes posicionamentos e perspectivas. Sua história nos remete aos geômetras gregos, mas também, traz consigo os trabalhos dos puros algebristas do século XXI. Nossas leituras mostram que além dos desafios já enfrentados, o labirinto que estamos percorrendo ganha maior complexidade e caminhos menos claros quando consideramos o contínuo em nosso cotidiano com os computadores e suas possibilidades matemáticas. Entretanto, antes de falarmos dos desdobramentos computacionais, precisamos entender como o conceito de continuidade vem sendo discutido entre as Ciências.

Olhando para o passado recente vemos o século XX marcado pela preocupação com o rigor matemático. Historicamente, muitas questões referentes à estrutura da Matemática são postas nesse período, e é possível ver um movimento da comunidade matemática para solucioná-las. Dentre essas questões elencamos duas como mais emblemáticas no âmbito da História da Matemática: A primeira é o paradoxo de Bertrand Russell (1872 – 1970) que em seu livro *The Principles of Mathematics* (RUSSELL, 1903) dedica um apêndice a mostrar paradoxos sobre a *Teoria dos Conjuntos*; e a segunda é o projeto de David Hilbert (1862 - 1943) que propõe discussões sobre estruturas matemáticas elementares, acreditando ser possível "estabelecer uma linguagem formal, com demonstrações verificáveis passo-a-passo e livrá-la [a Matemática] de contradições" (MONDINI, 2010, p. 6, inserção nossa).

A teoria dos Conjuntos de Cantor e o projeto de Hilbert, incluindo suas críticas apresentadas por Russell e Gödel, respectivamente, e os debates que foram levantados ao longo da História tiveram uma influência capital no desenvolvimento da Matemática, tal como conhecemos hoje em dia. Contudo, tanto o infinito quanto o *continuum*[1] matemático, ainda são questões que engendram discussões e causam-nos estranhamentos. Conforme aponta Silva (2007) a natureza do infinito é contra intuitiva. Concordamos com esse autor, pois compreendemos que nós estamos mais familiarizados com os modelos discretos e com as coleções limitadas.

As produções do conhecimento matemático sobre esses entes estão situadas em cenários muito distintos. De um lado temos o infinito como um assunto atraente, com um número grande de pesquisas realizadas sobre sua estrutura, aplicações, potencialidades e limitações, por outro temos as pesquisas sobre o contínuo que, no âmbito da Matemática, estão diretamente relacionadas às discussões feitas sobre a continuidade de funções e algumas afirmações gerais sobre o que é o *continuum*. Entretanto, não são muitos pesquisadores que se dedicam a estudar uma ideia intuitiva como a continuidade.

Podemos dizer que o contínuo é uma ideia intuitiva, uma vez que estamos familiarizados com objetos associados à continuidade como linhas sobre um papel, fios, cordas, estradas, e também porque vivenciamos experiências de movimento e tempo, em uma

[1] Em nossa pesquisa o termo *continuum* será usado para se referir ao conceito matemático de contínuo. No segundo capítulo sobre os elementos constituintes do *continuum* apresentaremos os critérios de diferenciação empregados.

perspectiva de não interrupção. Porém, não podemos esquecer que a noção de contínuo também ocupa um lugar de destaque na formalização da Matemática, principalmente no que concerne à Análise Matemática e aos Números Reais. Sendo assim, solicita atenção especial nas pesquisas que envolvem essa Ciência.

Ao trazer ideias intuitivas, como a continuidade, para as pesquisas, corre-se o risco de se assumir compreensões não tematizadas, que são válidas em um senso comum, sem compreender sua complexidade. Buscando evitar esse tipo de risco, nesta tese, apresentaremos um exercício filosófico que nos permita tematizar a continuidade, e desvelar seus significados estabelecidos na Ciência Matemática. Embora esse seja nosso objetivo geral, no movimento de delinear nosso labirinto ainda nos assola outra preocupação: os desdobramentos da inserção de computadores na resolução de problemas que envolvem a continuidade.

O computador em sua estrutura é uma máquina que opera segundo a *lógica booleana* e compreende apenas uma linguagem simples composta por dois constructos. Estes, em geral, são representados pelos signos 0 e 1, que indicam a ideia de circuito aberto e circuito fechado, ou verdadeiro e falso, por exemplo. Desse modo, entendemos que para efetuar operações computacionalmente é necessária uma espécie de *tradução* para essa linguagem mais simples. As possibilidades e limitações desse processo de *tradução* são objetos de estudo da *Computabilidade.*

Embora seja uma área de pesquisa recente, um de seus objetos de estudo é a possibilidade de se trabalhar com *Números Reais*. Quando eles são tematizados na região de inquérito da Computabilidade nos deparamos com o *continuum* matemático, pois essa é uma caraterística própria desse conjunto de número e, também, é uma das dimensões que se mostram como problemáticas frente ao processamento computacional.

A presente pesquisa busca, então, compreender o sentido de continuidade, ao se estar junto à Filosofia da Matemática, à Matemática e à Ciência da Computação. Para tanto, além da compreensão de sua historicidade e sua definição matemática buscamos pelos desdobramentos que ocorrem quando compreendemos a ideia *original*[2] do *continuum*. Nossa intenção é compreender o que essa ideia nos diz em termos matemáticos e, também, na dimensão da Filosofia da Matemática, mantendo o foco sobre o ambiente computacional.

[2] Estamos adotando o sentido husserliano para o termo origem que pode ser entendido pelo exposto em Bicudo (2016). Segundo essa autora a origem que busca Husserl deve ser “entendida de modo não histórico factual, mas como fundada na intuição original de uma subjetividade, que se dá na vivência de um *agora*... [...]” (BICUDO, 2016, p. 22).

Entendemos como Bicudo (2011) que podemos desenvolver uma pesquisa buscando dar conta da nossa inquietação, ou seja, tornarmo-nos conscientes sobre aquilo que nos causa estranhamento. Para tanto, movemo-nos para “[...] perquirir sobre o que nos chama a atenção e que nos causa desconforto e perplexidade, de modo atento e rigoroso” (BICUDO, 2011, p. 21).

De modo direto: o que nos inquieta e que nos faz pesquisar é o modo pelo qual tratamos a continuidade ao se estar junto ao computador. Entendemos que é importante compreender esse fenômeno em termos dos sentidos e significados[3] que se mostram àqueles que estão junto ao computador, aprendendo e/ou produzindo Matemática e, também, em termos de seus significados que são trabalhos no conhecimento produzido e tornado público nas áreas de Matemática e de Computação.

A compreensão sobre o *continuum* matemático perpassa o desenvolvimento e a compreensão dos Números Reais e de sua estrutura. Essa relação que, em termos matemáticos contribui para a estruturação da Ciência, é colocada à prova quando introduzimos a variável computacional na equação. Considerando que no período histórico da *Aritmetização da Análise* e da produção do conhecimento formalizado sobre o *continuum* as possibilidades da computação ainda não eram conhecidas, seria impossível que as características virtuais e as limitações do processamento computacional fossem contempladas nesse movimento. Assim, os desdobramentos que podem ser produzidos na inserção da tecnologia computacional nos fundamentos da Matemática precisam ser tematizados com rigor.

Autores que escrevem sobre a Computabilidade nos alertam sobre isso. Scuri (2002), por exemplo, afirma que o computador não é capaz de trabalhar com os Números Reais, na dimensão em que a Matemática os concebe e, de modo mais direto, Nyimi (2011) argumenta que a descontinuidade nas representações computacionais é um obstáculo que não pode ser ultrapassado.

Mesmo com as limitações apontadas acima, a Ciência da Computação está avançando, ao passo que as pesquisas desenvolvidas estão se aproximando das experiências vivenciadas no mundo-vida[4], as quais, em nosso entendimento, solicitam o conceito de continuidade. Por

---

[3] O que a continuidade diz para mim que sobre ela estou pesquisando.

[4] Life -world is a reality constructed in the historical and cultural moment that brings together the present, the past, and the future. It is not a vessel in which we are placed or in which we drop knowledge, theories, etc., as if these were objects in their own empiricism. Rather, these are the spatiality and the temporality in whose dimensions we live with others, whether human or not, whose reality we in turn weave using articulated comprehensions, subjectively and intersubjectively, that are materialized in available forms and contents. What is intersubjectively understood and is kept via the repetition of successful actions forms itself, gradually, through

ser uma máquina lógica, o computador faz uso do *continuum* matemático quando questões contínuas são desenvolvidas nas pesquisas. Desse modo, entendemos que a continuidade é trabalhada computacionalmente, mesmo em se tratando de uma máquina discreta e limitada.

Portanto, o enfrentamento dessa questão por quem produz Ciência, estando junto ao computador ocorre. Esse tema põe-nos perplexos. Temos nos indagado se o *continuum* é passível de ser trabalhado computacionalmente e, se o for, como. Nessa direção, buscamos compreender como a continuidade se faz presente em problemas computacionais e se o obstáculo enunciado pode ser superado por processos de discretização sem prejuízo à lógica matemática. Ou seja, como ela é operacionalizada nesse sistema e como os resultados obtidos são considerados.

Buscar compreensões, no bojo da lógica da investigação, solicita procedimentos que não se pautam em hipóteses e comprovações respectivas, como se dá com pesquisas realizadas em Ciências da Natureza, ou demonstrações, como ocorre nas Ciências Exatas. Solicita a busca pelo sentido, assumindo como Piettre, em Verité et Sens (2005), a verdade como Sentido.

Para esse autor, a filosofia heideggeriana traz dois sentidos para o termo verdade[5], um sentido originário (verdade ontológica) e um sentido derivado (verdade ôntica).

---

the intertwining of senses and meanings in objectualities. Objectualities are objectivities built on the shift of subjectivity-intersubjectivity and, therefore, do not concern objectivity separately from this shift (Bicudo, 2018, p. 255).

O mundo da vida é uma realidade construída no momento histórico e cultural que reúne o presente, o passado e o futuro. Não é um recipiente em que estamos colocados ou colocamos conhecimentos, teorias etc., como se fossem objetos em seu próprio empirismo. Antes, são a espacialidade e a temporalidade em cujas dimensões vivemos com os outros, humanos ou não, cuja realidade, por sua vez, tecemos usando compreensões articuladas, subjetiva e intersubjetivamente, materializadas nas formas e conteúdos disponíveis. O que é compreendido intersubjetivamente e mantido pela repetição de ações bem-sucedidas forma-se, gradualmente, através do entrelaçamento de sentidos e significados em objetividades. Objetividades são objetividades construídas sobre a mudança de subjetividade-intersubjetividade e, portanto, não dizem respeito à objetividade separadamente dessa mudança (Bicudo, 2018, p. 255). Tradução nossa.

[5] Heidegger rappelle souvent l'étymologie du mot grec *a-lèthèia*, qui veut dire "vérité" : *a-lèthéia* est composé du *a* privatif et de *lèthè* qui signifie oubli, voile. La vérité signifie originairement "dévoilement". Faire surgir la vérité, c'est faire sortir de l'oubli, de l'ombre, découvrir, dégager de ses voiles, dévoiler.(PITERRE, 2005, p. 40).

Heidegger frequentemente se lembra da etimologia da palavra grega a-lethéia, que significa "verdade": a-lethéia é composta do restritivo *a* e *lethé*, que significa esquecimento, véu. Verdade significa originalmente "desvelar". Trazer à verdade é tirar do esquecimento, da sombra, descobrir, libertar-se de seus véus, revelar. (PITERRE, 2005, p. 40. Tradução nossa).

> la vérité (métaphysique, scientifique), comme vérité quant à la nature, quant à la réalité des étants, est appelée « vérité ontique » [...] Or la vérité ontologique n'est autre que cela qui fait sens, donne sens. La manifestation de la chose elle-même n'est pas l'étant manifesté auquel le sujet est alors confronté, mais l'ouverture d'un sens, sur fond duquel se constitue le destin de l'homme (de la connaissance, de la technique, de ses "préoccupations" en général…) (PIETTRE, 2005, p. 44).[6]

Nossa busca por sentidos sobre o *continuum* vai ao encontro do que é proposto na filosofia desse autor. Nosso objetivo é verdade ontológica, a manifestação da *coisa-mesma.* Assim, uma das possibilidades antevistas para realizar o movimento de uma investigação que visa compreensões desse tipo, é proceder filosoficamente. Nessa perspectiva, assumimos uma postura filosófica intencionando investigar esse tema e caminhando em direção a expor nossa compreensão do seu sentido de forma articulada e inteligível.

1.1 Procedimentos de investigação

Em Bicudo (PRELO, p. 2) é dito que a tarefa do filósofo é "interrogar o mundo, pensando e refletindo sobre ele". Esse procedimento deve ser realizado de forma rigorosa. Segundo essa autora, no movimento de interrogar, é importante mantermo-nos atentos àquilo que é proferido, e articular de modo inteligível os sentidos que se evidenciam na reflexão.

Entendemos que o exercício filosófico ao qual nos dedicamos aqui deve ser orientado por disciplina e rigor na leitura e interpretação de textos. É, portanto, necessário delinear um método de procedimento de pesquisa.

Com Folscheid e Wunenburger (1997) entendemos que uma metodologia filosófica não é limitada a um conjunto de técnicas gerais, com as quais conseguiríamos bons resultados filosóficos. Segundo esses autores:

> Pois só é possível adquirir métodos de trabalho em filosofia se antes for compreendido que o método é inerente à própria filosofia. Elaborar uma metodologia, com efeito, já é fazer filosofia, já que isso envolve necessariamente uma concepção filosófica da filosofia (FOLSCHEID; WUNENBURGER, 1997, p. VIII).

[6] A verdade (metafísica, científica), como a verdade quanto à natureza, como à realidade dos seres, é chamada "verdade ôntica" [...] Agora a verdade ontológica não é outra coisa senão aquela que faz sentido, dá sentido. A manifestação da coisa em si não é o ser manifestado ao qual o sujeito é confrontado, mas a abertura de um significado, com base no qual é constituído o destino do homem (do conhecimento, da técnica, suas "preocupações" em geral ...). Tradução nossa.

A concepção do exercício filosófico, que estamos desenvolvendo nesta tese, nos move para uma dinâmica de estudos filosóficos que é apresentada pelo professor Ildeu Coêlho, sobre a estrutura de uma aula nos séculos XII e XIII.

Coêlho (2016) expõe que nesses séculos há um movimento de criação de universidades para a formação dos intelectuais latinos, e nesse momento um trabalho precioso de tradução de textos gregos e árabes foi desenvolvido.

> Nesse ambiente de tradução, de leitura de textos que traziam esclarecimentos importantes que iam ao encontro de muitos questionamentos daqueles intelectuais, o trabalho interpretativo se desenvolve com rigor. Nas universidades recém-criadas, a aula se faz *lectio*, leitura comentada, com base nesse estudo interpretativo. (COÊLHO, 2016, p. 85).

A *lectio* está, então, baseada na compreensão e na interpretação de um texto o qual "[…] passa a ser companheiro do caminho de busca e encontro da sensibilidade, imaginação, do pensamento, do saber e da criação [...]" (COÊLHO, 2016, p. 88). Essa concepção se mostra para nós como orientadora de nosso caminho de busca para compreensão de nossa inquietação de pesquisa. Estamos, assim, nos movendo pelas alamedas da Filosofia.

Concordamos com Folscheid e Wunenburger (1997) ao afirmarem que:

> De fato, a filosofia se impôs através da história como um desvio em relação ao concreto, ao vivido, ao subjetivo, a fim de darem-se os meios e o tempo de estabelecer os pressupostos de nossos pensamentos, de formular questionamentos claros, de desenvolver raciocínios sistemáticos, de explorar diferentes configurações possíveis das ideias, em contato com saberes ampliados e enriquecidos. (FOLSCHEID; WUNENBURGER, 1997, pp. IX-X).

O conceito de *lectio* e o objetivo da Filosofia expostos acima lançam luz ao nosso caminho, não por ser um conjunto de técnicas prontas a serem seguidas, mas porque as concepções, que esse conjunto engloba, fazem sentido para nossa inquietação, permitindo-nos delinear os procedimentos seguidos.

Em Coêlho (2016) encontramos, ainda, uma discussão sobre a *lectio* a qual apresenta os modos como elas eram desenvolvidas nas universidades em construção nos séculos mencionados. Segundo esse autor:

> Da *lectio* surge a *quaestio*, dificuldade, questão controversa que exige exame atento e cuidadoso, a ser ou que foi debatida, discutida, argumentada, enfim, uma verdadeira questão disputada, *quaestio disputāta*, uma *disputatĭo*, forma de ensino muito valorizada na Universidade nascente (Coêlho 2016, p. 89).

Assumindo a postura de *lectio filosófica* nossa investigação busca compreender *o modo como o contínuo se mostra em diferentes espaços de investigação*. Para isso buscamos nos textos das Ciências Ocidentais, Matemática, Filosofia, História e Computação, no que tange a nossa inquietação que, ao ser tematizada, possibilita a formulação de uma interrogação de pesquisa, a nossa *quaestio*.

O desenvolvimento da tese se dá pela argumentação posta sobre os textos à luz de nossa interrogação, de modo que junto aos autores relevantes, e às experiências advindas do curso de doutorado realizado ao estar-com minha orientadora, com o grupo de pesquisa e com os membros do programa, nossa tese será desenvolvida como uma *disputatĭo* sobre o contínuo, o *continuum* e a continuidade.

Nessa linha de raciocínio formulamos a nossa pergunta, *Como o contínuo se presentifica, no trabalho com métodos numéricos, estando-se junto ao computador?* Pomos nossa *quaestio:* o contínuo é trabalhado computacionalmente. Entretanto, essa afirmação nos traz perplexidade e indagamos: é trabalhado computacionalmente? Pode? Como? Com que base conceitual científica e filosófica? Estabelecemos assim nossa *disputāta.*

Bicudo (prelo) nos alerta sobre a necessidade de ter clara nossa *quaestio disputāta*, para que ela não se ponha em segundo plano, e o discurso da academia seja tomado como "autoridade fechada em si, ou quando o professor (ou outra autoridade) assume-se como aquele que interpreta o texto de modo correto, [...], sem que questões sejam levantadas e debatidas" (BICUDO, PRELO).

Queremos compreender, portanto, os modos pelos quais o contínuo se presentifica, ou seja, como ele se faz presente, se mostra ao se estar junto ao computador. E se nesse modo de ele se mostrar, ele se mantém nos moldes pelos quais é concebido matematicamente? Para responder a *quaestio da* pesquisa visualizamos que há dois caminhos a serem trilhados. Um indica o estudo sobre "*o que* é isto, o contínuo?", e o outro "c*omo* ele se presentifica computacionalmente?". O "o que" aponta para se saber do que se trata. O "como" indica uma pergunta sobre os seus modos de se mostrar.

Encaminhamos nossa pesquisa de modo a focar e debater as perguntas formuladas. Para tanto foi realizado um estudo na literatura matemática e filosófica sobre o contínuo, o *continuum* e a continuidade, apresentando maneiras de essas ideias se mostrarem nos discursos de autores dessas áreas. Nos capítulos seguintes exporemos as ideias que nos movem pelo exercício filosófico efetuado.

1.2 Estrutura da tese

Neste primeiro capítulo apresentamos a *introdução* da pesquisa a qual tem o objetivo de evidenciar nossa perplexidade sobre as questões concernentes ao contínuo e a sua representação computacional e expomos os modos pelos quais a investigação caminhará ao longo do desenvolvimento da tese. Para tanto, valemo-nos do exposto sobre exercício filosófico que é apresentado por Folscheid e Wunenburger (1997) e das compreensões tecidas por Bicudo (prelo) sobre a prática filosófica e seus desdobramentos na *lectio*, que foi exposta por Coêlho (2016).

Abordamos no segundo capítulo a constituição do contínuo, buscando compreender seus aspectos sócio-histórico-culturais produzidos e disseminados pela Ciência Ocidental. Visamos elucidar o que entendemos ser constitutivo do ente *contínuo*. Iniciamos nossa *disputatĭo* olhando indagadoramente para os significados postos pela linguagem sobre esse conceito. Isso nos permite, conforme entendemos, diferenciar contínuo, *continuum* e continuidade.

Seguimos buscando compreender como o contínuo vem sendo desenvolvido historicamente e encontramos em Eves (2004), Araújo (1998), Sbardellini (2005), Silva (2007), Piauí (2010) e Ferreira (2013) discussões e esclarecimentos que nos permitiram delinear um panorama histórico que lançou luz à nossa questão sobre *o que é o contínuo*, ou seja, como compreender o contínuo. Vimos desse modo que o ente matemático *continuum* foi se mostrando importante para a formalização da Matemática e, assim, foram produzidos estudos que permitiram estabelecer bases lógicas para ele. Longo (1999) traz uma discussão sobre como o processo de formalização se inicia por conceitos intuitivos e experiências vivenciadas no mundo-vida e que, pelo trabalho de matemáticos, vai se tornando formal. Esse autor assume uma perspectiva de produção e conhecimento baseada na Fenomenologia husserliana, a qual é trazida, nesta tese, pelo trabalho de Bicudo e Afonso da Silva (2018). Weyl (1994) contribui de maneira importante com uma das pesquisas mais relevantes sobre o *continuum*, e suas consequências para a Análise Matemática. Sua argumentação será apresentada no capítulo aqui referido.

Nossa *lectio* nos move para o estudo Matemático realizado sobre o contínuo. Assim, trazemos, no terceiro capítulo, nossas compreensões sobre o *continuum*. Iniciamos apresentando alguns conceitos matemáticos que serão explicados no contexto de suas respectivas teorias, como por exemplo, *conjuntos, infinitos enumeráveis e não enumeráveis, funções* e *limites*, que serão necessários para realizar articulações inteligíveis sobre o processo de formalização tanto da Análise Matemática, quanto dos Números Reais e sobre a importância do *continuum* para as concepções teóricas que são assumidas pela Ciência.

Destacamos que nosso estudo versa sobre a compreensão das teorias matemáticas de forma rigorosa sem apresentar, contudo, o formalismo algébrico tradicional trazido nos livros que abordam esse tema. Entendemos que nossa *disputatĭo* está pautada na compreensão das ideias presentes nas teorias que se valem da continuidade e não no desenvolvimento algébrico que ela solicita. Nossa investigação evidencia ser relevante expor dois processos de construção dos Números Reais, por esses serem mais difundidos e notadamente distintos em concepções de continuidade. Se por um lado temos a concepção defendida por Dedekind, no qual os números são vistos como *cortes*, por outro temos uma perspectiva de número que se vale das *classes de equivalência* e critérios de *convergência de Cauchy,* que não recorre à continuidade geométrica da reta.

No corpo do texto de nossa investigação expomos nossos estudos e a sistematização de desenvolvimento desses processos por meio de uma construção algorítmica. Essa sistematização foi por nós produzida, e ela não traz uma demonstração formal baseada em processos algébricos, conforme encontradas em Landau (1951), Lima (2001) e Fajardo (2017). Definimos, também, a estrutura algébrica de *Corpo ordenado completo* e discutimos o isomorfismo entre as duas teorias apresentadas. A discussão realizada permite tematizar à *casa da Análise Matemática*[7] tal como ela é desenvolvida *por Cauchy*-*Weierstrass,* evidenciando as consequências de uma concepção de continuidade definida por meio de vizinhança.

Os trabalhos de Bento de Jesus Caraça nos indicam problemas nessa teoria e nossa *quaestio* volta a ser *disputāta*, agora com base nos infinitésimos. Percebemos, em um nível de intuição inicial, que os infinitésimos abarcam uma ideia de variável distinta da concepção de número de Cauchy-Weierstrass. Aqui se localiza nossa inquietação: vemos uma possibilidade de articular a concepção de número trabalhada em computação, na qual o número é tomado como uma representação de um ponto flutuante com as ideias subjacentes à teoria dos infinitésimos.

A última dimensão abarcada em nossa *lectio filosófica* é a investigação sobre os desdobramentos computacionais da continuidade, exposta no quarto capítulo. Nesse momento, nossa região de inquérito caminha para a Ciência da Computação, principalmente

[7] O termo *casa* é usado aqui de acordo com o exposto em Weyl (1994), com a intenção de evidenciar que a discussão feita está sobre a estrutura de toda a teoria edificada de um ramo da Matemática.

no que tange à Computabilidade. Nossas compreensões nos mostram que existe uma estreita relação entre *números* e *continuum*. Essa compreensão levanta outra *quaestio*, dada a perplexidade sentida a respeito do conceito de número adotado ao se estar junto ao computador. Entendemos que as compreensões sobre esse tema nos conduzem a refletir de modo rigoroso sobre a relação do *continuum matemático* e sobre o modo pelo qual ele se mostra no trabalho computacional.

O quarto capítulo apresenta a discussão sobre a estrutura dos computadores no que diz respeito ao trabalho numérico. Apresentamos como os números são representados nesse ambiente repleto de virtualidades, e quais as possibilidades que podemos ver na abordagem de Números Reais pelo Computador. Essas possibilidades estão postas na computabilidade, que apresenta duas perspectivas dicotômicas para a presentificação do contínuo.

Com base no movimento delineado acima, consideramos que o exercício filosófico aqui engendrado nos permitiu articular as compreensões sobre nossa *quaestio*. Vemos em Bicudo (Prelo) que ao assumir a postura de filósofos como a do professor Ildeu Coêlho, após efetuarmos o movimento rigoroso de inquerir e investigar sobre nossas perplexidades, devemos expor de modo claro e inteligível a compreensão que o estudo realizado nos trouxe. A explicitação dessa compreensão será apresentada no último capítulo desta tese, dedicado à meta-compreensão sobre nossa investigação, o que ela nos levou a compreender e quais as repercussões antevistas no campo de investigação do tema focado.

CAPÍTULO II – A ideia de contínuo: Perspectivas de constituição

Nesta seção iniciamos uma caminhada para compreender o contínuo. Entendemos que esse ente possui diferentes dimensões e todas são relevantes para a compreensão dessa região de inquérito. É preciso desvelar as nuanças dessas dimensões, tirando-as da zona de ambiguidade de multiplicidade de sentidos e conduzindo-as para uma zona de mais distinção.

O movimento que realizaremos incide, inicialmente, sobre os sentidos e significados que as palavras carregam na linguagem corrente, permitindo estabelecer diferenças entre contínuo, continuidade e *continuum*. Avançamos apresentando um panorama histórico que influenciou a concepção matemática de continuidade. Ainda, buscaremos expor nossa compreensão sobre o *continuum* matemático que se mostra nas experiências vivenciadas que indicam noções intuitivas de continuidade. E, por fim as relações que são possíveis de se estabelecer entre o *continuum* e os números reais e entre o *continuum* e a computação.

2.1 O Sentido da Palavra

Os termos *contínuo* e *continuidade* são usuais em nosso cotidiano, e as experiências que nos permitem ter acesso ao *continuum matemático* são vivenciadas desde a mais tenra idade. Contudo, quando buscamos por palavras para explicá-lo, elas nos somem. Essa sensação de buscar uma explicação para algo tão intuitivo quanto à continuidade das coisas foi muito bem expressa por Santo Agostinho, em suas confissões, quando tematizava o tempo. Ele diz: "*si nemo a me quaerat, scio, si quaerenti explicare velim, nescio*[8]" (AGOSTINHO, 1980). Mas precisamos iniciar nossa jornada, buscando compreender a constituição da continuidade. Iniciemo-la pelo sentido de continuidade na linguagem corrente.

Buscando pelos significados desses termos, em um dicionário comum de língua portuguesa, encontram-se diversas asserções como, por exemplo, ao consultar Houaiss (2007):

Continuidade:

> 1 Qualidade, condição, ou estado de contínuo;
> 2 Persistência das características inerentes a um determinado contexto;
> 3 Aquilo que confere coerência e unidade a uma ação, a uma ideia, a uma narrativa etc.

[8] Se ninguém me perguntar, eu sei. Se eu procurar explicar, não sei.

Contínuo:

1. Não dividido na extensão;
2. Não interrompido dentro de um tempo estipulado;
3. Que se prolonga sem remissões até atingir o seu fim;
4. Que se repete a intervalos breves e regulares; seguido, sucessivo;
5. Que perdura sem interrupção; constante;
6. Que tem continuidade ou coerência, que não apresenta lapso ou falhas.

Essas asserções apontam para uma primeira compreensão sobre o contínuo, de modo que é possível ver que há caminhos distintos a serem trilhados, ora seguindo para uma ideia de não interrupção, ora para uma de divisibilidade infinita, na medida em que é passível de se *repetir em intervalos breves e regulares*.

Compreendemos que a continuidade é uma qualidade. Por isso está sempre associada a um objeto, seja ele físico ou não. Porém o contínuo é um substantivo, logo é algo passível de ser determinado e indicado por suas propriedades. As asserções acima podem ser associadas a objetos que representam o contínuo, mas ainda não são suficientes para compreender o contínuo matemático, ao qual chamaremos de *continuum* para indicar a sua particularidade de ser um objeto matemático.

Em Sbardellini (2005) encontra-se uma discussão sobre duas estruturas que ele afirma terem *importância capital* para a compreensão do conceito de *continuum*, sendo elas: magnitudes que variam continuamente e os infinitésimos, com as quais será estabelecida uma analogia com a não interrupção e a divisibilidade infinita, respectivamente.

O autor elucida momentos históricos desde a antiguidade até o século XIX apresentando algumas discussões que sucederam à formalização do Cálculo Diferencial e Integral no século XIX, cujo desenvolvimento está, segundo ele, intimamente ligado à compreensão do contínuo matemático, uma vez que “a história das pesquisas matemáticas em torno do *continuum* coincide, em grande parte, com a própria história do cálculo diferencial e integral” (SBARDELLINI, 2005, p. 3).

Para compreendermos o sentido do ente *continuum* precisamos compreender como ele vem sendo desenvolvido durante a História da Matemática. Sabe-se que matemáticos de várias épocas se debruçaram sobre esse tema e o trabalho supracitado aponta um caminho para compreender o processo histórico do desenvolvimento desse ente matemático.

No trabalho de Ferreira (2013) há uma reflexão sobre os fundamentos da Matemática e as pesquisas que se abriram nesse campo a partir do século XIX. O *continuum* aparece em seu trabalho como exemplo inicial de uma mudança de perspectiva na ciência Matemática, que influenciou as teorias de vários matemáticos. Segundo esse autor,

> Na viragem do século XIX para o século XX deu-se uma notável confluência de ideias que desencadeou uma transformação da matemática só comparável ao aparecimento da axiomática na Grécia Antiga e à descoberta do cálculo infinitesimal no século XVII. [...] Em 1902, Bertrand Russell descobre o seu célebre paradoxo e espoleta uma crise nos fundamentos da matemática (FERREIRA, 2013, p. 2).

Um paradoxo apresentado sobre a teoria dominante da Matemática da época desencadeou um incômodo na comunidade científica, e uma confluência de ideias emergiu nos primeiros anos do século XX. Houve uma busca pelos fundamentos da Matemática e um modo de eximir a Matemática do paradoxo de Russell. No que concerne à questão do *continuum* é incontestável a importância de Hermann Weyl e sua crítica aos princípios da Análise.

Por fim, destacamos que os estudos atuais que se propõem a compreender o contexto histórico do último século mostram que houve uma mudança na compreensão do significado de tempo e espaço, tanto no campo da Física, com a teoria da relatividade de Einstein, como no âmbito da Filosofia, com as ideias da fenomenologia de Husserl, que implicaram diretamente na compreensão sobre o *continuum*.

A seguir trazemos aspectos de um panorama histórico que se mostraram relevantes para a nossa compreensão sobre a continuidade, o contínuo e o *continuum.*

2.2 Contexto Histórico

Historicamente é possível ver que a discussão sobre a continuidade repousa, em um primeiro momento, sobre a necessidade de justificativas para processos que podem ser repetidos indefinidamente, de modo a fazer com que essas repetições se tornem demonstrações de propriedades matemáticas. De modo destacado, está o *método de exaustão*[9] cujo desenvolvimento se atribui a Eudoxo (408 – 355 A.C). Eves (2004) afirma que, possivelmente, esse método tenha sido uma resposta da escola Platônica para os paradoxos de

---

[9] O método de exaustão admite que uma grandeza possa ser subdividida indefinidamente e sua base é a proposição: Se de uma grandeza qualquer se subtrai uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie. (EVES, 2004, p. 419)

Zenão (c. 450 a.C.), que apresentavam dificuldades lógicas para explicar o movimento, caso fosse aceito o processo de divisões sucessivas de uma distância *ad infinitum*.

Segundo Araújo (1998) Zenão é o homem que irá se colocar à frente da disputa entre os *eleásticos* e os *pitagóricos* A tese de Zenão consiste em classificar o movimento como inexistente se a tese pitagórica das divisões sucessivas for aceita.

> Diz Zenão: "como querem que a recta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa afirmação fundamental de que todas as coisas têm um número. Com efeito, entre dois corpúsculos, 1 e 2, deve haver um espaço - se estivessem unidos, em que se distinguiam um do outro? - e esse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores concebíveis; logo, entre os dois posso intercalar um corpúsculo, 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3, e outro entre 3 e 2, nas mesmas condições. Posso repetir o raciocínio indefinidamente e fico, portanto, com a possibilidade de meter entre 1 e 2 quantos corpúsculos quiser. Qual é então o número que pertence ao segmento que vai de 1 a 2?" (ARAUJO, 1998, p. 39).

A afirmação de Zenão é aplicada em situações reais dando origem aos Paradoxos de Zenão:

> Nós, eleatas, *não o compreendemos, não conseguimos pô-lo de acordo com o resto da explicação racional*, mas vós, pitagóricos, julgais compreender e nadais apenas em contradições. Uma de duas: num segmento de recta ou há um número finito de mónadas ou uma infinidade. Vejamos o primeiro caso; considerai uma flecha em movimento percorrendo esse segmento de recta; em cada instante, a ponta da flecha ocupa um lugar, a localização duma mónada. O que se passa entre um lugar e o seguinte? Nada! Porque, não havendo nada entre duas mónadas consecutivas não podeis dizer-me alguma coisa sobre um movimento que se realize onde nada existe; conclusão: - o movimento da flecha é uma sucessão de imobilidades! Percebeis?
>
> Consideremos agora o segundo caso: há uma infinidade de mónadas; então o movimento é igualmente inconcebível. Suponhamos que dois móveis - Aquiles e Tartaruga - partem ao mesmo tempo, um (Aquiles) de uma posição e o outro (Tartaruga) com um avanço de 100 unidades. Suponhamos que a velocidade de Aquiles é dez vezes superior à da Tartaruga. Assim, quando Aquiles percorre 100 unidades, a Tartaruga percorre 10, após Aquiles ter andado 10 unidades, a Tartaruga andou uma, etc., estando sempre a Tartaruga adiante de Aquiles e este se aproximando sem nunca a alcançar. Como se percebe então que Aquiles possa alcançar a Tartaruga?(ARAUJO, 1998, p. 39).

Em Sbardellini (2005) também é possível ver que, contemporaneamente ao método de exaustão, outros filósofos e matemáticos abordavam as problemáticas de variações contínuas e da existência de um elemento fundamental, formulando a doutrina *atomística*, cujo maior representante é Demócrito (460 – 370 a.C), cujos trabalhos estão relacionados ao cálculo de volumes de pirâmides e, destacadamente, sobre a igualdade das infinitas seções circulares paralelas de um cone.

Segundo a filosofia atomista, se essas seções fossem iguais, então o sólido que elas formariam seria um cilindro e não um cone. Contudo, se fossem diferentes, então seria formado um sólido com degraus. “Outros problemas matemáticos de natureza infinitesimal são imputados a Demócrito, o que o credencia, historicamente, como o primeiro a perseguir essa noção” (Sbardellini, 2005, p. 17).

Tanto o método de Eudoxo, quanto os problemas de Demócrito foram rediscutidos na Idade Moderna, período que remonta ao século XVII. Matemáticos como Cavalieri[10], Kepler[11] e Leibniz[12] se debruçaram sobre esse tema. Segundo Silva (2007) além de outras mudanças que marcam uma revolução na Matemática nesse período, destaca-se a “inusitada disposição dos matemáticos para se envolverem com o infinito sob diversas formas” (SILVA, 2007, p. 77).

O trabalho com métodos infinitários realizado por diversos cientistas da época e o trabalho posterior do Cálculo Infinitesimal, realizado por Leibniz e Newton[13], abre novos questionamentos sobre o contínuo e o infinito. E, do mesmo modo que Zenão apresentou paradoxos sobre os métodos gregos, os matemáticos do século XVII foram criticados pelo caráter vago e pouco rigoroso de seus métodos. Podemos citar como exemplo o texto *O Analista* (BERKELEY, 2010) escrito em 1734 que faz críticas ao *Método das Fluxões*[14] de Newton, colocando à prova os métodos infinitários e revelando, após uma análise severa, “teses inconsistentes, afirmações vagas e flagrantes contradições” (ARAUJO, 1998, p. 42).

---

[10]Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), de origem italiana foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha. Seus trabalhos estão ligados a Matemática, Ótica e Astronomia, sua grande contribuição à Matemática é o tratado *Geometria indivisibilibus*, no qual ele apresenta seu método dos indivisíveis (EVES, 2004, p. 425).

[11] Johann Kepler (1571 – 1630), de origem alemã, foi aluno e sucessor de Tycho Brahe, seus trabalhos estão ligados à astronomia, e principalmente, ao problema do movimento dos planetas em torno do Sol (EVES, 2004, p. 356).

[12]Gottfried W. Leibniz (1646 – 1716), de origem alemã, foi um matemático que atuou em diversas áreas e divide o título de fundador do Cálculo Diferencial e Integral com Newton (EVES, 2004, p. 442).

[13]Sir Isaac Newton (1642 – 1727), de origem inglesa, foi um cientista renomado em diversas áreas e divide o título de fundador do Cálculo Diferencial e Integral com Leibniz (EVES, 2004, p. 437).

[14] Segundo Barra (2006, p. 356) Newton define “fluxões como as velocidades dos movimentos ou dos aumentos pelos quais as quantidades são geradas e ‘fluentes’ como as próprias quantidades geradas”. Podemos compreender que o método das fluxões é o que hoje chamamos de derivada.

O *Método das Fluxões* que se tornaria hoje o nosso Cálculo Diferencial, só conseguiu ter uma fundamentação rigorosa, conforme nos indica SILVA (2007), no século XIX, com Weierstrass[15], Dedekind[16] e Cantor[17]. Ainda no século das revoluções, o XVII, a aplicação da álgebra no tratamento de alguns problemas da geometria e a disposição para a discussão sobre o infinito levaram Torricelli[18] a visualizar um sólido ilimitado, portanto, infinito, que tem volume finito (HERRERA, 2012) [19]. Sua descoberta abalou a estrutura aparentemente sólida do simbolismo que regia a Matemática nesse século.

Silva (2007) aponta que a descoberta de Torricelli não abalou apenas a Matemática, mas também a Filosofia, pois, se a geometria fosse vista por um viés empirista, ou seja, como uma teoria do espaço real, como seria possível conceber um sólido infinito real? Ou ainda, surgiram dúvidas epistemológicas, uma vez que a natureza contra a intuição sensível de tal sólido levanta indagações quanto à veracidade de afirmações matemáticas. Ao analisar as implicações da descoberta de Torricelli, Silva (2007, p. 84) também afirma que: “o que é contraditório para as grandezas finitas pode ser da própria essência das grandezas infinitas; o que repugna a nossa intuição finita pode ser a verdade do infinito”.

A natureza contra intuitiva do infinito perturbou o pensamento de vários matemáticos ao longo da história, de modo que muitas outras questões concernentes ao infinito são levantadas nos primeiros anos do século XVII, mas só serão respondidas mais tarde, depois de uma revolução na Filosofia da Matemática que teve início com Kant[20] e Leibniz.

---

[15] Karl T. W. Weierstrass (1815 – 1897), de origem alemã, trabalhou muitos anos como professor antes de se dedicar a pesquisa em matemática avançada, “tornando-se provavelmente o maior professor de matemática avançada que o mundo já teve” (EVES, 2004, p. 611).

[16] Julius W. R. Dedekind (1831 – 1916), de origem alemã, atuou na Universidade Göttingen, seus trabalhos estão associados à fundamentação dos Números Reais pelo método dos cortes, que em sua homenagem, recebem o nome de cortes de Dedekind (EVES, 2004, p. 608).

[17] George F. L. P. Cantor (1845 – 1916), de origem russa, desenvolveu pesquisas na área de filosofia, física e matemática. Mostrou profundo interesse pela teologia medieval e seus argumentos intrincados sobre o contínuo e o infinito (EVES, 2004, p. 615).

[18] Evangelista Torricelli (1608 – 1647), de origem italiana, foi aluno de Galileu e seu trabalho está relacionado à Física, à teoria de projéteis e ao movimento dos fluídos. Em Matemática, sua contribuição foi o uso de infinitesimais na geometria (EVES, 2004, p. 396).

[19] Nesse trabalho podemos encontrar a demonstração feita por Torricelli sobre a finitude do volume do sólido, a autora do artigo busca elucidar os estilos de demonstrações matemáticas do século XVII e toma o trabalho desenvolvido por Torricelli como exemplo.

[20]Emmanuel Kant (1724 – 1804) filósofo alemão fundador do Idealismo Transcendental está associado à Filosofia Foral.

No âmbito da Filosofia da Matemática, Leibniz aparece como representante do espírito lógico-analítico, abrindo espaço para uma nova perspectiva da Matemática, regida pelo rigor lógico e pelos métodos infinitários. Essa corrente de pensamento é trabalhada posteriormente por Weierstrass e Hilbert[21] e, tomando suas concepções de número e estrutura da Matemática, são discutidos os fundamentos da aritmética e o conceito de verdade (SILVA, 2007).

Contudo, vale destacar que Leibniz assume uma postura de transição, pois ao mesmo tempo em que recorre a constructos lógicos para a formulação de sua teoria da Matemática, ainda conserva pressupostos platônicos como, por exemplo, o conceito de *Verdade Matemática*, que, segundo Silva (2007), está relacionado a pressupostos platônicos de que elas existem *a priori* na "mente de Deus, que as conhece todas com a máxima distinção" (SILVA, 2007, p. 92) e cabe aos sentidos o processo do despertar dessas verdades.

Segundo Piauí (2010), o contínuo é tratado na filosofia leibniziana como sendo um dos labirintos da razão.

> Existem dois famosos labirintos onde nossa razão se perde muitas vezes; um diz respeito à grande questão do livre e do necessário, sobretudo quanto à produção e quanto à origem do mal; o outro consiste na discussão da *continuidade* (*continuité*) [ou do *continuum*] e dos *indivisíveis* que constituem seus elementos, e no qual deve entrar a consideração do *infinito*. O primeiro embaraça praticamente todo o gênero humano, o outro influencia somente os filósofos. (LEIBNIZ, 1969, p. 29 apud PIAUÍ, 2010, p. 17, inserção do autor).

Durante sua exposição o autor afirma, repetidas vezes, que a discussão sobre o contínuo realizada por Leibniz é bastante densa e exige leitura de diversos textos e cartas, uma vez que ele dedica grande parte de sua pesquisa a questionamentos sobre as substâncias e matérias que considera como descontínuas, e critica a filosofia Cartesiana de *Tempo e Espaço Absolutos*, assuntos que permeiam a discussão do contínuo em Matemática.

Com base na leitura de Piauí (2010), entende-se que Leibniz considera a ideia de contínuo como uma questão que deve ser cuidadosamente estudada, e que pode levar a ambiguidades lógicas, uma vez que, seguindo o exposto pelos autores acima, nossa intuição finita estranha as possibilidades de ser do infinito.

[21] David Hilbert (1862 – 1943), de origem alemã, é um dos maiores matemáticos de todos os tempos, seus trabalhos visam à fundamentação da Matemática, trabalhando com teoria dos números algébricos, fundamentos de geometria, cálculo de variações, entre outros (EVES, 2004, p. 684).

As duas faces do labirinto do contínuo de Leibniz indicam que há duas estruturas: uma diz da composição do contínuo e a outra sobre sua completude. Segundo Piauí (2010) com relação à composição do contínuo, Leibniz recorre ao conceito de Mônada[22], como sendo a partícula última e constituinte do todo. E, quanto à completude, Piauí apresenta uma discussão de Leibniz sobre o tempo, o espaço e o corpo, cujo propósito é contrapor esses conceitos com os defendidos por Descartes e Newton, argumentando que há uma incompreensão nas teorias desses autores.

A filosofia leibniziana subsidiará estudos posteriores sobre o contínuo e o infinito em termos do trabalho realizado com os infinitésimos. Contudo, esse assunto não será aqui explicitado por entendermos que uma explicitação mais detalhada sobre o tema foge ao escopo desta tese. Apresentaremos desdobramentos dos trabalhos realizados durante o século das crises dos fundamentos da Matemática, e o posterior ressurgimento dos infinitésimos pelo trabalho de Caraça (1998).

O final do Século XIX é marcado por uma série de contestações quanto à veracidade e aos fundamentos da Matemática. Historicamente esse período é chamado de "A Crise dos Fundamentos", que teve a Teoria dos Conjuntos de Cantor como precursora.

Segundo Silva (2007, p. 13) a teoria de Cantor surge "da necessidade de um tratamento adequado do contínuo aritmético, mas tornou-se logo uma teoria de totalidades infinitas consideradas abstratamente". Cantor, juntamente com Dedekind, ao estudar problemas de sequências infinitas viu que a estrutura dos números reais era pouco conhecida e que para a sua compreensão era necessário uma discussão sobre o contínuo.

A *hipótese do contínuo* de Cantor supõe que a quantidade de números reais é a menor quantidade infinita, maior que a infinidade dos números inteiros positivos. Essa hipótese levanta dúvidas jamais imaginadas em Matemática, uma vez que Cantor, pela primeira vez na História da Matemática, afirma que existem vários infinitos. Os *infinitos transfinitos*, que podiam ser tratados matematicamente e o *infinito absoluto,* sempre maior que qualquer outro infinito. A busca de Cantor é encontrar o número que corresponda à menor quantidade que fosse maior que a infinidade dos números naturais, inteiros e racionais (esses todos possuem a mesma cardinalidade), pois acredita que esse número corresponderia à quantidade do contínuo aritmético.

---

[22]No Leibnizianismo, átomo inextenso com atividade espiritual, componente básico de toda e qualquer realidade física ou anímica, e que apresenta as características de imaterialidade, indivisibilidade e eternidade (HOUAISS, 2007).

Seus esforços e os de outros matemáticos, notadamente Hilbert, em busca desse número ou para a demonstração de sua existência não foram recompensados. Somente no século XX, muitos anos após sua formulação, foi demonstrado que a hipótese do contínuo não pode ser verificada por meios matemáticos.

Silva (2007) apresenta o desfecho da saga da hipótese do contínuo, dizendo que, mesmo com os avanços matemáticos oriundos dos trabalhos de Hilbert e Gödel[23], no que diz respeito à formalização da Matemática por meios axiomáticos, foi só em 1963 que Cohen[24] conseguiu mostrar que mesmo a teoria dos conjuntos "é incapaz de demonstrar a *verdade* da hipótese do contínuo, a menos que essa teoria seja inconsistente, o que seria um desastre ainda maior" (SILVA, 2007, p. 116).

A discussão sobre o contínuo ganha uma nova página com os trabalhos realizados por Weyl em seu livro lançado em 1918, *Das Kontinuum*[25]. Silva (2007, p. 180) comenta sobre essa obra apontando que o autor se dedica a um dos "mais intrigantes problemas matemáticos de todos os tempos, o contínuo precisamente" e afirma ainda que Weyl reconhece que os muitos paradoxos apresentados no decorrer da história são quebra-cabeças gerados pelo contínuo.

Aluno de Hilbert e de Husserl[26], Weyl faz críticas aos fundamentos da Matemática como seus mestres e, em sua obra, segue a linha de pensamento apresentada por Husserl em seminário ministrado em Göttingen nos anos de 1904 e 1905 "sobre a constituição intencional do *fluxo contínuo* do tempo da experiência vivida".

Weyl se vale das ideias apresentadas por Husserl sobre o fluxo do tempo para dizer do *continuum aritmético* dos números reais, dizendo que, do mesmo modo que os instantes temporais não existem na experiência, mas são antes idealizações, os números reais denotam a mesma situação limite para a continuidade aritmética.

---

[23] Kurt Gödel (1906 – 1978), de origem austríaca, dedicou-se ao estudo dos fundamentos da lógica e da Matemática, e seu trabalho mais conhecido é o Teorema da Incompletude.

[24] Paul J. Cohen, nascido em 1934, debruçou-se sobre a hipótese do contínuo provando que ela "é independente dos postulados da teoria dos conjuntos e, portanto, não pode ser deduzida a partir desses postulados" (EVES, 2004. p 666).

[25]Dispomos da versão traduzida por Stephen Polllard e Tomas Bole (Weyl, 1994).

[26]Edmund G. A. Husserl (1859 – 1938), de origem alemã, foi o matemático e filósofo que estabeleceu a Fenomenologia como corrente filosófica. Em Matemática, seus trabalhos estão ligados à Filosofia da Matemática e aos fundamentos da Ciência Matemática.

Em meio a revoluções conceituais como as propostas por Einstein e Husserl, a tentativa de verificar um projeto que fundamente a Matemática como o de Hilbert e discussões sobre os caminhos da ciência como as encontradas nos trabalhos de Popper e Bacon, a lógica irá cada vez mais ganhar espaço nas discussões matemáticas e terá seu ápice em 1931 com os Teoremas da incompletude de Gödel.

Ferreira (2013, p. 3) afirma que "com os teoremas de Gödel, abateu-se sobre a comunidade uma espécie de exaustão. Desde essa altura, as questões dos fundamentos deixaram de mobilizar a atenção da comunidade matemática como até então". Nesse sentido, o autor irá se referir à Filosofia da Matemática como estando adormecida. Embora ela ainda seja estudada em departamentos de filosofia, não há maiores produções nessa área, uma vez que a produção do conhecimento está pautada em termos lógicos. Após anunciar alguns avanços matemáticos que sucederam os teoremas de Gödel, Ferreira (2013) afirma que: "chega-se ao novo milênio com estudos cada vez mais exigentes tecnicamente e, nas palavras de Michael Rathjen 'a tender para o limite da tolerância humana'" (FERREIRA, 2013, p. 4).

2.3 O *continuum* intuitivo

A discussão sobre o contínuo, trazida por Weyl em suas pesquisas, está pautada em uma compreensão do contínuo diferente da de sua época. Sobre a influência das ideias de Husserl, Einstein e Hilbert, é apresentada uma crítica aos fundamentos da Análise Matemática, tendo como solo a concepção de continuidade.

Na filosofia husserliana é possível encontrar um movimento de compreensão da constituição essencial de entes matemáticos. Podemos destacar as pesquisas referentes à origem dos Números e da Geometria. Em Husserl o termo origem[27] não diz do início temporal de algo, porém da origem na visão clara, da intuição primeira, que ocorre na subjetividade de um sujeito. Esse movimento característico da fenomenologia influenciou os modos de compreensão de alguns pesquisadores, como por exemplo, Weyl.

[27] A origem radical – Ürsprung – é um tema importante para compreender a questão da *verdade* no âmbito da fenomenologia. No *A origem da geometria* (Husserl, 1970) esse termo diz da síntese intencional mediante a qual os próprios objetos concretos são constituídos para o sujeito. Conforme Bicudo (2016, p. 32-3) "A questão da 'origem' no 'A Crise das ciências europeias' aparece com dois sentidos. Ele fala de origem, como ato em que se dá um ver claro, uma evidência, e em origem como origens da situação em que a Europa então se encontra naquele começo da primeira metade do século XX, focando, as questões científico-críticas filosóficas. Nessa direção, sua preocupação é com os aspectos histórico-teleológicos da humanidade européia. O primeiro sentido está tematizado no "A Origem da Geometria" (Husserl, 2008, p. 360) e o segundo, no "A Crise da Humanidade Europeia" (Husserl, 1970, p. 317, Bicudo, 2016, opus.cit.).

O trabalho em Análise Matemática realizado por Weyl (1994) em seu livro *The continuum: a critical examination of the fundations of Analysis* tem como ponto de partida esquemas de juízos emitidos sobre categorias de objetos. Essas categorias como ele mesmo diz são " ‘immediately given’ (i.e., exhibited in intuition)” (Weyl 1994, p. 8)[28], e a partir das proposições que definem esses juízos e tomando a categoria de números naturais é que o autor constrói o que ele chama de a *teoria pura dos números*.

O seminário de Husserl em 1905 foi, segundo Longo (1999), fortemente orientado para discussões sobre a Filosofia da Matemática o que faz com que seja uma tarefa árdua para qualquer matemático falar sobre os fundamentos da Matemática após o posicionamento de Husserl, sem levar em consideração suas reflexões. Longo (1999) tomará como ponto de partida o livro *Das Kontinnum* (Weyl, 1918), o qual, segundo ele, foi fortemente influenciado pelas ideias husserlianas nos conceitos de fundamentos de números e suas reflexões filosóficas. “Em particular a fenomenologia do contínuo está no coração da mais interessante e moderna observação em Das Kontinuum” (LONGO, 1999, p. 1).

Longo (1999), ao assumir uma postura fenomenológica, irá percorrer um caminho que tem início nas concepções intuitivas do *continuum* e leva à formalização lógico-matemática do *continuum matemático*.

Para ele, a intuição do contínuo é posta sobre elementos comuns e que por meio de uma pluralidade de atos de experiência vão emergindo invariantes que irão constituí-la. São trazidos quatro exemplos: a percepção do tempo, do movimento, de uma linha estendida e de um traço sobre o papel, com os quais o autor apresentará como a intuição do contínuo se dá em vivências de experiências que trazem o tempo sendo no fluxo da consciência, do movimento, como mudança, de uma linha estendida e do traço no papel que podem enlaçar a visão de não ter limites para que pare em algum ponto.

2.3.1 O tempo

A noção de tempo está no centro do trabalho de Weyl por considerar o tempo como um contínuo fundamental, continuamente vivenciado em nossas ações. Weyl se vale da noção de tempo fenomenal de Husserl e Bérgson como sendo uma experiência da consciência do *agora*, instante que incessantemente escorrega para o já foi.

[28] ‘Imediatamente dadas’ (ou seja, exibidas na intuição). Tradução nossa.

À luz do exposto em Bicudo (2003) compreende-se que o tempo e a experiência do tempo são coisas distintas. Organizamos a experiência temporal. Tomando-a em sua onticidade, o que é "evidenciado na organização de nossos afazeres conforme o tempo computado mecanicamente pelo relógio, em horas, dias, meses, anos" (BICUDO, 2003, p. 11). Porém, existem modos de estar no tempo, distintos dessa onticidade. O tempo vivenciado é aquele que flui, é o próprio movimento de ser, no qual os instantes se interligam num fluxo contínuo.

Essa autora alerta que o tempo em sua dimensão ontológica precisa ser tematizado para que possamos compreender "*o que é isto o tempo*". Entendemos que esse foi o movimento realizado por Husserl e que levou Weyl a questionar os fundamentos da Análise e elaborar sua compreensão sobre o contínuo.

Alves (2010) diz que historicamente, 1905 é marcado por uma notável coincidência. Por um lado é o ano em que teve início a investigação fenomenológica sobre a consciência do tempo com a conferência de Husserl em Göttingen e, por outro, é o ano em que Einstein inaugura sua teoria da relatividade restrita. É nesse momento que nossa compreensão ordinária do tempo começa a ser objeto de uma crítica e se abre para outras concepções.

Embora a Fenomenologia e a Física tenham se debruçado sobre as questões do tempo nesse período, e ambas tenham contribuído para ampliar nossa compreensão, Alves (2010, p. 16) fala de um divórcio entre as duas vertentes, pois "uma fenomenologia da experiência do tempo, se diz, se mover em um plano distinto e sem conexões imediatas com uma teoria física do tempo".

Essa separação já é apresentada pelo próprio Husserl no livro Crises (HUSSERL, 1970), anos após as primeiras discussões sobre o tempo. Na perspectiva fenomenológica há duas discussões sobre o tempo, que surgem nesse período. Uma husserliana e outra heideggeriana. Alves (2010) elucida os pontos de divergência entre as duas perspectivas de modo que podemos sintetizar dizendo que enquanto Heidegger se preocupava em diferenciar a concepção de tempo originário, como forma autêntica de ser do *Dasein,* e uma compreensão *vulgar* do tempo, como "sucessão inquebrável e infinita dos agoras" (ALVES, 2010, p. 22), Husserl buscava uma correlação entre o tempo objetivo público, das coisas, determinável pelas ciências da Natureza, com uma investigação gnosiológica sobre a experiência subjetivada do tempo, enquanto lugar de sua constituição originária.

Em Husserl (1994, p. 38-41) vemos que seu intuito é desenvolver uma análise fenomenológica da consciência interna do tempo, excluindo-se quaisquer suposições sobre o tempo objetivo, a fim de levar a uma plena visão e uma clara compreensão da objetividade do tempo. Em sua obra, a distinção entre tempo objetivo e objetividade de tempo é importante para o movimento proposto. Podemos lançar luz a esta questão, expondo a distinção entre tempo "sentido" e tempo "percepcionado", a qual vai se constituindo no decorrer da obra,

> O último [o tempo percepcionado] significa o tempo objetivo. Contudo, o primeiro [o tempo sentido] não é ele próprio tempo objetivo (ou posição no tempo objetivo), mas antes o dado fenomenológico através da apercepção empírica do qual se constitui a referência ao tempo objetivo (HUSSERL, 1994, p. 40, inserção nossa).

É por meio das experiências das modalidades temporais (passado, presente e futuro) que Husserl nos apresenta sua compreensão de objetos temporais que se mostram sempre segundo uma *duração*. Tomando o *som* como dado puramente hilético[29], é possível compreender como sua presentificação se dá num momento duradouro, que preenche o tempo de maneira que sua vivência não é esquecida de um instante para outro, tampouco há a sobreposição de momentos. Esse modo de ser dos objetos temporais se mostra num fluxo contínuo da consciência.

A duração de um objeto temporal se mostra de modo a se fazer presente tanto no momento em que se inicia, quanto no momento em que se finda, mas também em toda a extensão que separa os momentos destacados. Husserl (1994, p. 57) diz que "se uma fase temporal qualquer é um agora actual, então uma continuidade de fases está consciente como 'mesmo agora' e a extensão total de duração temporal, desde o início até o ponto agora, está consciente como duração decorrida".

Contudo, a vivência da experiência de um objeto temporal ainda solicita outra dimensão, a da transformação. Entendemos que o objeto temporal se faz presente em uma duração que não pode ser limitada por pontos cronométricos discretos, porém conseguimos distinguir duas experiências com relação a qual ocorreu primeiro. Mesmo no momento atual de presentificação de uma experiência temporal, que se dá num agora-duração, conseguimos distinguir modalidades temporais de passado e presente, ou seja, vivências que ocorreram em momentos diferentes e ordenados em antes e depois. Esse processo Husserl designa como *decurso do tempo*, o qual se dá numa percepção da duração pelo fluxo de consciência. Um objeto temporal está presente num dado *momento-agora*, contudo um novo momento agora surge fazendo com que percebamos a duração do objeto, mas também fazendo com que a

---

[29] Na filosofia husserliana o termo *hilético* diz daquilo que é sentido enquanto matéria pelo corpo encarnado.

experiência primeira mude-se para um modo passado. Nas palavras de Husserl: “Ao entrar em cena um agora sempre novo, muda-se o agora em passado e, com isso, toda a continuidade de decurso dos passados dos pontos precedentes se move ‘para baixo’, uniformemente, para a profundidade do passado” (HUSSERL, 1994, p. 61)[30].

Entendemos, que enquanto a fenomenologia se volta para as formas intencionais em que o tempo se mostra, fazendo um movimento de mover-se para trás até a consciência do tempo e o tempo intuitivamente dado, a Física moderna apresenta uma “medição do tempo objetivo, o tempo da Natureza e dos processos reais, ou seja, uma determinação de um tempo como dimensão acessível aos cronómetros e assim sem conexão com a experiência e com a intuição” (ALVES, 2010, p. 17).

Portanto, podemos dizer que a vivência do tempo nos coloca também intuindo o sentido de continuidade. Tematizá-lo abre horizontes para compreender o *continuum matemático*, no sentido de que se algo apresenta a característica de continuidade, então deve ser possível fazer uma relação com o tempo. Essa suposição será base para o desenvolvimento da teoria de Weyl sobre a continuidade.

2.3.2 Linha sobre o papel

Experiências intuitivas sobre o contínuo podem ser caminhos que nos permitem pensar sobre o conceito de *continuum* que é desenvolvido na Ciência Matemática. Longo (1999) se vale da perspectiva de produção de conhecimento husserliana e tece comentários que evidenciam esse processo na formalização da continuidade. Na perspectiva da fenomenologia de Husserl, é possível compreender que essas intuições vão se entrelaçando e se articulando, podendo produzir conhecimentos Matemáticos, tal como são concebidos pela academia.

Em Bicudo e Afonso da Silva (2018) encontramos uma compreensão sobre a diferença entre constituição e produção do conhecimento segundo a perspectiva da fenomenologia husserliana. Buscando expor de maneira clara as diferenças epistemológicas dos termos *constituição* e *produção* do conhecimento, encontramos no trabalho desses autores que o movimento de constituição do conhecimento se dá:

[30] Um aspecto importante a trazer na discussão a respeito do modo pelo qual Husserl expressa sua compreensão de tempo, enquanto fluxo da consciência, é a lembrança. Lembrança e não memória, pois é tomada no movimento de vivências que trazem experiências havidas quando, intencionalmente focamos algo que se deu, buscando retomá-lo e compreendê-lo, tomando como ponto de perspectiva do olhar o momento presente.

> pelo entrelaçamento dos sentidos experienciados no corpo-próprio ou corpo-encarnado, pelos diferentes órgãos, como audição, tato, visão, paladar, olfato e um sexto, cinestesia (movimento sentido), que vão se amalgamando e possibilitando a percepção de um objeto e sua forma em termos de figura e fundo, o qual se presentifica no fluxo da consciência. (BICUDO e AFONSO DA SILVA, 2018, p. 157).

Porém, a produção está associada à intersubjetividade, uma vez que as experiências subjetivas de cada indivíduo vão sendo expressas pela linguagem e articuladas de modo inteligível para uma comunidade por meio dos significados, e "à medida que os significados vão sendo aceitos e mantidos na repetição de atividades, realizadas por diferentes sujeitos, o conhecimento históricosócio-cultural se produz em uma comunidade e em grupos nela formados" (BICUDO e AFONSO DA SILVA, 2018, p. 157).

O processo de formalização do *continuum* apresentado em Longo (1999) se vale da perspectiva husserliana assumida em Bicudo e Afonso da Silva (2018). Como situação exemplar, Longo (1999) apresenta um dos teoremas mais importantes sobre o contínuo matemático (*continuum*), cuja enunciação é intuitivamente óbvia. Historicamente, esse teorema foi aceito por evocar conceitos intuitivos que dispensavam demonstrações. Contudo por um movimento intersubjetivo, daqueles que intencionalmente buscaram fundamentar a Matemática em termos formais, foi construído e demonstrado um teorema de importância significativa para a Matemática, e para a elaboração de novos teoremas.

Postula-se: Se em um plano, dividido em dois semiplanos por uma reta *r*, traça-se uma linha finita e contínua, que tenha cada extremidade em um dos semiplanos, então essa linha cortará a reta *r* em pelo menos um ponto. Essa ideia é fundamental para a formulação do Teorema do Valor Intermediário, que diz que:

Teorema: Se uma função f(x) é contínua em um intervalo fechado [a, b], e se existe um valor c intermediário entre f(a) e f(b), então sempre existe f(x) = c para pelo menos um valor de x pertencente ao intervalo [a, b].

A partir da intuição de que uma função pode ser representada por uma linha pode-se falar de funções contínuas com base, também, em nossas intuições. Cauchy, no início do século XIX, acreditou ter provado este teorema apenas se valendo da intuição de continuidade de um traço sobre uma folha. Embora hoje seja possível provar rigorosamente este teorema no campo da Análise, Cauchy não dispunha de uma noção de continuidade nem de curva formalizada pela Matemática. Mesmo assim, a demonstração realizada por ele teve valor por muitos anos no campo da Matemática.

Como Cauchy partiu de intuições de objetos do mundo físico, não houve muitas objeções a sua demonstração e isso é válido para outros conceitos matemáticos da época. Contudo, no início do século XIX houve um movimento para tentar formalizar a Matemática e uma disposição particular para encontrar uma formalização do conceito intuitivo de contínuo.

Segundo Longo (1999) é possível encontrar na História do processo de formalização dois caminhos distintos, de um lado o *éter na física*, que se valia de conceitos como a homogeneidade de um contínuo perfeito; e do outro lado o cálculo infinitesimal de Leibniz.

Embora os dois caminhos se diferenciem epistemologicamente, existem estruturas comuns à experiência do contínuo. Para Longo (1999) elas são *a invariância de escalas*, ou seja, um objeto pode ser estudado em uma escala microscópica ou macroscópica que ele irá preservar sua estrutura contínua*;* a *ausência de buracos* e a *ausência de saltos*, no sentido de que não há interrupções ao longo de algo que é contínuo.

Ao determinar essas estruturas invariantes do contínuo aparecem problemas no âmbito da Matemática. O conjunto dos Números Racionais, por exemplo, apresenta, ao mesmo tempo, fatos que lhe garantem a continuidade e fatos que evidenciam que ele não é contínuo. No intuito de formalizar a Matemática, se debruçaram sobre essa questão dois notórios matemáticos, Dedekind e Cantor.

2.3.3 Linha reta

As pesquisas desenvolvidas por Cantor e Dedekind sobre o infinito, fizeram com que eles percebessem a necessidade de se definir um Número Real de maneira formal. Valendo-se dos recursos que dispunham à época, eles definiram um Número Real como sendo o menor número que é maior do que qualquer elemento de um conjunto de racionais dados.

Cantor e Dedekind apresentaram um modelo para formalizar matematicamente o contínuo intuitivo baseado em três propriedades evidentes para a intuição: *Números naturais, quocientes, e convergência de séries.* A ideia é que a partir dos Números Naturais podemos obter os Inteiros e que, pelo quociente dos Inteiros, construímos os Números Racionais. Se tomarmos um conjunto de Racionais, o menor dos números desse conjunto será um corte, e como esse corte sempre existe, estão criados os Números Reais.

Esse tipo de construção teórica altera nossa visão de mundo. “Não somente a Matemática e sua estrutura são modificadas, mas nossa noção de conhecimento” (LONGO, 1999, p. 6). A perspectiva assumida por esse autor é a husserliana, portanto, entendemos que o conhecimento produzido ao longo desse processo se evidencia em um movimento que entrelaça as vivências e aquilo que já está historicamente aceito. As intuições geradas por nossas experiências são enlaçadas na intencionalidade, e nos mostram horizontes de possibilidades para articulações entre o intuitivo e conhecimento aceito por uma comunidade.

Segundo Longo (1999) as bases que permitiram a produção do conceito formalizado de Números Reais por Dedekind e Cantor estão postas em conceitos intuitivos, como a ausência de buracos e de saltos, no caso de uma corda esticada, e a percepção de invariabilidade de escala.

Esses conceitos intuitivos enquanto dados hiléticos nos são dados pelas vivências, e são intencionalmente percebidos em um corpo-encarnado, mostrando-se no fluxo de consciência como noções constituintes de um objeto. As articulações dessas experiências de modo dialético com os cossujeitos da comunidade matemática permitiram a produção de um conhecimento formalizado sobre os Números Reais como *cortes*.

Para nós, enquanto sujeitos situados no mundo-vida, e em um tempo histórico que abarca os cortes de Dedekind como um conhecimento produzido e aceito, nosso modo intuitivo de ver números, e os objetos como as linhas retas, já traz consigo um amalgamento de sentidos, de modo que nossas experiências intuitivas são distintas daquelas que eram anteriores ao processo de produção efetuado por Dedekind.

Em consonância com essa perspectiva encontramos em Longo (1999) que é possível pensarmos em termos de um jogo, no qual os conceitos formais são produzidos por um movimento de articulação de ideias intuitivas, mas que nossa compreensão do conhecimento científico formal modifica nosso modo de perceber o mundo e a nossa intuição. Assim, é possível que tenhamos experiências distintas daquelas que teríamos antes da compreensão dos conhecimentos formalizados, e essas novas experiências podem produzir novas formalizações.

A construção teórica dos Números Reais *Cantor-Dedekind* é uma formalização padrão de continuidade por bijeção à reta real da Análise. Essa construção satisfaz a invariância de escala e não apresenta buracos ou saltos em sua constituição. Desse modo, o conceito intuitivo de linha reta, possibilita dizer da continuidade de uma curva se ela for descrita por uma lei, que não apresenta buracos ou saltos, ou seja, que pode ser parametrizada pela reta real da Análise.

2.3.4 Movimento

Outro modo pelo qual damo-nos conta do contínuo é o *movimento* de um objeto. Segundo Longo (1999) podemos *ver* o contínuo ao focar um movimento. Em sua argumentação o autor irá se valer de concepções distintas de movimento.

Tomando como referência a perspectiva aristotélica, assume-se uma relação entre movimento e tempo, uma vez que é o próprio movimento de objetos que irá permitir a medição do tempo. Assim, podemos compreender, à luz do que exposto por Longo (1999), que a continuidade do movimento descreve também a continuidade do tempo. Essa perspectiva prevalece em muitos trabalhos de Física, que seguem o mesmo princípio hierárquico, ao dizerem que é a partir do movimento que damo-nos conta do tempo. Nesse sentido, o movimento também se dá no fluxo da experiência, na passagem da potencialidade para a ação, mas não na memória, porque o movimento é visível.

Outra perspectiva apresentada por Longo (1999) é a de Weyl que em diversos trabalhos tematiza o tempo, a continuidade e a matéria.

A concepção de Weyl apresenta uma distinção entre um movimento real e um caminho de potência. Uma vez que um objeto físico é distinto de um ente matemático, também devemos compreender que existe uma diferença entre o movimento de um objeto e uma trajetória parametrizada matematicamente. É usual fazer uma correspondência entre um dado objeto e sua posição no espaço, com um determinado ponto no espaço matemático. Porém, objetos e pontos são entes distintos, de modo que o objeto não é o ponto, e essa correspondência não pode ser estabelecida sem a devida cautela.

Essa situação se estende para a compreensão de movimento, ao entendermos que a continuidade dos pontos em uma curva, ou seja, em um caminho potencial, nos encaminha para a característica monótona da continuidade dos instantes, ou seja, associamos cada ponto do movimento de um objeto a um instante de tempo. Porém para Weyl isso é uma superposição de ideias, uma vez que o tempo não pode ser compreendido em termos de pontos, pois cada instante é uma duração, e o *agora* é a percepção simultânea do passado, do presente e do futuro. Quando o *agora* escorrega para o *já foi* ele traz o *ainda-não* para o momento presente. Nessa perspectiva, o movimento é vivenciado no fluxo contínuo do tempo da consciência.

2.4 O *continuum* e os números reais

Alguns anos depois da construção dos números reais por cortes, Poincaré e Weyl retomam a tentativa de formalização da Matemática, porém com visando a noção de impredicatividade em Matemática.

Se ao definirmos algo fazemos uso daquilo que está sendo definido, dizemos que essa é uma definição impredicativa. Em Weyl (1994) nos é dito que Poincaré afirma que essas definições nem sempre são contraditórias, mas apresentam o perigo da circularidade. Para Alves (2010),

> A impredicatividade da análise propõe uma possível formalização desta circularidade intuitiva, em particular do tempo fenomenológico; [isto] é uma de suas riquezas mais expressivas (ALVES, 2010, p. 5, inserção nossa).

Essa perspectiva de formalização do tempo fenomenológico se mostra nos trabalhos de Weyl, em particular em Weyl (1994). A inquietação de Weyl, que o conduzirá em sua pesquisa, pode ser expressa pela pergunta: Os pontos de uma reta real podem ser isolados *a posteriori*, mesmo que se para os definirmos ou analisarmos precisemos olhar para o todo do contínuo? Essa situação é análoga a nossa compreensão do presente que solicita a compreensão de passado e futuro?

A discussão tecida em Weyl (1994) estabelece uma relação entre a ausência de pontos no tempo, perspectiva defendida na fenomenologia husserliana, e a necessidade de discretizar os números reais, em cortes como Dedekind o fez. Para isso, ele busca eliminar enunciados cíclicos de sua teoria, mesmo com limitações matemáticas advindas de sua época. Esse livro é uma importante contribuição para a discussão sobre continuidade. Apresentaremos as principais ideias contidas e nossa interpretação sobre elas.

No prefácio de seu livro, Weyl afirma que ele pretende mostrar que a casa da Análise está construída sobre areia e que o problema repousa no conceito de *continuum*. No capítulo 1 ele apresenta as ideias que sustentam sua argumentação e no capítulo 2 ele inicia a construção da Análise segundo seus pressupostos. Contudo, o próprio autor nos alerta sobre as limitações de seus pressupostos:

> They will not, however, support everything which today is generally considered to be securely grounded. I give up the rest, since I see no other possibility. (WEYL, 1994, p. 1)[31]

A discussão articulada sobre o *continuum* busca contribuir para a compreensão da relação entre o que é imediatamente dado (ou intuitivamente) e o conceito formal (matemático) com o qual se procura trabalhar nas Ciências Físicas e na Geometria. Todo o encaminhamento realizado tem como objetivo evitar circularidades, uma vez que Weyl assume conceitos que não fazem uso de condições de existência e igualdade nem de conjunto, nem entre as relações associadas a eles.

Essa preocupação de Weyl se faz evidente quando ele afirma que a natureza dos conceitos de função e de conjuntos que a Análise Matemática se vale atualmente fazem aparecer círculos viciosos, pois “every cell (so to speak) of this mighty organism is permeated by the poison of contradiction and that a thorough revision is necessary to remedy the situation” (WEYL, 1994, p. 32)[32]. Todavia, explicita que sua teoria tenta cumprir todos os requisitos de construção baseados em lógica e não na álgebra, assim ele consegue definir os conceitos necessários para a fundamentação da Análise Matemática evitando os círculos viciosos.

Matemáticos como Russell e Frege já nos alertavam para os perigos da circularidade. . Contudo, os trabalhos de Poincaré e de Weyl é que trouxeram uma formalização da impredicatividade. Em Weyl (1994, p. 47) o próprio autor faz menção aos trabalhos de Russell e Frege dizendo que só após ele conseguir encontrar um caminho para evitar as circularidades é que tomou conhecimento das pesquisas desenvolvidas por esses autores.

> With the help of a tradition bound up with that complex of notions which even today enjoys absolute primacy in mathematics and which is connected above all with the names Dedekind and Cantor, I have discovered, traversed, and here set forth my own way out of this circle. Only after having done so did I become acquainted with the ideas of Frege and Russell which point in exactly the same direction. (WEYL, 1994, p. 47)[33].

---

[31] Eles não irão, contudo, suportar todas as coisas que hoje são genericamente consideradas como solo seguro. Eu desisto do resto, porque não vejo outra possibilidade. Tradução nossa.

[32] Cada célula deste distinto organismo está permeada do veneno da contradição e uma profunda revisão é necessária para remediar essa situação.

[33] Com a ajuda de uma tradição ligada àquele complexo de noções que ainda hoje goza de primazia absoluta em matemática e que está ligada acima de tudo aos nomes Dedekind e Cantor, eu descobri, atravessei e aqui

E complementa dizendo que, com relação ao trabalho de Poincaré, sua pesquisa avança ao formular os *Seis Princípios de Definição* que constituem a base de sua teoria contra a impredicatividade dos enunciados matemáticos.

A origem dos *Princípios* está ligada ao incomodo que Weyl sentia com os axiomas de Zermelo que são tomados para fundamentar a teoria de Dedekind-Cantor sobre conjuntos. Na tentativa de formular uma definição satisfatória para o conceito de subconjunto, Weyl elabora princípios que devem ser adotados para todas as definições matemáticas a fim de se evitar os círculos viciosos.

A perspectiva com a qual Weyl desenvolve sua construção da Análise Impredicativa está posta sobre julgamentos. Em inglês o termo usado é *judgments*. Os princípios estabelecidos por esse autor têm como objetivo atuar sobre julgamentos primitivos (*primitives judgments*) para formular julgamentos complexos (*complex juldgment*). Segundo o autor:

> By simple or primitive judgment schemes (or even, more briefly, "simple judgments"- where, for the moment, we take the word “judgment" in a wider sense than we have so far) we mean those which correspond to the individual immediately given properties and relations. […] Complex judgment schemes are to be obtained from these simple ones by applying the following principles (WEYL, 1994, p. 9).[34]

Cada princípio está relacionado com uma regra lógica, como por exemplo, a negação, a interseção e união, e podem ser encontrados em Weyl (1994, p. 9 – 11).

A partir desse momento a crítica à teoria de Dedekind se avoluma, e uma série de estranhamentos é exposta. O motivo principal desses estranhamentos está associado ao modo de essa corrente do pensamento matemático proceder, fundamentando as definições e as inferências com base na indução lógica sem empregar a intuição e os juízos auto-evidentes (Weyl, 1994, p. 48).

Um exemplo dos efeitos dessa perspectiva pode ser visto quando, ao discutir o conceito de conjuntos, construímos os Números Reais com as bases lógicas usadas por Dedekind, e isso nos conduz a associar cada ponto de uma reta a um único número real. Para

---

estabeleci meu próprio caminho para sair desse círculo. Somente depois de ter feito isso me familiarizei com as idéias de Frege e Russell, que apontam exatamente na mesma direção. Tradução nossa.

[34] Por esquemas de julgamento simples ou primitivos (ou ainda, mais resumidamente, "julgamentos simples" - onde, no momento, tomamos a palavra "julgamento" em um sentido mais amplo do que temos até agora), queremos dizer aqueles que correspondem às propriedades e relações individuais imediatamente dadas. […] Esquemas complexos de julgamento devem ser obtidos a partir destes simples, aplicando os seguintes princípios. Tradução Nossa.

Weyl, ao proceder desse modo a característica fluida de ser do *continuum* se modifica tornando-se um aglomerado de discretos.

Esse autor critica essa postura assumida pela Análise Matemática, tendo em vista que se os Números Reais puderem ser associados a um ente contínuo, como a reta, então o *continuum* deve manter a mesma estrutura que, por exemplo, o tempo, uma vez que esse é o continuo fundamental.

Contudo, segundo o autor, nosso tempo é o tempo fenomenal, ou seja, o da experiência vivenciada, e essa vivência não se separa de nosso modo de ser. Portanto quando pensamos no tempo precisamos considerar duas asserções. Primeira: um ponto individual é não independente, ou seja, não significa nada quando tomado em si, e existe apenas como ponto de transição. Segunda: faz parte da essência do tempo que um ponto-tempo não pode ser exibido em nenhuma hipótese, sempre é uma aproximação, nunca uma determinação exata é possível. (WEYL, 1994, p. 92).

Ao assumirmos essas duas asserções sobre tempo, vemos que a construção dos Números Reais, tal como é tradicionalmente apresentada pela Análise, se mostra não condizente com as propriedades temporais. Desse modo, Weyl (1994, p. 93) afirma que “we are not satisfied with replacing the continuum by the exact concept of the real number , [...] Certainly, the intuitive and the mathematical continuum do not coincide; a deep chasm is fixed between them”[35]. Mas existe uma possibilidade de aproximação por meio de estruturas lógicas matemáticas que, para serem compreendidas, solicitam um arcabouço mais denso sobre a concepção de Análise apresentada por Weyl.

O exposto até aqui nos lança em um novo horizonte de possibilidades, e nos permite buscar compreensões dentro do campo da Matemática. Iremos propor um estudo mais aprofundado das questões aqui levantadas na próxima seção.

2.5 O *continuum* e a computação

A compreensão do contínuo junto à Ciência da Computação avança em termos de se tornar mais clara, quando consideramos o movimento histórico e as questões que ele lança sobre a Ciência Ocidental.

[35] não estamos satisfeitos com a troca do conceito de *continuum* pelo exato conceito de número real, [...] Certamente, o contínuo intuito e contínuo matemático não coincidem; Um abismo profundo está posto entre eles. Tradução nossa

As tecnologias desenvolvidas pelo homem têm como motivação original a possibilidade de facilitar o trabalho, ou diminuir o tempo de execução de uma tarefa desempenhada pelas pessoas. No que tange à Matemática, as ferramentas de processamento de dados, ou seja, as máquinas de calcular surgem no século XVII com Blaise Pascal[36], no intuito de poder desenvolver cálculos mecânicos de maneira menos penosa para os matemáticos da época.

O desenvolvimento dos computadores está imbricado nessa busca e na tese defendida por Alan Turing[37] para um processo algorítmico, denominado *Máquina de Turing*. Esse dispositivo não pode ser desenvolvido em termos físicos, mas o seu funcionamento revolucionário é que permitiu a Ciência da Computação alcançar o *status* que possui hoje.

Uma Máquina de Turing é composta por uma fita infinita que é dividida em espaços iguais, nos quais se pode escrever uma informação, ler um estado e alterar suas configurações. Para seu funcionamento é preciso definir um alfabeto base e uma lista de estados que serão entendidos e executados pela máquina.

Nossos computadores atuais são baseados nesse tipo de dispositivo. Porém, ao invés de usar uma fita infinita, dispõe de uma memória virtual; nosso alfabeto base é o sistema binário, com a sintaxe da lógica booleana[38] e os estados são as possibilidades computacionais que temos hoje em dia.

Uma das características do sistema de computação atual, que o diferencia da Máquina de Turing, é justamente o fato de ser finito, e possuir um tipo de memória limitada. Embora essa não seja a única diferença, nossa investigação busca compreender como o *continuum* pode se presentificar em tal situação, com as características computacionais atuais.

Durante as primeiras décadas do século XX houve desenvolvimento tanto da Matemática, quanto da Lógica que abriram portas para o desenvolvimento tecnológico digital.

---

[36] Blaise Pascal (1623 – 1662), de origem francesa, desenvolveu trabalhos nas ciências naturais e aplicadas, contribuiu significativamente para o desenvolvimento da teoria dos fluídos, e inventor da primeira máquina de calcular aos 19 anos.

[37] Alan M. Turing (1912 – 1954), de origem britânica, foi um matemático e lógico que contribuiu para a formalização do conceito de algoritmo e da computação. Sua mais famosa tese, a Máquina de Turing, permitiu o desenvolvimento do computador atual.

[38] Uma álgebra Booleana pode ser definida com um conjunto de operadores e um conjunto de axiomas. Em 1854, George Boole introduziu o formalismo que até hoje se usa para o tratamento sistemático da lógica, que é a chamada Álgebra Booleana. Diferentemente da álgebra ordinária dos reais, onde as variáveis podem assumir valores no intervalo $(-\infty, +\infty)$, as variáveis Booleanas só podem assumir um número finito de valores. Em particular, na álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por [F,V] (falso ou verdadeiro), [H,L] (high and low) ou ainda [0,1].

O conceito de algoritmo exposto por Turing (1936) permitiu criar máquinas que executassem algoritmos. Surge, então, um campo novo de estudos, visando compreender o que seria possível, ou não, ser processado por essas máquinas. Ou seja, visa dizer o que é computável e o que não o é. Trata-se de um ramo da Ciência da Computação denominado *Computabilidade*, que surge nessa perspectiva buscando compreender quais as possibilidades e limitações da computação. Weihrauch (1995) afirma que:

> During the last 60 years an extensive theory of computability and computational complexity has been developed […]. Without doubt this '*Type 1 theory'* models the behavior of real world computers for computations on discrete sets like natural numbers, finite words, finite graphs etc quite adequately (WEIHRAUCH, 1995 p. 1, grifo do autor). [39]

Embora o desenvolvimento apontado por esse autor esteja nos conjuntos discretos, os computadores estão sendo usados para resolver problemas numéricos que solicitam as propriedades dos números reais e da continuidade. E, com isso, abrem-se perspectivas de aproximações entre a Análise e a teoria computacional. Podemos citar como exemplos, The Real RAM, Interval Analysis, Information Based Complexity, Grzegorczyk Approuch, Computational complexity in analysis, Polish Approuch e Russian Approuch (VER WEIHRAUCH, 1995, p. 67).

Segundo Weihrauch (1995) todas essas perspectivas foram negligenciadas pelas principais publicações do campo da Matemática e da Computação, porém a *Type 2 Theory of Efectivity* estende a *Type 1 Theory* e a conecta à Análise abstrata.

> Its origin is a definition of computable real functions given by Grzegorczyk (1955) which is based on the definition of computable operators on the set ω^{ω} of sequences of natural numbers. Real numbers are encoded by fast converging Cauchy sequences of rational numbers and these are encoded by sequences of natural numbers (WEIHRAUCH, 1995, p. 1).[40]

---

[39] Durante os últimos 60 anos, uma extensa teoria de computabilidade e complexidade computacional foi desenvolvida […]. Sem dúvida, essa "teoria do tipo 1" modela o comportamento dos computadores do mundo real para cálculos em conjuntos discretos, como números naturais, palavras finitas, gráficos finitos, etc, bastante adequadamente. Tradução nossa

[40] Sua origem é uma definição de funções reais computáveis, dadas por Grzegorczyk (1955), que se baseia na definição de operadores computáveis no conjunto ω^{ω} de seqüências de números naturais. Os números reais são codificados por sequências de Cauchy de números racionais de convergência rápida e os números racionais são codificados por sequências de números naturais. Tradução nossa

Dessa perspectiva, o conceito de número computacional se aproxima da proposta trazida por Cauchy no processo chamado *Aritmetização da Análise* a ser exposto mais à frente nesta tese. Compreendemos, entretanto, que, neste momento, é importante olhar para os desdobramentos desse modo de ver os números no que tange à continuidade, para esclarecer a ideia subjacente a esse conceito.

Ao olharmos para a continuidade computacional nos deparamos com a limitação da memória computacional e da incompatibilidade da representação binária de números decimais, porém, a teoria apresentada por Weihrauch (1995) traz os números como sequências racionais computáveis, de modo que todo número é computável e a característica contínua de uma função "can be interpreted in this context as a very fundamental kind of effectivity or constructively and simple topological considerations explain a number of well-known observations from effective analysis very satisfactorily" (WEIHRAUCH, 1995, p. 1)[41].

Com base nessa propriedade construtiva dos números Weihrauch (1995) apresenta a tese de que "every computable real function is continuous […] formulate the thesis that every physically computable function is continuous" (WEIHRAUCH, 1995, p. 3)[42]. Para compreender o que é dito por esse autor é mister focar, de modo mais atento, à estrutura da Matemática e da Análise Matemática.

2.6 *Quaestio disputata*: um panorama do exposto

Nesta seção da *lectio* foram apresentadas as compreensões da continuidade em diferentes dimensões. Buscamos na linguagem e na História por indícios que nos permitissem clarear o caminho que estamos percorrendo. Desse modo, fomos conduzidos a questionar as nossas próprias experiências com o contínuo, as quais permitem dizer sobre *continuum.* Ainda, nesta seção, estabelecemos uma primeira relação entre o contínuo e as duas perspectivas que focamos em nossa tese: Os números e a computação.

No âmbito da História foi possível compreender diferentes perspectivas de continuidade. Entendemos que cada período histórico apresenta um movimento próprio, e traz

[41] Uma função pode ser interpretada nesse contexto como um tipo muito fundamental de efetividade ou constructibilidade e simples considerações topológicas explicam uma série de observações bem conhecidas da análise eficaz de maneira muito satisfatória. Tradução nossa.

[42] Toda função computável real é continua [...] formulando a tese de que toda função fisicamente computável é continua. Tradução nossa.

consigo a sua historicidade e aos conhecimentos até então produzidos. Contudo, nós assumimos a perspectiva da produção do conhecimento por meio da intersubjetividade, ou seja, a produção do conhecimento se dá em uma comunidade que, toma os conhecimentos culturalmente aceitos e os articula na busca por novas compreensões. Portanto, conhecer os sentidos e significados, que foram sendo percebidos e articulados, é o que nos permite caminhar, buscando sair de uma postura ingênua sobre o nosso investigado e tematizar o processo de formalização atual.

Nessa direção, se mostrou significativo para nossa tese o estranhamento levantado por Weyl quanto à formalização de números posta por Dedekind. A crítica de Weyl (1994) marca um distanciamento dos sentidos até então aceitos, e apresenta conceitos da filosofia fenomenológica de Husserl. Embora, o trabalho de Weyl (1994) esteja questionando o conceito de número, sua perspectiva de trabalho visa construir outra base para Análise Real, de modo que esse será o tema da próxima seção da tese.

Outra dimensão de nossa *lectio* foi a abordagem de nossa inquietação com a perspectiva computacional, apresentando a noção de computabilidade, e um contexto do seu desenvolvimento. Apresentaremos no capítulo IV nossas investigações sobre o tema de modo mais detalhado.

As perspectivas trazidas nesta seção são constitutivas da ideia de continuidade. Entendemos que elas abrem horizontes de investigação, lançando luz àquilo que buscamos compreender, o *continuum*.

Avançamos com nossa *lectio*, focando a *quaestio* sobre o *continuum*, com a intenção de compreendê-lo no campo da Ciência Matemática. É disso que o próximo capítulo trata.

CAPÍTULO III – O *continuum*: Aspectos matemáticos da continuidade

Nesta seção buscaremos elucidar conceitos matemáticos que circundam a compreensão do *continuum*. Para isso nos apoiaremos em livros de Análise Matemática e de História da Matemática, nomeadamente Lima (2002), Lopes (2006), Eves (2004) para compreender como são tratadas as noções que entendemos estar presentes no núcleo da ideia de continuidade, ou seja, números, conceitos de limite e funções. Isso porque entendemos que cada um desses conceitos traz consigo sentidos de continuidade.

Abordaremos os fatos que levaram à formalização da Análise e os caminhos tomados por diferentes autores nesse processo. Tomando como protagonista do processo a construção dos Números Reais, apresentaremos duas construções distintas para esse conjunto numérico e apontamos as diferenças entre essas perspectivas. Entretanto, expomos o fato matemático de haver um isomorfismo de corpos entre elas.

Nesta seção levamos em consideração o rigor matemático, no sentido de tentar ser o mais fiel possível às compreensões subjacentes às teorias expostas. Contudo, não nos propusemos a realizar uma formalização algébrica de seus procedimentos, por entender que o objetivo aqui visado seja elucidar conceitos postos e estruturados na Ciência Matemática, e não trabalhar diretamente com suas demonstrações. Nosso objetivo é que os aspectos apresentados permitam ver a Análise de diferentes perspectivas, de tal modo que as concepções de número de cada uma delas evidenciem aspectos do *continuum* junto à Matemática.

3.1 A Aritmetização da Análise

A fundamentação da Análise como sendo o alicerce da Matemática foi um processo que demandou muito esforço de grandes Matemáticos. Essa fundamentação se faz necessária uma vez que a compreensão superficial de um conceito matemático pode acarretar equívocos de grande magnitude. Historicamente o processo de A*ritmetização da Análise* começou no final do século XVIII com Lagrange, mas só no século XIX com os trabalhos de Gauss há um movimento eficiente para romper com as ideias intuitivas e caminhar para uma formalização de conceitos como limites, continuidade e diferenciabilidade.

Em Eves (2004, p. 609 - 611) encontramos um desenvolvimento detalhado desse processo, que teve como movimento impulsionador o Cálculo Diferencial e Integral que acabara de ser desenvolvido e era, então, empregado de maneira intuitiva pelos matemáticos da época. Segundo Eves (2004), Jean-le-Rond D'Alambert (1717 – 1783) apontou a necessidade de uma teoria dos limites em 1754. Porém só em 1797 foi desenvolvida uma tentativa rigorosa para a formalização do Cálculo, realizada pelo matemático Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) "baseada na representação de uma função por uma expansão em série de Taylor" (EVES, 2004, p. 610). Apesar de essa tentativa ignorar aspectos importantes sobre convergência e divergência de séries, influenciou pesquisas posteriores, as quais permitiram chegar à formalização atual.

Em todo século XIX foram desenvolvidas pesquisas para consolidar a Análise Matemática, e é notório o trabalho de Gauss que, segundo Eves (2004), apresentou, entre outras coisas, a primeira consideração efetivamente adequada a respeito da convergência de uma série infinita em 1812.Contudo, segundo esse autor, pode-se atribuir a Cauchy o primeiro grande avanço nesse processo. Valendo-se das ideias de D'Alambert, Cauchy pode desenvolver uma teoria de limites e, assim, definir de forma satisfatória os conceitos de continuidade, diferenciabilidade e integração definida.

Entretanto, no final do século XIX, começaram surgir exemplos de funções que contrariavam a proposta apresentada por Cauchy. Riemann, por exemplo, definiu uma função contínua para valores irracionais, mas descontínua para valores racionais. Para Eves (2004, p. 610), "exemplos como esses pareciam contrariar a intuição humana e tornavam cada vez mais evidente que Cauchy não tinha atingido o verdadeiro âmago das dificuldades na procura de uma fundamentação sólida para a Análise".

As propostas de fundamentação que foram apresentadas no século XIX eram alvo de críticas e construções de estruturas matemáticas que contrariavam a intuição. Isso porque os conceitos que são necessários à Análise solicitam uma compreensão de estrutura dos Números Reais, a qual ainda não se tinha. Se colocarmos a proposta de Cauchy em foco, podemos compreender que os conceitos por ele apresentados estavam postos sobre o sistema de Números Reais e que esse sistema ainda não apresentava uma formalização. Por esse motivo, Weierstrass defendeu um programa de formalização da Análise, em que o próprio sistema dos Números Reais fosse formalizado, possibilitando a formalização da Análise, seguindo uma dinâmica coerentemente lógica, uma vez que os conceitos necessários para a fundamentação da Análise dependem, em grande parte, das propriedades recônditas dos números.

Com base no exposto por esse autor, entendemos, com Eves, que o processo de Aritmetização da Análise, proposto pelo matemático alemão Karl Weierstrass, consistiu em "um programa no qual o próprio sistema dos números reais, antes de mais nada, fosse tornado rigoroso para que assim tudo que dele decorresse na análise inspirasse segurança" (EVES, 2004, p. 611).

O sucesso do programa permitiu não apenas fundamentar a Análise sobre os números reais, como também estabelecer uma relação entre a Geometria Euclidiana e os números reais, e entre Álgebra e números reais, dessa forma, "pode-se afirmar hoje que, essencialmente, a consistência de toda a Matemática existente depende da consistência do sistema dos números reais" (EVES, 2004, p. 611).

A discussão apresentada por LOPES (2006) sobre o processo de *Aritmetização da Análise* nos indica três caminhos distintos a seguir, os quais são nomeados por seus defensores mais notórios:

> Hankel (1839 – 1873) e Frege (1848 – 1925) defenderam a ideia tradicional de que a Análise deveria ser fundada na noção de quantidade contínua.
>
> Dedekind (1831 – 1916), Weierstrass (1815 – 1897) e Cantor (1845 – 1918) defenderam que a noção de quantidade deveria ser substituída por uma rigorosa construção aritmética dos números reais, isto é, uma construção baseada na noção de números naturais ou racionais, que se assumiu ser menos problemática do que a noção de quantidade contínua.
>
> Heine (1821 – 1881), Thomae (1840 – 1921) e Hilbert (1862 – 1943) defenderam que os conceitos fundamentais da Análise poderiam, e deveriam, ser construídos simplesmente de uma maneira formal, desprezando, tanto quanto possível, os assuntos de ordem filosófica. (LOPES, 2006, p. 3).

A compreensão de Hankel e Frege repousa na construção de sistemas numéricos e operações como uma combinação de símbolos básicos, que produzem novos símbolos. Contudo, Hankel supôs que um sistema numérico formal "deveria ser gerado a partir de um conjunto finito de símbolos básicos por uma sequência contável de aplicações de operações definidas" (LOPES, 2006, p. 5) e desse modo os números irracionais não poderiam ser formalmente construídos, uma vez que não é possível definir todas as operações que poderiam ser admitidas sobre os números reais.

A concepção de Weierstrass sobre a Análise é trazida por Lopes (2006). Para essa autora, a concepção weierstrassiana é embasada na crença de que números são *agregados* de certos elementos. Desse modo, ele pode caracterizar os números com *unidades básicas* e *partes de unidades*. A construção aritmética realizada por Weierstrass associou *quantidade* com *números* e, por esse motivo, suas demonstrações tomam como base o conceito de transformações entre quantidades, que só depois foram atribuídas aos números.

As ideias de Weierstrass influenciaram Cantor e Heine, que produzem construções de sistemas numéricos, porém de formas distintas.

Heine se valeu dos conceitos de conjuntos infinitos e quantidades de Weierstrass, e também do critério de convergência de Cauchy[43] para a construção dos sistemas numéricos. Contudo, o que mais chama atenção em sua abordagem foi o fato de que “ele procurou evitar problemas filosóficos de uma forma surpreendentemente ingênua, encarando os números como símbolos *tangíveis* sem estar consciente do quanto a sua ideia era vaga” (LOPES, 2006, p. 9. Grifo da autora).

A tentativa de separar a construção dos números reais da intuição, usando os critérios de classe de equivalência, convergências de Cauchy e quantidades tangíveis, foi criticada por Frege, e não teve aceitação pela academia, mostrando-se como uma construção muito controversa para a Matemática.

Cantor, entretanto, fez uso das concepções de Weierstrass sobre quantidades e o conceito de Convergência de Cauchy para caracterizar um número oriundo da convergência de uma série de racionais de *quantidade numérica de primeira espécie*, e essa quantidade foi associada a um ponto de uma reta (LOPES, 2006, p. 7). Desse modo, pode construir os números reais de forma similar ao método seguido por Weierstrass. Porém, ao realizar esse processo, pela primeira vez na História da Matemática, Cantor viu que os números reais constituem um conjunto não enumerável. Ficou evidente, para ele, a existência de diferentes tipos de infinito e isso levou sua pesquisa para outra direção, notadamente, a *Teoria dos Conjuntos Transfinitos*. Com essa teoria pode apresentar uma concepção aritmética do contínuo por meio da *Hipótese do Continuum*.

Dedekind traz outra concepção de números reais, entendida como a mais trabalhada em livros de Análise, de acordo com Lima (2002). Esse autor afirma que

> O conjunto dos números naturais é definido a partir da teoria dos conjuntos e os axiomas, hoje conhecidos com o nome de Peano, são demonstrados como teoremas, [...] De qualquer maneira, o mais importante não são os axiomas que ele [Dedekind] escolheu e sim a atitude que ele adotou, a qual veio prevalecer na Matemática atual, sob o nome de método axiomático. (LIMA, 2002, p. 25-26, inserção nossa).

---

[43] O critério de convergência de Cauchy para sequências afirma que para um número real arbitrário $\varepsilon > 0$, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$ e $n > n_0$ implicam $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Assim, para que (x_n) seja uma sequência de Cauchy, exige-se que seus termos x_m, x_n, para valores suficientemente grandes dos índices m, n se aproximem arbitrariamente uns dos outros. (LIMA, 2002, p. 98).

Essa mudança de perspectiva também é apontada por Lopes (2006, p. 12). Para essa autora, Dedekind pode ser credenciado como um dos proponentes da *Teoria Criacionista da Matemática*, pois ele entendia que os números - reais, naturais, inteiros, racionais - eram todos criações do homem. Concordamos com a autora tendo em vista que em seu trabalho *Essays on the Theory of Numbers* (DEDEKIND, 2007) o autor se vale do termo "*creation*" para se referir ao processo de formalização dos números. A sua proposta de construção aritmética dos números reais tem como pressuposta a ideia geométrica dos pontos, ou seja, uma noção intuitiva de quantidade contínua de segmentos de reta ele associou os números racionais. (LOPES, 2006, p. 12) Dedekind observa que tanto um conjunto numérico quanto uma corda podem ser separados em dois conjuntos por um elemento. Vale-se da concepção de continuidade de uma corda que é quebrada por um único corte e amplia essa concepção para números, afirmando que existe um elemento que também consegue separar um conjunto em duas partes. Esse elemento em sua teoria é único e ganha o nome de *Corte* ou *Seção* (Schnitt).

Desse modo, Dedekind articulou as concepções de aritmética e geometria com os seguintes postulados e teoremas.

Postulado:

> Se todos os pontos numa linha reta caem em duas classes de tal forma que todo o ponto da primeira classe está à esquerda de todo o ponto da segunda, então existe um e um só ponto que produz esta decomposição de todos os pontos em duas classes, esta divisão da linha reta em duas partes.

Teorema

> Se o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é decomposto em dois subconjuntos $A_1\ e\ A_2$ tais que para todo o $\alpha_1 \in A_1\ e\ \alpha_2 \in A_2$ se tem $\alpha_1 < \alpha_2 \cdot$, então existe um único número $\alpha \in \mathbb{R}$ que produz este corte, isto é, tal que:
>
> $A_1 = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta < \alpha\}$ e $A_2 = \mathbb{R} \backslash A_1$ ou
>
> $A_2 = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta > \alpha\}$ e $A_1 = R \backslash A_2$. (DEDEKIND, 2007, p. 11)

A prova desse teorema e a analogia ao postulado foram decisivas para o conceito de número criado por Dedekind. Esse conceito é amplamente trabalhado hoje em dia nos cursos de Análise. Contudo, devemos destacar que essa analogia foi criticada por diversos autores e, principalmente, por Weyl (1994), conforme discutido na seção2 desta tese, quando discorre sobre o histórico da continuidade.

Para confrontar as questões que envolvem o continuum é preciso que nos debrucemos sobre a formalização do conceito de números reais no atual sistema de rigor matemático. Para isso precisaremos elucidar alguns conceitos matemáticos, a saber, conjuntos e funções, bem como algumas de suas propriedades.

3.2 Formalização do conjunto dos Números Reais

A formalização dos Números Reais é apresentada em diversos livros de Análise Matemática (ou Análise Real). Adotaremos o caminho percorrido por Lima (2002) como referência para nosso trabalho. Entendemos que esse autor é significativo, tanto por ser um matemático reconhecido, como por sua relevância no cenário da pesquisa nacional em Matemática. O seu trabalho é amplamente discutido e aceito nos meios acadêmicos.

No que segue, neste texto, serão trazidos conceitos que entendemos ser relevantes para a articulação da *disputatĭo* encaminhada pela *quaestio* desta tese. Não será apresentada a Teoria dos Conjuntos em sua totalidade, todavia os conceitos aqui tratados nos conduzem à compreensão da Análise que, por sua vez, solicita as noções de conjuntos e funções. No estudo da Análise buscamos compreender as diferentes interpretações de *Número* trabalhadas em suas teorias, as quais revelam modos de o *continuum* se presentificar na Ciência Matemática.

3.2.1 Conjuntos

O conceito de Conjunto é um conceito primitivo, de modo que não podemos defini-lo, mas podemos compreender intuitivamente que um conjunto é uma coleção formada por objetos, ao qual damos o nome de *elementos*.

Quando um objeto, por exemplo, x, é um elemento que compõem um conjunto A, dizemos que *"x pertence a A",* e escrevemos:

$$x \in A$$

Todavia, se x não é um elemento constitutivo de A, dizemos que "*x não pertence a A"*, e escrevemos:

$$x \notin A$$

Adotaremos a notação usual, na qual um conjunto é representado por uma letra maiúscula e seus elementos por letras minúsculas, que serão sempre separados por vírgulas e dispostos entre chaves. Assim um conjunto X das vogais do alfabeto brasileiro pode ser escrito como:

$$X = \{a, e, i, o, u\}$$

Os conjuntos numéricos dos números Naturais e Inteiros serão representados pelas letras $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, respectivamente. Assim:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Um conjunto também pode ser definido por uma propriedade única e exclusiva de seus elementos. Esse recurso é muito utilizado para caracterizar conjuntos matemáticos, desse modo tomando uma propriedade P, define-se um conjunto X, por exemplo, se um objeto x goza da propriedade P, então $x \in X$; se x não goza de P então $x \notin X$. Escreve-se:

$$X = \{x | x\ goza\ da\ propriedade\ P\}$$

Lê-se: “X é o conjunto dos elementos x tais que x goza da propriedade P”.

O conjunto dos números Racionais é definido desse modo:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\ \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$$

Ou seja, “$\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações $\frac{p}{q}$ tais que p pertence a $\mathbb{Z}$, q pertence a $\mathbb{Z}$ e q é diferente de zero”.

Se um conjunto não possui elementos, ou se nenhum elemento goza da propriedade que define o conjunto, então dizemos que esse conjunto é vazio e para representá-lo usaremos o símbolo $\emptyset$.

Dizemos que cada parte B de um conjunto A é chamada de *subconjunto* de A. Mais precisamente, B é um subconjunto de A, se todo $x \in B$ é tal que $x \in A$. Para indicar esse fato valer-nos-ei do símbolo de inclusão

$$B \subset A$$

Lê-se: “B está contido em A”, ou “B está incluído em A”, ou ainda “B é parte de A”.

Devemos notar que o conjunto $\emptyset \subset X$ para qualquer que seja o conjunto X, e que também valem as relações.

1. $A \subset A$, seja qual for o conjunto A;

2. $se\ A \subset B\ e\ B \subset A$, então $A = B$

3. $se\ A \subset B\ e\ B \subset C$, então $A \subset C$

O conjunto das partes é um conjunto especial, pois se mostra mais simples, por ser mais intuitivo, porém, traz entendimento que auxilia na compreensão de estruturas mais complexas da Teoria dos Conjuntos, como o *Teorema da Escolha*. Dado um conjunto X, indica-se com $\mathcal{P}(X)$ o conjunto cujos elementos que são as partes de X. Em outras palavras, afirmar que $A \in \mathcal{P}(X)$ é o mesmo que dizer que $A \subset X$. O conjunto das partes nunca é vazio, uma vez que pelo menos o $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ e $X \in \mathcal{P}(X)$.

No desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos, são formalizadas as operações entre conjuntos. Por exemplo, união, intersecção, complemento. Entretanto, entendemos que não seja significativo expô-las aqui, tendo em vista a compreensão do tema focado nesta tese.

3.2.2 Funções

Uma função $f: A \rightarrow B$ consta de três partes: um conjunto A, chamado *domínio da função* que pode ser entendido como o conjunto no qual a função é definida, um conjunto B, chamado de *contradomínio* da função, que é o conjunto no qual a função toma valores, e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o *valor* que a função assume em x.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita injetiva quando, dados $x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2)$, implica que $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando $x_1 \neq x_2$, em A, implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$, em B.

Uma função $f: A \rightarrow B$ é dita *sobrejetiva* quando, para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Uma função $f: A \rightarrow B$ chama-se *bijetiva* quando é *injetiva* e *sobrejetiva* ao mesmo tempo.

Dadas uma função $f: A \rightarrow B$ e uma parte $X \subset A$, chama-se *imagem* de X pela função *f* o conjunto $f(X)$, formado pelos valores de $f(x)$ que *f* assume nos pontos $x \in X$.

Os conceitos de *função inversa* e *composição de função* são importantes no escopo da teoria, entretanto, entendemos não trazerem explicitações relevantes para o desenvolvimento da *quaestio* que sustenta a narrativa desta tese. Assim entendendo, não serão apresentados nesta tese, bem como não está em seu escopo apresentar um curso completo sobre as operações e propriedades que a teoria das funções comporta.

3.2.3 Sequências

No processo histórico de formalização da Análise, o tratamento das sequências foi que possibilitou a extensão dos conceitos de limite e continuidade para a ideia de funções.

Sendo que nossa *quaestio-disputāta* neste momento incide sobre o processo de formalização da Análise, então entendemos ser preciso clarear o que estamos chamando de sequência. Para tanto, seguiremos o exposto em Lima (2002) em seu capítulo 4.

Uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa cada número natural n um número real x_n, chamado *n-ésimo termo* da sequência. Representamos uma sequência nos valendo dos parênteses. Assim (x_n) ou $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ são representações válidas para uma sequência.

Uma sequência é dita *limitada superiormente* se existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De maneira análoga definimos sequência *limitada inferiormente*. Ainda, dizemos que uma *sequência é limitada* se existe $c \in \mathbb{R}$, tal que $|x_n| \leq c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Chamamos de sequências *monótonas* aquelas que em todos os termos seguem um comportamento de crescimento ou decrescimento. Assim uma das desigualdades abaixo é verificada para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$x_n < x_{n+1},\ \ x_n \leq x_{n+1},\ x_n > x_{n+1}\ ou\ x_n \geq x_{n+1}$$

Dizemos que um número $p\ \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de um subconjunto $A\ de\ \mathbb{R}$ se, para todo $\varepsilon\ >\ 0$, o intervalo aberto $(p\ -\ \varepsilon, p\ +\ \varepsilon)$ possui um ponto de A diferente de p.

3.2.4 Conjuntos finitos, enumeráveis e não enumeráveis

Uma *disputatĭo* sobre a continuidade traz sempre consigo o infinito, solicitando que seja tematizado. E, de modo análogo, como exposto na seção anterior desta tese, a ideia de infinito chama a de continuidade, sempre que sobre ele pensamos. Esse entrelaçamento de ideias solicita que o conceito de enumerabilidade de um conjunto seja clareado para o prosseguimento da investigação, pois foi essa teoria que deu sentido à existência de diferentes infinitos. Esse conceito é recente na História da Matemática. Trouxe um impacto nas compreensões de número e consequentemente de *continuum*.

O primeiro Matemático a vislumbrar a existência de diferentes tipos de infinito e começar a discutir essa possibilidade foi Cantor. Seus trabalhos possibilitaram distinguir e calcular a cardinalidade de conjuntos infinitos. Ainda que a teoria de conjuntos transfinitos desse autor apresente classificações organizadas em diferentes níveis como: cardinalidade, densidade e enumerabilidade; entendemos que para compreendermos a nossa *quaestio* de investigação, precisamos ter clara a diferença relacionada apenas ao número de elementos de um conjunto, donde destacarmos três tipos de conjuntos: os finitos, os enumeráveis e os não enumeráveis.

O critério de enumeração de um conjunto está ligado a uma associação de seus elementos com os números naturais. Há diferentes interpretações e caminhos a serem seguidos para compreender a Teoria dos Números Naturais. Podemos citar como exemplos: o modo Axiomático de Peano (1901); o modo Dedutivo de Dedekind (2007); ou ainda uma perspectiva mais algébrica, como aquela apresentada por Cohen e Ehrlich (1963).

Lima (2002, p. 25) se vale da perspectiva de Peano e afirma que:

> Os axiomas de Peano exibem os números naturais como "números ordinais", isto é, objetos que ocupam lugares determinadas numa sequência ordenada: 1 é o primeiro número natural, 2 é o número que vem logo depois do 1, 3 vem em seguida ao 2, etc. Mas os números naturais também podem ocorrer como "números cardinais", isto é, como resultado de uma operação de contagem, em resposta à pergunta: quantos elementos possui este conjunto? (LIMA, 2002, p. 25).

Os axiomas de Peano foram construídos para que os números naturais se tornassem uma base sólida em que fosse possível edificar os conceitos matemáticos. São esses axiomas que permitem demonstrar todas as propriedades aritméticas dos naturais e construir teoremas que podem ser estendidos para outros conjuntos numéricos. Assumindo como verdadeiros os axiomas de Peano e, por conseguinte a estrutura dos números naturais, podemos, então, estabelecer os conceitos de enumerabilidade de um conjunto.

Enumerabilidade de um conjunto é definida como: dado um número natural n construímos o conjunto $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ com todos os números naturais menores ou iguais a n, ou seja, o conjunto:

$$I_n = \{p \in \mathbb{N} | \ 1 \leq p \leq n\} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção.

$$\varphi: I_n \rightarrow X$$

No primeiro caso, o conjunto X possui zero elemento, já no segundo caso X possuirá *n* elementos, como é possível contar pela bijeção posta. Intuitivamente podemos dizer que, se é possível efetuar uma contagem dos elementos de um conjunto, então ele é finito.

Um conjunto é dito *enumerável* se ele é finito ou se é possível estabelecer uma bijeção do tipo

$$\psi: \mathbb{N} \to X$$

Nesse caso dizemos que o conjunto *X* é *infinito enumerável*.

Porém nem sempre é possível estabelecer tal bijeção, de modo que, no processo de desenvolvimento da formalização dos números reais a partir da Teoria dos Conjuntos, Cantor chegou a afirmar que existem diferentes tipos de infinito e, para classificá-los, lançou mão de um recurso chamado *cardinalidade.* Esse conceito pode ser compreendido intuitivamente como sendo a quantidade de elementos de um determinado conjunto.

Com base na cardinalidade de um conjunto é possível classificá-lo da seguinte maneira: se dizemos que um conjunto é finito, então ele possui a cardinalidade menor que a cardinalidade dos números naturais; e, se ele é infinito enumerável, então ele possui a mesma cardinalidade dos números naturais; porém, se a cardinalidade de um conjunto for maior que a dos números naturais, então ele será dito *infinito não enumerável.*

O principal conjunto infinito não enumerável é o conjunto dos números reais; porém, a teoria dos conjuntos transfinitos de Cantor possui outros interesses além desse conjunto específico. Não sendo nossa questão central aqui trabalhar com conjuntos transfinitos, mas evidenciar as concepções de continuidade que repousam na Matemática, nós continuaremos focados nos números reais e nas funções de variável real, bem como nos conceitos de limites e continuidade que são atribuídos ao conjunto dos números reais.

3.3 Conjunto dos Números Reais

Conforme já mencionado nesta seção, a consistência da Matemática nos dias atuais depende em grande parte da consistência dos números reais. Esse fato fez com que muitos matemáticos buscassem bases sólidas para a caracterização desses números. Em Lopes (2006) encontramos uma apresentação detalhada de diferentes caminhos que levam à construção formal dos números reais como, por exemplo, a construção por *cortes*, via *classes de equivalência*, ou ainda por *intervalos.* Destacamos que existem mais de uma demonstração para cada caminho apresentado, de forma que se configuram, também, como alternativas possíveis de construção.

Entretanto, concordamos com Lima (2002) que existem duas maneiras *mais populares* de se realizar a passagem crucial que nos leva dos números racionais aos números reais. Ou seja, existem dois processos mais difundidos no meio acadêmico para que seja estendido o conceito de número racional a fim de se obter os números reais, o método dos *Cortes de Dedekind* e o método das *Sequências de Cauchy*.

3.3.1 Cortes de Dedekind

A construção dos números reais via cortes de Dedekind se tornou uma construção padrão e comumente é encontrada em livros de Análise Matemática. Foi no ano de 1872 que Dedekind publicou, pela primeira vez, o seu trabalho sobre *números reais*, que foi traduzido, reeditado e pode ser conferido em Dedekind (2007). Lopes (2006, p. 21) destaca que nessa obra, não é possível encontrar a enunciação dos teoremas, definições e propriedades com as quais os alunos de Análise estão acostumados e que são comuns em livros sobre o assunto. Essa autora apresenta uma discussão sobre o trabalho de Dedekind com desdobramentos matemáticos modernos. Nesse trabalho é possível compreender que Dedekind toma três propriedades sobre números racionais e as suas correspondentes propriedades para pontos numa linha reta a fim de conseguir superar a incompletude dos números racionais.

Para tanto, Dedekind toma dois números racionais e estabelece as relações de ordem entre eles. Desse modo, ao considerarmos a, b dois números racionais e a relação de ser maior (>), ou ser menor (<), como bem definida, é possível estabelecer as seguintes propriedades:

Propriedade1 (sobre Números)

> (I). If a > b, and b > c, then a > c. Whenever a, c are two different (or unequal) numbers, and b is greater than the one and less than the other, we shall, without hesitation because of the suggestion of geometric ideas, express this briefly by saying: b lies between the two numbers a, c.
>
> (II). If a, c are two different numbers, there are infinitely many different numbers lying between a, c.
>
> (III). If a is any definite number, then all numbers of the system R fall into two classes, A1 and A2, each of which contains infinitely many individuals; the first class A1 comprises all numbers a1 that are < a, the second class A2 comprises all numbers a2 that are > a; the number a itself may be assigned at pleasure to the first or second class, being respectively the greatest number

> of the first class or the least of the second. In every case the separation of the system Rinto the two classes A1, A2 is such that every number of the first class A1 is less than every number of the second class A2.(DEDEKIND, 2007, p. 3)[44].

De modo análogo, tomando dois pontos p, q sobre uma linha reta L, e a relação de estar à direita, ou à esquerda, como bem definida, seguem as propriedades que podem ser estabelecidas:

Propriedade 2 (Sobre pontos)

> (I). If p lies to the right of q, and q to the right of r, then p lies to the right of r; and we say that q lies between the points p and r.
>
> (II). If p, r are two different points, then there always exist infinitely many points that lie between p and r.
>
> (III). If p is a definite point in L, then all points in L fall into two classes, P1, P2, each of which contains infinitely many individuals; the first class P1 contains all the points p1, that lie to the left of p, and the second class P2 contains all the points p2 that lie to the right of p; the point p itself may be assigned at pleasure to the first or second class. In every case the separation of the straight line L into the two classes or portions P1, P2, is of such a character that every point of the first class P1 lies to the left of every point of the second class P2.(DEDEKIND, 2007, pp. 3-4)[45]

---

[44] (I) Se $a > b$, e $b > c$ então $a > c$. Sempre que a, c são dois números diferentes (ou desiguais), e b é maior do que um, e menor do que o outro iremos, sem hesitação, devido à sugestão das ideias geométricas, expressar brevemente este aspecto afirmando: b está entre os dois números a, c.

(II) Se a, c são dois números diferentes, existem infinitos números diferentes entre a, c.

(III) Se a é um número qualquer, então todos os números do sistema Q caem em duas classes, A1 e A2, cada uma delas contendo infinitos elementos; a primeira classe A1 compreende todos os números a_1 que são menores que a, a segunda classe A2 compreende todos os números a_2 que são maiores que a; o próprio número a poderá pertencer à primeira ou à segunda classe, sendo respectivamente o maior número da primeira classe ou o menor número da segunda. Em qualquer um dos casos a separação do sistema Q nas duas classes A1, A2 é tal que todo o número da primeira classe A1 é menor do que todo o número da segunda classe A2.

[45] (I) Se p está situado à direita de q, e q à direita de r, então p está à direita de r; e dizemos que q está situado entre os pontos p e r.

(II) Se p, r são dois pontos distintos, então existe uma infinidade de pontos situados entre p e r.

(III) Se p é um ponto definido em L, então todos os pontos em L pertencem a duas classes, P1, P2 cada qual contendo infinitos elementos; a primeira classe P1 contém todos os pontos p_1, que estão à esquerda de p, e a segunda classe P2 contém todos os pontos p_2, que estão à direita de p; o próprio ponto p poderá pertencer à primeira ou à segunda classe. Em qualquer um dos casos a separação da linha reta L nas duas classes ou porções P1, P2 é tal que todo o ponto da primeira classe P1 está à esquerda de todo o ponto da segunda classe P2.

Lopes (2006, p. 22) afirma que “é a partir dessa correspondência que Dedekind reflecte sobre a incompletude do Conjunto dos Números Racionais, ampliando este conjunto com a criação de novos números com o objectivo de que este adquira a mesma completude que uma linha”.

A construção realizada consiste em mostrar que nem todos os cortes são produzidos por números racionais e, portanto, é necessária a ampliação do conceito de número e a posterior criação dos números reais. Atualmente encontramos essa construção tendo início a partir dos números naturais e dos axiomas de Peano. Esse recurso didático é, segundo Lopes (2006), apresentado pela primeira vez por Landau (1951) no livro *Fundations of Analysis*.

Estudamos a produção de Dedekind (2007) e de Lopes (2006), visando compreender o rigor e os procedimentos algébricos empregados no processo de construção dos números reais via cortes de Dedekind. Desse estudo, não apresentado aqui dado o tema desta tese, articulamos uma sistematização dos procedimentos seguidos por Dedekind, cujos aspectos centrais apresentamos a seguir:

1. Mostrar que existe uma relação entre os números racionais e os pontos de uma linha reta;
2. Com base no princípio da incomensurabilidade provar que uma linha reta é infinitamente mais rica em pontos que o conjunto dos racionais em números;
3. Considerar que a continuidade de uma reta é *quebrada* por apenas um ponto;
4. Definir *corte* como sendo o ponto/número que provoca a divisão de algo contínuo em duas partes disjuntas;
5. Definir número irracional como o corte que não é feito por um número racional;
6. Provar que existe uma ordenação nos números reais;
7. Definir a operação de soma entre cortes.

Dessa maneira, os *números reais* ficam construídos de forma a serem conjuntos de *números racionais,* os quais possuem a propriedade da continuidade entendida como uma linha reta e que respeitam o princípio da boa ordenação e das operações aritméticas. Dedekind estende, portanto, a noção de número, valendo-se da ideia de continuidade da reta.

3.3.2 Sequências de Cauchy

Cantor assumiu um procedimento diferente do de Dedekind em sua teoria para a construção dos números reais. Ele considerou o conjunto dos *números racionais* e o conceito de *sucessão fundamental,* a qual nós chamamos hoje em dia de *Sequência de Cauchy,* para estabelecer uma relação entre os números e a linha reta.

Uma sequência, ou sucessão, fundamental pode ser definida como:

Definição: Diz-se que uma sequência $\{r_n\}$ é uma sequência de Cauchy, ou uma sequência normal, ou uma sequência fundamental, o que se denota simbolicamente como $\mathcal{C}\{r_n\}$, quando essa sequência satisfaz a condição, chamada de Cauchy:

$$\mathcal{C}\{r_n\} \Leftrightarrow (\forall\delta > 0\ \exists N \mid \forall n > N, \forall p > 0 \Longrightarrow r_n - \delta < r_{n+p} < r_n + \delta$$

Isso significa que para todo número racional positivo δ, existe uma ordem N, tal que todos os elementos r_{n+p} de ordem superior a um elemento r_n, de ordem $n > N$, se encontram na vizinhança[46] racional $(r_n - \delta, r_n + \delta)$ de r_n.

Enquanto para Cauchy toda a sequência que gozava dessa propriedade convergia para um único número real, Cantor afirmava que assumir a existência desse número real era um erro lógico por parte dos matemáticos. Podemos compreender junto a Lopes (2006) que o erro citado repousa na existência *a priori* dos números. Se considerarmos que os Números Reais ainda não estavam definidos, então a compreensão da convergência de todas as séries é intuitiva, não podendo ser, à época, válida.

Mas foi essa possibilidade de existência de um número para o qual as sequências podem convergir que possibilitou a construção dos números reais para Cantor. Ao provar que toda sequência fundamental era convergente, pelo princípio de convergência de Cauchy e ao considerar que existem sequências que não convergem para números racionais, Cantor sente ser preciso definir os números reais e o faz se valendo do artifício das classes de equivalência.

Do mesmo modo pelo qual procedemos com o trabalho de Dedekind e Lopes, estudamos o apresentado por Lima (2002) e Lopes (2006) sobre o processo desenvolvido por Cantor, visando compreender o rigor e os procedimentos algébricos nele presentes. Também compreendemos não ser nuclear para este trabalho expor essa construção detalhadamente.

---

[46] O conceito de *vizinhança* pode ser compreendido como o intervalo aberto que possui um dado elemento central a e uma amplitude definida. Representamos esse intervalo de três formas equivalentes.

$|x - a| < \varepsilon$, ou $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, ou ainda $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Nossos estudos nos permitiram articular uma sistematização dos procedimentos seguidos por Cantor. Entendemos que estão no cerne esses procedimentos:

1. Provar que uma sequência que goza da condição de Cauchy é convergente;
2. Provar que existem sequências de Cauchy que convergem para números não racionais;
3. Estabelecer uma relação de equivalência entre sequências de Cauchy que convergem para um mesmo número;
4. Definir o conjunto dos números reais como o conjunto das classes de equivalência de sequências de Cauchy;
5. Estabelecer a relação de ordem para as sequências de Cauchy e a operação de soma e produto entre classes de equivalência;
6. Definir, usando o conceito de ponto de acumulação, uma relação entre os números reais e os pontos de uma linha reta.

Diferente da teoria apresentada por Dedekind em que o número é um corte, que separa um contínuo em duas partes, a construção realizada por Cantor toma os *números reais* como uma classe de equivalência das sequências fundamentais. Ambas as concepções conferem aos *números reais* estreita conexão com uma reta geométrica, o que garante a esse conjunto uma propriedade de ser contínuo.

Embora essas duas concepções se diferenciem epistemologicamente quanto à estrutura de número, matemáticos modernos trabalharam junto a Lógica para identificar diferentes construções dos números reais como isomorfismos de corpos, o que será apresentado a seguir.

3.3.3 $\mathbb{R}$ como um corpo completo ordenado

Em Matemática definimos uma estrutura algébrica chamada *Corpo* com a qual são estruturados os fundamentos da Análise Matemática. Essa estrutura é conveniente para possíveis generalizações de muitos sistemas. Sendo assim, sempre que encontrássemos uma espécie de bijeção, chamada *isomorfismo*, entre um conjunto de interesse e um corpo estruturado não precisaríamos demonstrar todas as propriedades novamente. Tal recurso possui uma força que dá à Matemática uma estrutura e confiabilidade lógica nunca antes vista em sua história.

Com base no exposto em Lima (2002), podemos definir corpo como segue.

Um corpo é um conjunto K, munido de duas operações chamadas *Adição e Multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas *axiomas de corpo.* E é representado por $(K, +, *)$.

Os axiomas de corpo garantem: que são válidas as propriedades associativas e comutativas entre os elementos e as operações estabelecidas; a existência e unicidade de elemento neutro e elemento inverso para cada uma das operações; a relação distributiva que associa as duas operações que compõem o corpo.

Se em um corpo conseguimos criar três subconjuntos $P, N\ e\ \{0\} \subset K$ disjuntos entre si, nos quais todos os elementos de *P* são positivos, e todas as operações realizadas sobre os elementos do conjunto *P* também pertencem ao conjunto *P*, e de maneira análoga, o conjunto *N* tem seus elementos negativos, e todas as operações sobre os elementos de *N* estão contidas em *N,* então o corpo é dito *Ordenado.*

Outra característica de um corpo é a completude: ele pode ser completo e pode ser não completo. Dizemos que um corpo é *completo* quando, para todo subconjunto de um corpo *K*, limitado inferior ou superiormente, existe um elemento chamado *ínfimo* ou *supremo* desse conjunto respectivamente, pertencente a *K*. Essa propriedade garante que não há “buracos” no corpo, o que o permite ser chamado de completo.

Os livros de Análise Matemática, de modo geral, mais notadamente Lima (2002), trazem como pressuposto que o conjunto dos números reais é um *Corpo Ordenado Completo* e, dessa forma, os números reais possuem todas as propriedades que lhes garantem ser sólidos para a sustentação da Matemática como enunciamos no início desta seção.

Entretanto, devemos atentar para o aspecto de as duas construções de *números reais* que apresentamos assumirem conceitos epistemologicamente distintos para falar de números. Essa diferença nos coloca em posição de expor uma *quaestio* sobre os desdobramentos que essa diferença pode acarretar.

Lima (2002, p. 48) cita Spivak dizendo: “é inteiramente irrelevante que um número real seja, por acaso, uma coleção de números racionais: [...], Demonstrações aceitáveis deveriam usar apenas o fato de que os números reais formam um corpo ordenado completo” (SPIVAK, p. 511 apud LIMA, 2002, p. 48) e acrescenta:

> Se construímos os números reais por meio de cortes de Dedekind, obtemos um corpo ordenado completo cujos elementos são coleções de números racionais. Se usar o processo de Cantor, o corpo ordenado completo que optemos é formado por classes de equivalência de sequências de Cauchy. São, portanto, dois corpos ordenados completos diferentes um do outro. O ponto fundamental é que eles diferem apenas pela natureza dos seus

> elementos, mas não pela maneira como esses elementos se comportam. (LIMA, 2002, p. 48).

O formalismo matemático provou a unicidade dos corpos ordenados completos, ou seja, não existem dois corpos ordenados completos que não possuam um isomorfismo que os associe. Encontramos em Lima (2006) a demonstração de que as duas construções que apresentamos formam um corpo completo e a demonstração de como é possível estabelecer o isomorfismo entre eles.

Portanto, ao se assumir essa concepção de Análise, as diferenças entre as naturezas dos números mostram-se irrelevantes para a estruturação da Matemática. Entretanto, encontramos em Weyl (1994) uma crítica, baseada nos *números reais*, à estrutura da Análise Matemática. Essa crítica não se apresenta sozinha, uma vez que também encontramos no meio acadêmico outras perspectivas de estruturação da Matemática. Para esse conjunto de perspectivas é atribuído o nome de *Análise Não-Standard.*

3.4 Análise Matemática por elementos de Cauchy-Weierstrass

O processo de formalização que discutimos acima permitiu à Análise ser estruturada de forma a apresentar as teorias dos limites, da diferenciação e da integração de forma concisa e rigorosa. Apresentamos aqui o desenvolvimento realizado por Cauchy e Weierstrass e que é trazido na maior parte dos livros de Análise Real da atualidade.

Cauchy construiu os números reais como classe de equivalência de sequências convergentes. Desse modo, sua proposta para a Análise se vale das sequências para a definição de limite e continuidade de funções.

3.4.1 Limites

Intuitivamente podemos dizer que se um número real a é limite de uma sequência (x_n), então a partir de um determinado índice, os valores dos termos da sequência se aproximam e se mantém próximos ao valor de a. A proposta de Cauchy é que um limite pode ser definido a partir de um *valor de erro,* ou seja, um número positivo $\varepsilon > 0$.

Desse modo, temos que para todos os termos de uma sequência, a partir de certo ponto, a diferença entre o valor de um termo da sequência e o seu limite real a é inferior ao erro estipulado ε. Matematicamente, dizemos que o $lim\, x_n = a$ se,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Os aparatos matemáticos usados para essa definição permitem compreender que há uma dinâmica de *cerceamento do limite.* Lima (2002) se vale de uma alusão sobre uma competição para dizer que, enquanto um competidor fornece valores de erro ε cada vez menores, o outro é levado a indicar um índice cada vez maior para que a diferença entre os elementos seja satisfeita.

Os estudos desenvolvidos por Cauchy não se baseavam numa definição rigorosa de Números Reais, de modo que a possibilidade de se apresentar um valor ε sempre menor era intuitiva. Contudo, hoje podemos nos valer das contribuições de Cantor e Dedekind, para verificar a existência desse valor, uma vez que associamos os números a uma ideia geométrica de linha.

Embora possamos ver historicamente que houve um avanço nas possibilidades de compreensão e no rigor empregado para discutir as estruturas das figuras geométricas, que culminou no estabelecimento da Topologia como ramo oficial da Matemática, a linguagem geométrica e nossas experiências vivenciadas estão na gênese da constituição dos entes geométricos, de que lançamos mão no processo de produção do conhecimento matemático.

Como dito por Longo (1999), e apresentado na seção anterior o processo que permite estruturar um conceito de forma rigorosa inicia-se por nossas compreensões intuitivas da estrutura em questão. De modo similar, Lima (2002) afirma que é usual no estudo de estruturas da Análise nos valer de linguagem geométrica para representar entes algébricos, como, por exemplo, podemos dizer *a* R*eta Real* nos referindo ao *Corpo Completo Ordenado* $\mathbb{R}$, ou diremos *ponto* em vez de *Número Real,* um *intervalo fechado* $[a, b]$ pode ser visto como um *Segmento de Reta.*

> Assim procedendo, estaremos atribuindo um conteúdo intuitivo aos conceitos formais introduzidos pela axiomática dos números reais. Esta atitude, quando olhada sob o ponto de vista estritamente matemático, é inofensiva: trata-se apenas de utilizar sinônimos geométricos para nomes aritméticos. Do ponto de vista de estilo, ela é conveniente, pois permite evitar repetições deselegantes, tornando a leitura mais agradável. Finalmente, do ponto de vista educativo, ela é valiosa porque possibilita "enxergar" os conceitos e, muitas vezes, prever os resultados (ou pelo menos torna-los aceitáveis) graças à imagem experimental que possuímos de uma reta como um contínuo de pontos alinhados, sem lacunas, sem princípio e sem fim. (LIMA, 2002, p. 127-128).

Contudo, do ponto de vista filosófico, esse procedimento demarca uma mudança de paradigma que deve ser tematizado para que seja possível uma compreensão rigorosa dos objetos envolvidos. Mantemo-nos em nosso caminho até aqui percorrido, visando elucidar pontos referentes à nossa *quaestio*. Nossa intenção é apresentar nossas compreensões sobre o tema de forma não ingênua, porém, assumindo uma postura filosófica frente ao ente *continuum,* visto sob a ótica da Ciência Matemática.

3.4.2 Continuidade

Vimos que a estrutura dada aos *Números Reais* por Dedekind e Cantor é baseada na continuidade de uma reta geométrica e na associação que é possível estabelecer entre os pontos geométricos e os números. As interpretações intuitivas levaram a ponderações sobre os pontos extremos do conceito de continuidade, ou seja, as variações mínimas que preservam sua estrutura. Dessa forma o conceito formal de *Limite* foi posto com base na preservação dessa característica. Assim, o desenvolvimento da Ciência Matemática possibilitou a estruturação da *Análise* com base no conceito de continuidade atribuído ao seu estruturante, a saber, os *Números Reais.*

O conceito de continuidade foi desenvolvido tendo como foco o estudo das *funções contínuas*. A área da Matemática que se dedica ao estudo de suas características, métodos e aplicações mais genéricas é a *Topologia*, que estuda a continuidade de estruturas de várias dimensões. Contudo, buscamos compreensões sobre a continuidade numa perspectiva computacional, de modo que restringiremos nossa investigação para o estudo específico de funções reais contínuas no campo da Análise, ao qual exporemos a seguir.

Com base na construção dos *Números Reais* de Dedekind, e nos conceitos de *convergência* e *limites* propostos por Cauchy e Weierstrass podemos definir uma *Função Contínua* como uma relação de existência de elementos dentro de vizinhanças estabelecidas, tanto no conjunto do domínio quanto no conjunto do contradomínio da função.

Em termos matemáticos definimos como segue:

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ diz-se contínua no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a. Simbolicamente temos que, para uma função ser contínua, a seguinte relação deve ser verdadeira:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall\, x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Podemos entender que uma função é dita contínua no ponto a quando para todo valor ε positivo, arbitrariamente escolhido, é possível definir um valor δ também positivo que forma uma vizinhança desse ponto a tal que para todo ponto dessa vizinhança há uma imagem próxima o suficiente da imagem *f(a)*.

A definição formal que apresentamos repousa sobre a continuidade da função em um ponto. Desse modo, só faz sentido indagar sobre a continuidade da função em um ponto do seu domínio, e assim precisamos tematizar o que acontece se no domínio da função há pontos Isolados ou de Acumulação.

Dizemos que um ponto de um conjunto é isolado se ele for o único ponto do conjunto em uma vizinhança. Ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que x é o único ponto de X no intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X$. Por outro lado, dizemos que um ponto x é de acumulação em X, se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe y pertencente à vizinhança $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X, com\ x \neq y$.

Encontramos em Lima (2002) uma discussão realizada sobre a continuidade de uma função nos casos dos pontos isolados e de acumulação. Segundo ao autor

> Se a é um ponto isolado de X então *toda* função $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a. (Dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \cap X = \{a\}$. Então $|x-a| < \delta$ com $x \in X$ implica que $x = a$ e, portanto$|f(x) - f(a)| = 0 < \varepsilon$). Em particular, se todos os pontos de X são isolados qualquer função $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua.
>
> Se agora $a \in X$ é um ponto de acumulação de X. Então $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto a se, e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Isso reduz essencialmente a noção de função contínua à de limite. (LIMA, 2002, p. 175).

Com esse autor entendemos a força da definição proposta por Cauchy-Weierstrass. Uma vez que a definição de continuidade está posta sobre a vizinhança de um ponto, podemos mesmo em um ponto isolado, concluir que a função é contínua. Esse fato, embora não seja intuitivo, é deduzível como foi mostrado pelas palavras de Lima (2002) citadas acima.

Entendemos que a proposta apresentada por Cauchy-Weierstrass apresenta recursos algébricos que lhe atribui um nível de rigor que não se tinha visto até o momento. As ideias intuitivas com as quais Newton e Leibniz pensaram o *movimento* e o *continuum* já foram deixadas para trás, e a Análise Matemática foi formalizada por uma linguagem lógica coerente.

Segundo Cabral e Baldino (2006) “No movimento conhecido como aritmetização da análise, no qual foi gerada a teoria de Weierstrass, o contínuo foi depurado de todo raciocínio sobre infinitésimos; apenas números reais foram admitidos como legítimos”. Para esses autores o processo histórico que descrevemos acima como Aritmetização da Análise, conduziu a Ciência Matemática para longe da compreensão intuitiva de conceitos e a aproximou de uma busca por certezas que não abram espaços para paradoxos.

Contudo, para a compreensão dos conceitos fundamentais da Análise, nossa linguagem recorre a experiências sensoriais com as quais temos vivência, por exemplo, para explicar o conceito de limite nos valemos de "expressões 'tender a zero', 'estar se aproximando de zero', 'x tende a *a'* ou 'x está tão próximo de a quanto se queira' [...] essas expressões da ordem do intuitivo revigoram a ideia da existência de uma quantidade muito pequena que antecede a noção de limite: o infinitésimo" (BALDINO, CABRAL, 2006, p. 5).

Apresentaremos agora nosso estudo sobre os fundamentos da Análise quando assumimos o conceito de *infinitésimos* como legítimo.

3.5 Análise Matemática por elementos infinitesimais

A proposta trazida por Cauchy-Weierstrass é um recurso matemático poderoso que permitiu estruturar a teoria da Análise por meio do conceito de *Número Real*. Contudo, podemos recorrer a outro tipo de ferramenta para a consolidação da Análise. Em Caraça (1998) [47] encontramos uma teorização sobre os fundamentos da Matemática que abarcam os conceitos da Análise Matemática do ponto de vista dos *Infinitésimos*.

Tendo como ponto de partida a busca por descrever a continuidade do movimento por meio de uma teoria quantitativa, Caraça (1998, p. 219) apresenta o conceito de *infinitésimo* como segue.

> Dá-se o nome de infinitésimo a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ tais que $|x_n| < \delta$ para todos os valores de $n > n_1$ e todo $\delta > 0$.

Precisamos explicitar alguns conceitos para compreendermos melhor a definição apresentada.

[47]Estamos nos referindo à edição de 1998 do livro publicado em 1951, intitulado Conceitos Fundamentais da Matemática, que apresenta as três partes de seu trabalho (Números, Funções e Continuidade) compilados em um único exemplar. A parte I dos estudos desenvolvidos por Bento de Jesus Caraça (1901 – 1948) foi publicada pela primeira vez em 1941. A parte II teve sua primeira edição em 1942. Mas a compilação de seus estudos sobre os fundamentos da matemática só ocorreu postumamente, havendo ainda a inclusão do estudo sobre continuidade. Esse trabalho final, ao qual recorremos em nossa tese foi publicado pela primeira vez em dezembro de 1951.

Chamamos de *contorno* do ponto P, qualquer segmento $\overline{AB}$ do eixo Ox que possua P como ponto médio. O segmento $\overline{AP} = p$ é chamado de amplitude do contorno. E definimos *vizinhança* como sendo o conjunto de todos os contornos de um ponto P.

Dizer que uma variável X é *infinitésima* significa dizer que há uma sucessão de valores em seu domínio que determinam contornos menores que um valor estipulado, ou seja, dizer que uma variável é infinitésima implica em considerar todos os valores de sua vizinhança que tenham amplitude menor que δ. Matematicamente é válida a propriedade $n_1 > n \rightarrow |x_n| < \delta$.

O estudo proposto em Caraça (1998) nos lança ao encontro de ideias distintas, numa dimensão filosófica, mas igualmente significativas para a estruturação da Análise Matemática, das apresentadas por Cauchy-Weierstrass. Destacadamente, citamos "um infinitésimo não é um número, é uma variável. A falta de compreensão deste fato foi origem por muito tempo de enormes discussões e muita confusão". (CARAÇA, 1998, p. 220).

Entendemos com esse autor que o emprego do conceito de infinitésimo no estudo matemático significa nos valermos da infinidade de pontos pertencentes a uma determinada vizinhança. Ou seja, significa lançar mão de uma interdependência de um ponto com seus vizinhos[48].

3.5.1 Análise infinitesimal

Para Caraça (1998) o desenvolvimento da teoria dos Limites e suas aplicações permitiram aos matemáticos modernos superar problemas postos pelos gregos com relação à continuidade. Entre outros fatos, o autor afirma que para os gregos "a grandeza geométrica é contínua, e os números são, por sua essência, descontínuos – donde resulta a impossibilidade de criar uma teoria quantitativa da continuidade" (CARAÇA, 1998, p. 289). Com base nessa afirmação, ele se vale da teoria dos limites para construir uma argumentação em termos lógicos de conceitos matemáticos que podem ser vistos como uma teoria quantitativa da continuidade.

O objetivo da discussão encontrada em Caraça (1998) é estabelecer uma fundamentação matemática para a *continuidade de funções reais*. Entendemos que esse objetivo não difere daquele posto nos trabalhos de Cauchy-Weierstrass, para a fundamentação

[48] O conceito de vizinho aqui é mais amplo que a linguagem corrente. Dizemos que a vizinhança não é um segmento, mas sim uma variável cujo domínio é constituído por uma infinidade de segmentos onde há sempre segmentos de amplitude inferior a qualquer número positivo. Assim, pontos vizinhos são infinitamente próximos, mas que não são o mesmo ponto.

da *Análise*, embora suas argumentações estejam postas sobre elementos essencialmente distintos.

Buscando estudar o comportamento das funções, Caraça (1998) afirma que há dois casos possíveis. Para esse autor é necessário estudar o comportamento das funções, ora na vizinhança de um ponto finito, ora na vizinhança de um ponto infinito. O estudo proposto toma como base o conceito de infinitésimo, e para cada um dos casos é definido como uma entidade chamada *infinitésimo principal.*

> O infinitésimo$x - a$ – *vizinho de zero* quando *x* é vizinho de a – nas suas funções de instrumento que irá permitir o estudo do comportamento das funções *y(x)*, reais de variável real, na vizinhança de *a.* [...] Para o segundo caso serve a função $y = \frac{1}{x}$ [...] O infinitésimo $\frac{1}{x}$ – *vizinho de zero* quando *x* é vizinho de infinito – também recebe o nome de *infinitésimo principal* (CARAÇA, 1998, p. 290 – Grifo do autor).

Dizer que uma função *y(x)* é infinitésima com um dos infinitésimos principais significa que existe, em uma vizinhança, determinado comportamento da função, que faz com que ela se aproxime de zero se tomada junto ao infinitésimo.

Segundo Cabral e Baldino (2006), na década de 1960, foi apresentada, junto à comunidade científica, a *Análise Não-Standard*, a qual legitima o uso dos infinitésimos pela teoria de Weierstrass. Desse modo o *continuum* da reta real, passa ser constituído por números reais observáveis, números infinitésimos e números infinitamente grandes.

> Cada número real fica cercado de seus acréscimos infinitesimais, constituindo o que, em homenagem a Leibniz, denomina-se “mônadas”. Cada mônada é uma reprodução do contínuo todo, como em um fractal. Diremos que a reta real é um “contínuo magro” e que esses números chamados hiper-reais constituem um “contínuo espesso”. (CABRAL, BALDINO, 2006, p. 7).

3.5.2 Limites

O conceito de limite de uma função real *y(x)*, a qual está definida em um intervalo que contenha o ponto *a*, pode ser definido, via infinitesimais como segue:

> Diz-se que *y(x)* tem por limite o número *L* quando *x* tende para *a*, ou que *y(x)* tende para *L* quando *x* tende para *a* e escreve-se:
>
> $$\lim_{x \to a} y(x) = L$$

> Quando a diferença *y(x) – L* é infinitésima com *x – a.* (CARAÇA, 1998, p. 295).

A definição que apresentamos implica em dizer que se tomarmos um conjunto de pontos *x* vizinhos de *a*, então os valores assumidos na função *y(x)* são vizinhos do valor limite *L*. Assim estamos observando que há uma interdependência na vizinhança do ponto *a*, embora nada seja dito pelo valor da função no ponto *a.* Caraça (1998) nos alerta para o fato de que quando tomamos a noção de infinitésimos para o estudo da Matemática, o conceito de limite de uma função não depende do valor da função num ponto, mas sim do *conjunto de valores* da função no ponto.

> Pode muito bem acontecer que o $\lim_{x\to a} y(x)$seja diferente de *y(a);* quando tal se dá, isso quer dizer que o *estado* da função no ponto não coincide com o resultado da interdependência do conjunto de possibilidades de comportamento da vizinha no ponto. Isto tem uma enorme importância, no problema da continuidade. (CARAÇA, 1998, p. 296).

Entendemos com esse autor que o conceito de limite que se vale dos infinitésimos é filosoficamente distinto daquele apresentado na teoria advinda do trabalho de Weierstrass. Pode-se dizer que não se trata de um *cerceamento* de valores, mas de uma relação de comportamento entre os elementos de um conjunto. Dizer que um número *y(x)* é vizinho de *L* nos diz que há uma variação infinitésima entre os valores, ou seja, podemos dizer que *y(x)* é equivalente a *L* sem ser, necessariamente¸ *L.*

3.5.3 Continuidade

A definição formal de continuidade trazida por Caraça (1998) é próxima à definição usual de continuidade trazida nos livros de Análise Matemática. Após apresentá-la de maneira descritiva, articularemos nossas compreensões sobre os desdobramentos dessa definição dando prosseguimento a nossa *disputāta*.

Seja *y(x)* uma função real. Define-se:

> *Definição I* – diz-se que *y(x)* é contínua no ponto *a* do seu domínio quando forem nesse ponto, satisfeitas as seguintes condições:
> Existe e é finito o valor da função no ponto *a*;
> Existe e é finito o limite da função no ponto *a*;
> Esse limite é igual ao valor da função no ponto *a*;
>
> $$\lim_{x\to a} y(x) = y(a)\,, finito.$$

> *<u>Definição II</u>* - Todas as vezes que não forem verificadas simultaneamente as condições da definição I, a função diz-se descontínua no ponto *a*; diz-se ainda que o ponto a é para ela um ponto de descontinuidade. (CARAÇA, 1998, pp. 302-303)

Se considerarmos a noção de limite posta acima compreendemos que uma função é contínua em um ponto quando o seu valor nesse ponto for finito e coincidente com a relação de interdependência do seu comportamento na vizinhança do ponto. Vimos que o valor da função em um ponto específico não depende de sua vizinhança, contudo para a continuidade existir é uma condição necessária e suficiente que haja a regularidade entre a vizinhança e ponto estudado.

Na perspectiva do trabalho realizado com os infinitésimos, assumir que uma função é contínua é dizer que se considerarmos *x* vizinho do ponto *a*, então:

$$\lim_{x \to a} y(x) = y(a)$$

O que mostra que *y(x)* é vizinho de *y(a).* Essa condição implica na existência de uma diferença infinitesimal entre *y(x)* e *y(a).* Vejamos como:

Tomemos um ponto *x* distinto de *a*. Podemos dizer que

$$x = a + h$$

A esse valor *h* daremos o nome de *incremento da variável x.* Como a variável *x* é vizinha de *a*, então é evidente, pelo conceito de vizinhança que estamos utilizando, que *h* é vizinho de zero. Desse modo podemos assumir que

$$\lim_{h \to 0} y(a+h) = y(a) \;\; ou \;\; \lim_{h \to 0} y(a+h) - y(a) = 0$$

Usualmente a diferença $y(a+h) - y(a)$ é chamada de *incremento da função* no ponto *a* e é representada por $\Delta y(a) = y(a+h) - y(a)$.

O incremento da função$\left(\Delta y(a)\right)$ é, portanto, resultado do incremento (h) dado a variável *x*.

Devemos nos atentar para o seguinte encadeamento: $y(a+h)$ é vizinho de $y(a)$ implica que o incremento $\Delta y(a)$ é um infinitésimo com *h*, passível de ser compreendido com Caraça (1998, p. 304) que afirma que "se a função real *y(x)* é contínua no ponto *a*, a um incremento infinitésimo de *h* da variável independente, nesse ponto corresponde para a função um incremento $\Delta y(a)$ infinitésimo com *h".*

De maneira sintática elencamos os aspectos relevantes da construção efetuada neste item: tomar os conceitos de infinitésimos para definir limites; assumir a teoria apresentada de limites para estabelecer critérios de continuidade; e obter uma relação entre a variação infinitesimal das variáveis dependente e independentes. Essa construção permite-nos articular nossa compreensão intuitiva de continuidade, mantendo o rigor matemático necessário para a Ciência Ocidental.

A perspectiva que aqui apresentamos mostra a continuidade como uma relação de interpendência de valores de uma função. Entendemos por meio da discussão apresentada em Caraça (1998) que a regularidade que é atribuída a uma função pela continuidade nos permite dizer que a variação de uma *função contínua* é dada em termos de “graus insensíveis” (CARAÇA, 1998, p. 305).

3.6 *Quaestio disputata*: um panorama do exposto

Esta seção foi dedicada à compreensão do contínuo em sua dimensão matemática. Para isso percorremos o processo histórico da Aritmetização da Análise e apresentamos duas perspectivas distintas de continuidade.

Historicamente foi possível ver que a busca pela formalização da Análise Matemática solicitou a construção dos Números Reais de forma a evitar ambiguidades e conceitos apenas válidos intuitivamente. O desenvolvimento matemático oriundo desse processo foi apresentado trazendo duas construções distintas, *Cortes de Dedekind* e *Sequências de Cauchy*. Entendemos que as duas maneiras são aceitas pela comunidade matemática, mas que existe uma diferença epistemológica entre elas. Enquanto a perspectiva de Dedekind associa os números a fisicalidade da reta geométrica, a perspectiva de Cauchy permite construir os Números Reais como convergência de elementos de um conjunto.

A Lógica estabeleceu o isomorfismo entre as construções, ou seja, ela permitiu afirmar que ambas dizem do mesmo objeto, sendo assim, independente da técnica que se escolha adotar, o resultado da construção é o mesmo conjunto numérico. Essa perspectiva é corroborada por Lima (2002) ao afirmar que a utilização de recursos geométricos para dizer de entes algébricos é *inofensiva*. Contudo, essa afirmação nos causa um estranhamento quando pensamos no trabalho realizado junto ao computador. Tematizaremos a relação entre a fisicalidade geométrica e a virtualidade computacional na próxima seção.

Tendo compreendido as diferentes perspectivas da construção dos números, foi possível olhar para a teoria matemática que formaliza a continuidade: a Análise Matemática.

Apresentamos as noções de Análise Real, estabelecida em termos de Cauchy-Weierstrass, e da Análise por infinitésimos. Para cada uma das diferentes abordagens de Análise Matemática pudemos compreender o sentido de continuidade. De modo direto, podemos dizer que para a Análise Real a continuidade é um jogo de cerceamento, no qual a existência de elementos nos conjuntos domínio e contradomínio irá dizer se a função é contínua. Por outro lado, para a perspectiva de Análise efetuada por elementos infinitesimais, a continuidade diz do comportamento da vizinhança da função, de modo que não se estabelece uma relação discreta entre elementos, mas sim com sua totalidade.

Na próxima seção buscaremos conhecer o funcionamento do computador e a teoria da computabilidade para poder articular o exposto a fim de compreender a presentificação do contínuo junto ao computador.

CAPÍTULO IV – Possibilidades computacionais e continuidade.

Nesta seção iremos discutir dois aspectos da presentificação do contínuo no desenvolvimento de técnicas computacionais e nos trabalhos que solicitam o uso do computador para serem desenvolvidos. Entendemos que um caminho nos leva a discutir uma parte *esquelética*, ou seja, da estrutura do computador. Nessa perspectiva buscaremos compreender os números como estruturas computacionais, chamadas de ponto flutuante, e as implicações operacionais de funções reais executadas pelo computador.

Outro caminho a ser percorrido busca compreensões numa dimensão de *interfaces*. Nesse percurso iremos discorrer sobre como esses números são executados computacionalmente. Visamos articular as nossas compreensões sobre o conceito de número com a noção de computabilidade.

4.1 Estruturas computacionais.

O computador é um dispositivo eletrônico desenvolvido para processar dados e realizar operações programáveis. Sua estrutura é baseada em circuitos e componentes que permitem a execução dessas operações de forma ordenada e sistematizada com alta velocidade, desde que tenham sido previamente programadas.

No século XVII Blaise Pascal desenvolveu a primeira calculadora mecânica e, a partir de então, temos presenciado a evolução desse tipo de máquina que veio se modificando, de modo a originar o modelo atual do computador. Um dos marcos históricos desse processo é o trabalho realizado por Charles Babbage, no século XIX. Outro, no século XX, a idealização de Alan Turing de uma máquina "apta a computar tudo o que fosse computável" (BATISTELA, BARBARIZ e LAZARI, 2016, p. 208).

Embora a compreensão do funcionamento de um computador abarque uma série de funcionalidades e de estruturas complexas que envolvem conhecimentos técnicos de eletrônica, lógica e mecânica, podemos afirmar que o computador opera segundo a lógica *booleana* e sua estrutura é fundamentada na aritmética binária. Nessa perspectiva é possível compreender que aquilo que é feito computacionalmente é operacionalizado de maneira binária, ou seja, passa por uma conversão que permite ser executável em um circuito elétrico em forma de *bits*.

Com o avanço da tecnologia, a distância física que separa o usuário e o processador do computador está cada vez menor, porém a quantidade de camadas de interface cresce.

O objetivo das interfaces que agem na relação computador-usuário é facilitar o acesso ao processamento e ampliar as possibilidades de uso. Contudo, elas também distraem o usuário fazendo com que o uso do computador seja mais intuitivo, o que esconde, por exemplo, toda a mecânica e elétrica, ou seja, o ferramental necessário para que um clique de botão possa comandar a operação desejada.

Em nossa pesquisa buscamos pelos modos que o *contínuo* se mostra ao se estar junto ao computador. Para isso iremos focar o desenvolvimento numérico que é passível de ser realizado computacionalmente. Nesse momento, nossa *lectio* solicita que nos debrucemos sobre o sentido e o significado[49] de número que é atualizado quando trabalhamos com o computador.

4.2 Números computacionais

O computador enquanto máquina operacional realiza cálculos nos mais diferentes níveis, desde aqueles elementares até os que solicitam horas de processamento de dados. Porém não importa a complexidade das operações, todas necessitam de uma estrutura de número que seja compatível com o processamento dos circuitos elétricos.

Segundo Knuth (1979) a História da Matemática apresenta diversos sistemas de numeração e cada um traz diferentes contribuições ao desenvolvimento da humanidade. Desse modo, também a escolha de um sistema numérico computacional traz desdobramentos para a compreensão de computação que para nós está avançando. Embora o sistema numérico com o qual se opera na civilização do mundo ocidental esteja baseado na aritmética decimal, sabe-se que desde os estudos de Leibniz sobre a base binária é possível operar-se com menos símbolos para a representação dos números. Isso é importante para o desenvolvimento computacional. Segundo essa autora:

> The first American high-speed computers, built in the early 194Os, used decimal arithmetic. But in 1946, an important memorandum by A. W. Burks, H. H. Goldstine, and J. von Neumann, in connection with the design of the first stored-program computers, gave detailed reasons for the decision to

[49] Kluth (2005, p. 48) ao referir-se à Derrida (1994, p. 27) afirma que a palavra significado, Bedeutung em alemão, e a palavra sentido, Sinn em alemão, são usadas por Husserl com distintas funções: uma se refere a linguagem e a outra aos objetos intuídos ou percebidos. Bedeutung é reservada ao conteúdo de sentido ideal da expressão verbal, do discurso falado, ao passo que o sentido (Sinn) cobre toda a esfera noemática até em sua camada não expressiva.

> make a radical departure from tradition and to use base-two notation.(KNUTH, 1979, p. 186)[50].

Desde então a base numérica adotada em todos os computadores é a *Base Binária*. Embora essa base traga toda uma estrutura matemática operacional definida, ainda precisamos esclarecer como os números racionais serão representados computacionalmente.

Em Knuth (1979) encontramos algumas maneiras de um número racional ser representado. Entre elas temos a técnica do *ponto fixo*, a técnica do *complemento para 2*[51] e a técnica do *ponto flutuante*. As técnicas de ponto fixo e complemento para 2, já foram utilizadas, porém atualmente a implementação de algoritmos acontece tendo como base a aritmética de ponto flutuante. Entendemos que esta precisa ser explicitada de modo mais claro para prosseguirmos com nossa *disputatĭo.*

4.2.1 Ponto flutuante

Os Números Racionais são compostos por duas partes, uma inteira e outra decimal. A separação entre essas duas partes acontece por um ponto[52] que chamamos *radix point* ou, em tradução livre, *ponto fracionário*. A técnica de ponto fixo estabelece que o separador esteja colocado sempre num mesmo *bit* de uma variável, por consequência a quantidade de algarismos decimais ou inteiros que um número pode ter é fixa. Porém, a técnica de ponto flutuante se caracteriza pelo dinamismo da posição desse ponto, ou seja, não é o número que flutua, porém, é o ponto que separa o inteiro dos decimais que pode mudar de posição.

Essa técnica é usada, por exemplo, na notação científica, a qual se caracteriza por um número pertencente ao intervalo aberto $(0,10)$ multiplicado por potência de dez. Desse modo o expoente da potência irá definir onde o separador será colocado. De maneira análoga definimos o número *x* em notação de ponto flutuante como:

---

[50] O primeiro computador americano de alta velocidade, construído no início da década de 1940, usou a aritmética decimal. Porém, em 1946 um documento importante de A. W. Burks, H. H. Goldstine, and J. von Neumann com um projeto dos computadores com programa de armazenamento forneceu razões detalhadas para a tomada de decisão para, de modo radical, partir-se da tradição em direção ao ao uso da notação de base binária. (KNUTH, 1979, p. 186).

[51] Em inglês o termo é *2-complement.*

[52] O sistema matemático adotado no Brasil separa as partes inteira e decimal de um número racional usando um símbolo de vírgula (,), por este motivo alguns autores defendem o uso da expressão *vírgula flutuante* como tradução do termo inglês *float point.* Neste texto adotaremos o termo ponto flutuante devido sua ampla divulgação na literatura computacional.

$$x = \pm d \times \beta^e$$

Onde,

d é a mantissa representada por algarismos da base escolhida;

β é a base numérica;

e é o expoente que indicará onde o separador está posicionado.

Dizemos que um ponto flutuante está normalizado quando o primeiro dígito da mantissa é diferente de zero ($d_1 \neq 0$). Apresentamos abaixo um exemplo de número em notação ponto flutuante de base decimal e outro de base binária.

$x = 5.132$ Número em notação decimal

$d = 0.5132$ Mantissa normalizada

$\beta = 10$ Base decimal

$e = 1$ Expoente

$x = 0.5132 \times 10^1$ Ponto flutuante normalizado de base decimal.

$y = 0.10111$ Número em notação binária

$d = 0.1011100000$ Mantissa normalizada

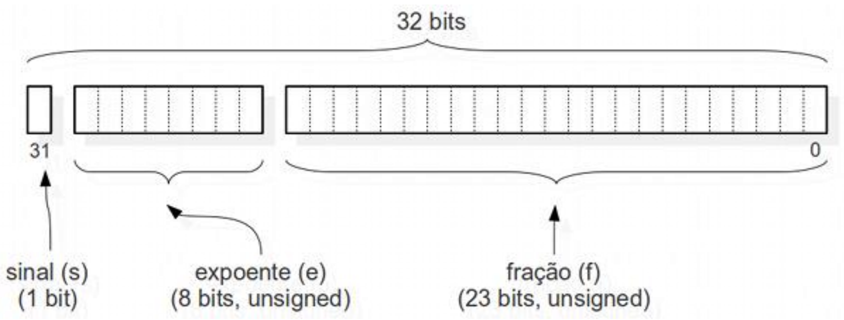
$\beta = 2$ Base binária

$e = 5$ ou $(101)_2$ Expoente

$y = 0.1011100000 \times 2^5$ Ponto flutuante normalizado de base binária.

Quando esse número é processado computacionalmente cada elemento é armazenado em um *bit* de uma variável, sendo necessário ainda reservar um espaço especial para o sinal da mantissa.

Figura 1 - Representação de estrutura float de 32 bits.



Fonte: Knuth (1979).

A Figura 1**Erro! Fonte de referência não encontrada.** ilustra a representação em 32 bits de um número, há possíveis representações com 64 e 128 bits também, mas a organização preserva-se. Do mesmo modo que procedemos para os Números Reais no item 3.3 a aritmética computacional que é realizada com essa estrutura numérica não será tematizada nesta pesquisa, pois estamos interessados na estrutura do número. Contudo devemos apresentar questões que se abrem ao trabalhar com esse tipo de representação.

4.2.2 Questões limitantes

Em nossa *lectio* vimos acima o tipo de estrutura utilizada para a representação numérica ao se estar com o computador, contudo, devemos expandir nossa compreensão e questionar os limites dessa perspectiva. Nesse movimento de *disputatĭo* questionamos em primeiro momento a completude dessa representação.

Nessa direção colocamos em destaque o que é dito pela Matemática com relação ao sistema de numeração real. Na seção 3.3.3 desta tese apresentamos a estrutura de corpo e sua propriedade de completude, a qual garante a não existência de “buracos” uma vez que sempre é possível exibir *ínfimos* e *supremos* em qualquer subconjunto do corpo. Porém, a representação computacional adotada exige um número infinito de bits para poder exibir alguns números decimais.

Uma estrutura de 32 bits como apresentada no item anterior pode armazenar diferentes números, porém com uma precisão de seis ou sete casas decimais. Com isso não estamos dizendo que não é possível armazenar números menores que 10^{-7} em um computador, mas sim que, se um número possuir mais de sete casas decimais, haverá um processo de arredondamento que implicará na perda de precisão do número.

Números grandes também são restritos em algumas estruturas computacionais. As máquinas de uso doméstico que são configuradas em 32 bits, por exemplo, são capazes de armazenar números inferiores a 4×10^{10} sendo que a precisão ficará restrita a sete ordens numéricas ou 15 quando adotamos uma estrutura de 64 bits de memória.

Outro ponto que devemos por sob investigação está relacionado com a base escolhida. Como já foi apresentado, os computadores operam com a base binária. Quando Leibniz desenvolveu sua pesquisa sobre esse sistema de numeração, o seu encantamento repousava na simplicidade dos símbolos com os quais é possível escrever qualquer número.

Contudo, no campo dos números racionais há problemas com a representação em base binária. Para entender o que acontece, vamos pensar que os números decimais são escritos como somatória de razões do tipo $\frac{1}{2^n}$. Diferentemente da parte inteira de um número, a combinação dessas frações não consegue representar certos números decimais, acarretando resultados com dízimas periódicas. Por exemplo, o número 0,1 na base decimal é escrito na base binária como (0,0001100110011001100...). Mesmo com infinitas casas decimais ainda seria uma aproximação desse número.

Quando operamos números racionais com o computador, nos deparamos com as limitações da memória computacional. Precisamos ter claro que um computador que opera em 32 bits armazena uma mantissa de número ponto flutuante de no máximo 23 bits, acarretando uma aproximação ruim para determinados números, como, por exemplo, o número 0,1 apresentado acima.

Entendemos que há limitações computacionais com relação à completude dos números. Porém, nossa compreensão de completude está, em grande parte, fundada em um conceito geométrico de reta real, que invoca uma imagem contínua. Esta apresenta uma estrutura sem falhas ou saltos. Podemos afirmar isso, uma vez que, mesmo a formalização algébrica da Análise, proposta por Weierstrass, toma como base a definição de número real de Dedekind que, segundo Weyl (1994) e Lopes (2006), se vale do conceito geométrico de reta para a construção dos números.

Essa compreensão geométrica pode ser inofensiva para Lima (2001), conforme exposto no item 3.4.1 desta tese. Entendemos, entretanto, que quando entramos no campo da Ciência da Computação, essa perspectiva influencia a relação que temos com os números.

Para entender essa influência podemos nos valer do seguinte raciocínio: as representações geométricas que fazemos dos mais diferentes conceitos de Matemática são convenientes, pois conseguimos associar com nossa mundaniedade que é física e geométrica, sem pretensões de questionar correntes filosóficas, e com isso compreender esses conceitos de maneira mais fácil. Contudo, a realidade atualizada pelos computadores é permeada de digitalidades, com elementos que são virtuais e não físicos. Assim, ao buscarmos uma correlação entre os elementos que estão em presença física no mundo-vida e os elementos que se presentificam apenas na virtualidade do ciberespaço, podemos nos deparar com situações paradoxais. Por exemplo, os números enquanto presentes na reta real e sua representação em mantissas computacionais.

A compreensão que nos parece suscitar essa *disputatĭo* diz do preço que pagamos ao realizar representações geométricas e físicas de entes matemáticos. Nossa compreensão de completude arraigada em fisicalidade foi escrita matematicamente de forma algébrica, porém as nuances do virtual e do digital não foram contempladas no processo histórico do desenvolvimento da Análise e da construção dos números. Por conseguinte temos números que não são representáveis computacionalmente, pelo menos não da forma como Dedekind os construiu ou que a Matemática difunde.

Nossa investigação nos leva a questionar o que é possível, ou não, de ser realizado computacionalmente para, então, verificarmos os modos pelos quais o contínuo se presentifica. Encontramos, junto à Ciência da computação, um campo de pesquisa chamado Computabilidade que nos apresenta as possibilidades e limitações computacionais. Adentrar por esse tópico nos lançará na abertura de horizontes em nossa *lectio*.

4.3 Computabildidade e números reais

Um dos principais motivadores para o desenvolvimento de qualquer tecnologia pode ser a necessidade de obter uma solução para um problema posto. Com relação à Ciência da Computação podemos dizer que um dos impulsionadores é a necessidade de solucionar problemas de forma mais ágil e precisa.

O desenvolvimento do computador como uma máquina digital programável, capaz de executar comandos de acordo com a necessidade de seu usuário é um salto no advento das tecnologias, se comparado, por exemplo, com as calculadoras ou com as réguas de cálculo, devido a sua versatilidade operacional. Porém cabe a nós o questionamento do tipo de problema que é possível ser resolvido por essa máquina.

Desde a concepção teórica proposta por Turing (1936) o computador é tido como uma máquina que consegue executar um algoritmo e por fim exibir uma resposta ao problema para o qual foi programada para resolver. Contudo, nem todos os problemas são passíveis de algoritmização. Em outras palavras, existem problemas para os quais o procedimento de resolução não é finito; logo não são computáveis.

A concepção de Turing sobre *computável* é apresentada em seu artigo O*n computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem* (TURING, 1936, p. 230) "According to my definition, a number is computable if its decimal can be written down by a machine[53]". Nesse artigo o autor discute a noção de número computável, sequência computável, função computável, além de apresentar a noção de Computabilidade posta na existência da *universal computing machine*[54].

> We may compare a man in the process of computing a real number to a machine which is only capable of a finite number of conditions $q_1, q_2, \ldots, q_R$ which will be called "m-configurations". The machine is supplied with a "tape", (the analogue of paper) running through it, and divided into sections (called "squares") each capable of bearing a "symbol". At any moment there is just one square, say the r-th, bearing the symbol S(r) which is "in the machine" (TURING, 1936, p. 231).[55]

Atualmente podemos definir a computabilidade como a área da Ciência da Computação que é responsável por dizer se um problema pode ser computável, ou seja, ela se refere "à existência ou não de um procedimento que resolve determinado problema em um número finito de passos" (BOCATO, 2018 s.p.).

> Em outros termos, se um processo (cálculo de números, construção de conjuntos, expressões efetivas de funções, deduzirem uma sentença, etc.) pode ser realizado por uma máquina de Turing, então tal processo pode ser chamado de computável, efetivamente calculável, recursivamente solúvel, etc. Em suma, ser computável é ser solúvel (NYIMI, 2011, p. 88).

[53] Segundo minha definição, um número é computável se sua parte decimal pode ser escrita por uma máquina (tradução nossa).

[54] Máquina universal de computação. Esse termo foi cunhado por Turing (1936) e aparece recorrentemente durante o texto, sendo que o capítulo 6 é dedicado à definição, o capítulo 7 à descrição de seu funcionamento e o capítulo 10 à aplicação dessa máquina para justificar a computabilidade de problemas.

[55] Podemos comparar um homem no processo de computar um número Real a uma máquina que é somente capaz de um número finito de condições q1 q2 qr que será chamado "m-configuração". A maquina é suprida com uma "fita", (análogo de um papel) correndo por meio dela, e dividida em seções (chamadas "quadros") cada um capaz carregar um "símbolo". A qualquer momento há apenas um quadro. Diga-se, r-ésimo carregando S(r) que está "na máquina" (tradução livre).

Existe uma série de problemas computáveis, bem como existe uma série de problemas não computáveis. Turing (1936) apresenta algumas situações e, em especial, o *entscheidungsproblem,* ou "o problema de decisão de Hilbert (*Hilbert's entscheidungsproblem*): encontrar um mecanismo genérico (e finitário) que, ao considerar um enunciado qualquer formulado em lógica de primeira ordem, fosse capaz de verificar sua validade ou não" (CAFEZEIRO et al., 2010, p. 242). Em seu artigo Turing prova que não é possível computar tal problema, ou seja, não é possível criar um algoritmo que decida para todos os casos se um enunciado de lógica de primeira ordem é válido ou não.

Outra contribuição apresentada nesse mesmo artigo é o fato de que os Números Reais são computáveis, "In particular, I show that certain large classes of numbers are computable. They include, for instance, the real parts of all algebraic numbers, the real parts of the zeros of the Bessel functions, the numbers $\pi, e,$ etc." (TURING, 1936, p. 230). Esse novo conceito de número, ou essa nova dimensão de número, traz consigo uma epistemologia que torna possível construir novos modos de ver as funções, a continuidade, e outros elementos que foram historicamente desenvolvidos com base nos Números Reais.

Dessa forma, Turing (1936) foi importante para o desenvolvimento da Análise Computável. Da mesma forma que a Análise Real e a Análise por infinitésimos foram desenvolvidas a partir de conceitos distintos de números, a Análise Computável apresenta os conceitos de números, séries, convergência, funções, continuidade, derivação e integração, tomando o conceito de Computabilidade apresentado por Turing.

> Computable Analysis is developed as the theory of those functions on the real numbers and other sets from analysis, which can be computed by machines. Computable analysis connects the two classical disciplines analysis/numerical analysis and computability/complexity theory (WEIHRAUCH, 2000, p. 2)[56].

Tanto a Análise Real, quanto a Análise Numérica possuem bases canônicas de referenciais teóricos. Contudo a Análise Computável só teve suas primeiras discussões a partir de 1936 após os estudos de Turing e Church. Segundo Weihrauch (2000) após a década de 30 esse campo da Ciência da Computação muito foi desenvolvido. Contudo,

[56] A Análise Computável é desenvolvida como a teoria dessas funções nos números reais e outros conjuntos de análise, que podem ser computados por máquinas. A análise computável conecta as duas disciplinas clássicas: análise / análise numérica e teoria da computabilidade / complexidade. Tradução Nossa

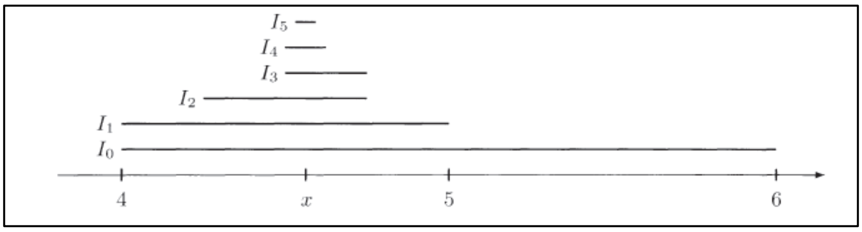
> While for mathematical branches like linear algebra or recursion theory there are canonical foundations and well established introductions, all these books [from computable analysis] have important concepts in common, but differ in their contents and technical framework, and each author presents the topic from his individual point of view (WEIHRAUCH, 2000, p. 2. Inserção nossa).[57]

Desse modo entendemos que não há um consenso sobre qual perspectiva fundamenta esse tipo de Análise, contudo, ao adotarmos o que é apresentado por esse autor, iremos tomar os fundamentos trazidos por A. Grzegorczyk[58] os quais foram desenvolvidos posteriormente com base na teoria das representações de J. Hauck[59] “To distinguish it from other approaches, it will be called "Type-2 Theory of Effectivity", TTE for short” (WEIHRAUCH, 2000, p. 3).[60]

Essa perspectiva adota a definição de número computável de Turing, e para representar os Números Reais são usadas sequências infinitas de números naturais, que por sua vez representam intervalos numéricos. Podemos dizer que a Análise Computável construiu os Números Reais por meio de uma técnica conhecida como *Intervalos Encaixantes* cujo desenvolvimento é atribuído a Cantor.

Dizemos que um corpo ordenado $(X, +, \cdot, <)$, satisfaz a propriedade dos intervalos encaixantes se, dada uma sequência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos fechados em X tal que $I_{n+1} \subset I_n$, para todo n, a intersecção $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n$n é não-vazia. Isto é, existe $x \in X$ tal que $x \in I_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. (FAJARDO, 2017, p. 58).

Figura 2 - Os seis primeiros intervalos de um número real x



Fonte: Weihrauch (2000, p. 6)

---

[57] Embora para ramos matemáticos como álgebra linear ou teoria da recursão existam fundamentos canônicos e introduções bem estabelecidas, todos esses livros [da análise computável] têm conceitos importantes em comum, mas diferem em seu conteúdo e estrutura técnica, e cada autor apresenta o tópico de seu ponto de vista.

[58] Andrzej Grzegorczyk. Computable functionals. *Fundamenta Mathernaticae,* 42:168-202,1955

[59] Jiirgen Hauck. Konstruktive Darstellungen reeller Zahlen und Folgen. *Zeitschrift fur Mathematische Logik und Grundlagen de Mathematik, 24:365*-374, 1978.

[60] Para distinguir essa de outras perspectivas iremos chama-la de “Type-2 Theory of Effectivity”, ou para abreviar TTE. Tradução nossa.

Desse modo o número x é representado por uma sequência de intervalos $([4,6],[4,5],[4.3,4.7]\ldots[a_n,b_n])$. Genericamente, um Número Real é expresso por $x = (I_0, I_1, I_2, \ldots)$. Essa técnica permite construir funções para definir cada intervalo, de modo que todos os números racionais e irracionais sejam representados. Assim, podemos dizer que todos os Números Reais são computáveis.

Ao construir os números dessa forma, a Análise Computável define uma função real como sendo computável se, e somente se, alguma máquina conseguir mapear qualquer número computável x de seu domínio e associá-lo a um número y também computável. Em Weihrauch (2000) encontramos uma demonstração de que as funções: soma, multiplicação e potência são todas computáveis, e de modo particular esse autor afirma que é possível demonstrar que "elementary real functions like exp, sin. log and arcsin are computable, that the computable real functions map computable numbers to computable numbers and that the computable real functions are closed under composition" (WEIHRAUCH, 2000, p. 6)[61].

Dicotomicamente ao que é apresentado por Weihrauch (2000) está o trabalho de Nyimi (2011). Para esse autor os Números Reais em sua totalidade não podem ser computáveis. Essa conclusão está apresentada em sua Tese de doutoramento e está pautada no conceito de *Números Transcendentais.* "A transcendentalidade está ligada à não-construtividade de certos números, no sentido de que não podem ser obtidos através de construções geométricas feitas com régua e compasso" (NYIMI, 2011, p. 92).

Do mesmo modo que é possível definir os Números Reais como a união dos conjuntos $\mathbb{Q}$ (Números Racionais) com $\mathbb{I}$ (Números Irracionais), podemos também dizer que ele é a união dos *Números Algébricos*[62] e dos *Números Transcendentais.*

Embora existam números transcendentais computáveis como o número de Euler (e) e o π, a grande maioria não pode ser computável, pois são constituídos de modo intrínseco por elementos aleatórios, de modo que não é possível encontrar um padrão. "Por essa razão nenhum algoritmo pode computá-los" (NYIMI, 2011, p. 95).

Com base na incomputabilidade dos números, esse autor também irá dizer da incomputabilidade de conjuntos e funções. Assim, está posta uma barreira computacional intransponível entre a Matemática Ocidental e Matemática Computacional. Entendemos que

---

[61] É possível demonstrar que funções reais elementares como exp, sin. log e arcsin são computáveis, que as funções reais computáveis mapeiam números computáveis para números computáveis e que as funções reais computáveis são fechadas sob a composição. Tradução nossa.

[62] Segundo Nyimi (2011, p. 91) Números Algébricos são as raízes de polinômios em uma variável, não-nulos e de coeficientes inteiros.

essa perspectiva aponta para nosso estranhamento com relação a inofensividade apontada por Lima (2002) de recorrer a noções geométricas.

4.4 *Quaestio disputata*: panorama do exposto

Esta seção foi dedicada à compreensão da perspectiva computacional da Tese. Pudemos trazer nossas compreensões sobre as noções esqueléticas da máquina, ou seja, sobre como os números são trabalhados computacionalmente, e também sobre a perspectiva da computabilidade.

No âmbito numérico compreendemos que a estrutura de ponto flutuante é o modo pelo qual o computador operacionaliza os números. Assim, os números são representados por uma memória virtual, composta por *bits*. A estrutura do ponto flutuante tem uma capacidade limitada de armazenamento devido aos recursos disponíveis atualmente, porém, sua concepção está baseada nos números binários, que traz muitas vantagens de processamento, e no conceito de número computável apresentada por Turing (1936).

Quando Turing idealizou o processo que hoje conhecemos como *máquina de Turing*, ele criou uma formalização para a noção de algoritmo. Essa formalização permitiu que programas de computador fossem desenvolvidos, porém a concepção teórica desenvolvida por esse autor precisou ser adaptada para as limitações físicas disponíveis. A ideia teórica apresentada por Turing (1936) requer a utilização de uma fita infinita que alimentaria a Máquina Universal, o que é fisicamente impossível. Para poder aplicar o conceito de *Máquina de Turing* hoje se trabalha com memórias virtuais, que possuem uma capacidade limitada.

Ao entrarmos na seara da teoria da computabilidade, ramo da Ciência da Computação que busca pelas limitações e possibilidades computacionais, tendo como fio condutor nossa interrogação e nossa perplexidade com relação à continuidade computacional, encontramos duas perspectivas distintas. A primeira baseada na concepção de Turing de número computável, a qual traz consigo uma noção teórica de registro infinito, ou de não existência de limitação; e a segunda apresentada por Nyimi (2011) que versa sobre as impossibilidades computacionais devido a sua restrição de memória.

Entendemos que ambas as perspectivas trazem modos da continuidade se presentificar no trabalho computacional. A articulação dos sentidos compreendidos nesta parte da tese com aqueles que foram produzidos ao longo do texto serão apresentados em nossa meta-compreensão.

CAPÍTULO V – Meta-compreensão

O contínuo é um conceito que levanta discussões tanto entre filósofos quanto entre matemáticos. Desde a antiguidade os pensadores se debruçam sobre suas características e propriedades. Entendemos que além de ser um modelo para compreender as experiências de nosso cotidiano, a ideia do contínuo se faz presente em nosso modo de pensar e nos dá caminhos para compreender comportamentos de estruturas, tanto físicas quanto matemáticas.

Em nosso trabalho assumimos a postura filosófica e seguimos por um caminho de investigação baseados na perspectiva defendida por Coêlho (2016). Realizamos um exercício filosófico, visando inquirir, de modo atento e rigoroso, o contínuo, o *continuum* e a continuidade. Para tanto, nos movemos numa dinâmica de estudos filosóficos que é apresentada pelo professor Ildeu Coêlho, sobre a estrutura de uma aula desenvolvida nas universidades nos séculos XII e XIII.

Desse modo, nossa tese se constitui como uma *lectio* que, ao tomar textos como exemplares do pensamento das autoridades da Ciência, nos motiva a investigar o fenômeno que buscamos compreender, e confrontar as ideias que estão sendo apresentadas numa *quaestio disputāta*. O movimento realizado consiste em apresentar os argumentos históricos e filosóficos culturalmente desenvolvidos, e que foram aceitos pela comunidade matemática (*lectio*), para que possam ser discutidos de forma rigorosa, buscando compreender quais os desdobramentos e horizontes que se presentificam por esse caminho (*disputatĭo*).

Ao tematizamos o contínuo da forma proposta, ainda que a cada seção seja possível observar *quaestiones* sendo levantadas e articuladas, devemos ter claro um fio condutor que norteará nosso caminho. Nessa direção foi necessário elaborar nossa interrogação de pesquisa, que diz da nossa perplexidade a respeito da relação entre a Matemática Computacional e Matemática Ocidental, sendo tematizada pela continuidade, a qual foi assim formulada: *Como o contínuo se presentifica no trabalho com métodos numéricos, estando-se junto ao computador?*

Para darmos conta dessa investigação perquirimos os sentidos e os significados de continuidade em diferentes dimensões, Linguística, Filosófica, Matemática, e Computacional. Essa investigação lançou luz ao caminho que percorremos, e a seguir apresentamos nossas compreensões sobre essas dimensões do *continuum* ao modo de uma síntese, que toma como fio condutor nossa *quaestio*.

Iniciamos nossa trajetória buscando compreender os significados que são atribuídos às palavras: contínuo e continuidade junto à linguagem corrente. As compreensões advindas dessa reflexão nos lançaram para a percepção de sentidos que, aos poucos, abriram possibilidades de diferenciar o conceito de contínuo físico e de *continuum* como ente matemático. Foi possível, além disso, compreender que a continuidade abarca diferentes estruturas, as quais foram objeto de estudos de diversos autores em diferentes épocas.

No âmbito do dizer da linguagem comum, o sentido de contínuo se mostra como o que se estende sem interrupção, algo que perdura sem apresentar lapsos; mas, também, está associado à repetição de padrões sucessivos. A continuidade é a característica de algo ser contínuo. No rastro dessa compreensão, a continuidade está presente na ausência de interrupções, no fluxo ininterrupto de algo. Já o *continuum* é um ente matemático, que traz consigo as concepções intuitivas da linguagem, do senso comum, mas que foi formalizado por um pensamento matemático abstrato de preservação da forma.

Os significados trazidos pela linguagem nos permitem dizer de nossas experiências intuitivas do contínuo. Esse conceito pode ser tratado de maneira ôntica[63], uma vez que desde a infância já vivenciamos experiências que nos permitem classificar objetos como contínuos e discretos. Porém, sua tematização pode abrir horizontes de compreensão que podem conduzir articulações lógicas de sentidos que evidenciam o modo de ser do contínuo de maneira ontológica. Perguntando sobre "o que é isto, a continuidade?" nossas concepções vão se modificando. Por exemplo, uma estrada é contínua, mas o asfalto que a recobre é poroso; uma parede sólida é contínua, mas a água pode nela se infiltrar; um filme é contínuo, mas foi gravado e editado em quadros com duração limitada.

Historicamente, vemos que quando a formalização da Matemática solicitou o conceito de continuidade para poder dizer sobre entes geométricos e/ou sobre as funções, por exemplo, os significados, ainda que ônticos foram trazidos das experiências intuitivas e atualizados pela álgebra e pela lógica. Nesse processo de atualização muitas questões foram levantadas e muitas tentativas para delas dar conta foram realizadas. Assim, investigar a História da Matemática se mostrou relevante para nossa *lectio*.

[63] Na filosofia heideggeriana há uma diferença entre ôntico e ontológico. Para o filósofo alemão, o ôntico está no plano da sua existência concreta, sendo visto como um objeto em si, com características que tendem à objetividade. É o que primeiro nos chega em nossa vida cotidiana. O ontológico diz de uma busca pelos sentidos e significados do ôntico, do que se mostra como sendo assim, a um primeiro olhar. É uma incursão arqueológica que vai desvendando camadas de sentidos e trazendo significados, permitindo uma compreensão mais abrangente do ente.

No âmbito da História, vemos que os conceitos de continuidade e de infinidade muitas vezes se imbricaram. Entendemos que essa proximidade está posta no modo pelo qual buscamos compreender o infinito. Como seres encarnados, vivemos e podemos falar sobre as vivências a respeito do finito. Entretanto, para dizer do infinito, nossas compreensões repousam em extrapolações teóricas de padrões, e para o movimento de constituição de conhecimento, invocamos a continuidade para garantir que possamos desenvolver os mesmos padrões sem que se apresentem mudanças abruptas não imaginadas.

O panorama histórico que apresentamos sobre o contínuo elucidou que cada período apresentou níveis distintos de disposição e ferramental teórico específico para discutir o infinito e a continuidade. Os gregos foram movidos pela busca de construir um modelo axiomático de verdade; os europeus, do século XVII, foram movidos pela busca de equações e modelos matemáticos para representar a Natureza; os inventores do Cálculo Diferencial e Integral visaram justificar variações não tangíveis a qualquer instrumento de medição; os formalistas do século XIX encontraram nesses elementos, o seu mote propulsor na caminhada em direção a fornecer alicerces sólidos à Matemática; e os contemporâneos se movimentam em busca de mias esclarecimentos, por estarem abalados com a incompletude da Matemática, contudo, eles estão munidos de uma lógica estruturada e de máquinas capazes de efetuar cálculos de modo mais ágil e preciso. Todos, e cada um, foram importantes para a compreensão que apresentamos nesta tese.

As diferentes facetas do contínuo, desde as inquietações de Demócrito e Zenão até a crítica de Weyl e a constituição da Análise *Não-Standard* foram apresentadas na pesquisa e se mostraram relevantes, pois cada contribuição possibilitou avanços na compreensão do investigado. Entendemos que o conhecimento é produzido de modo intersubjetivo pela comunidade científica, ou seja, todos os trabalhos realizados em continuidade estão interligados pela intencionalidade de quem se debruça sobre o tema, e juntos eles abrem horizontes de compreensões.

Ao assumir a postura husserliana de constituição e produção do conhecimento, entendemos que o conhecimento sobre o contínuo abrange dimensões que perpassam as intuições, e com elas os significados vão sendo articulados junto às Ciências, evidenciando a produção de conceitos e possibilitando desdobramentos ligados ao trabalho de quem produz Matemática. Todas essas perspectivas iluminam o caminho da formalização do *continuum* e mostram possibilidades da trajetória realizada no movimento desta investigação numa dimensão filosófica.

Entendemos que a continuidade está presente em experiências que são discutidas no âmbito da Filosofia, como o tempo, o infinito, a vida, etc. De modo que podemos compreender a relação entre discreto e contínuo de diferentes perspectivas.

Na filosofia grega atomista, por exemplo, tudo que existe é um aglomerado de partículas indivisíveis. Desse modo, a continuidade é vista segundo os aspectos físicos dos átomos. Para a filosofia lebniziana as mônadas constituem parte de tudo. Essa visão filosófica, porém, se distancia da perspectiva materialista dos atomistas gregos, pois as mônadas são substâncias puras e cada uma é representação do próprio universo, e se mantém juntas pela ação do espírito único – Deus. Nessas perspectivas o discreto constitui o contínuo, ou seja, há o discreto. A continuidade é, simplesmente, um estado daquilo que se uniu.

Na filosofia fenomenológica, principalmente na husserliana, o contínuo se mostra como duração. Ao tematizar o tempo, por exemplo, o qual é dito como contínuo fundamental, há uma ruptura com a filosofia cartesiana de cronometria do tempo em instantes discretos. Para Husserl (1994) o agora não é pontual; é um agora-duração que se estende e se mostra no fluxo da consciência. Nessa perspectiva, há o contínuo. O discreto é um modelo que produzimos mediante articulações de sentidos, de um movimento do pensar que reúne indicações sobre modos de o fenômeno estudado se mostrar, da expressão do compreendido nesse movimento que, na realidade intersubjetiva da comunidade de pensadores que se dedicam a esses estudos, vai sendo posto em linguagens específicas e formalizado logicamente. Produz-se uma idealidade objetual, um objeto matemático que abre possibilidades de operar com entes contínuos.

Embora possamos colher contribuições importantes na antiguidade grega, é a partir da filosofia de Leibniz que temos argumentações e produção de um ferramental matemático que se direcionam para a formalização que nos permite, nos dias atuais, produzir Matemática. Nesse ramo da filosofia encontramos o contínuo como um dos labirintos da razão, e no que concerne à continuidade, o seu estudo repousa sobre elementos que o irão constituir, as mônadas. As ideias de Leibniz estão na base de teorias que só puderam ser formalizadas após muitos anos de sua morte, como por exemplo, os limites e os Números Reais.

O Cálculo Diferencial de Leibniz e Newton é um precursor de questionamentos que são postos por outros grandes matemáticos, com relação aos Números, ao Infinito e, também, à Continuidade. Nomeadamente citamos Cantor e Dedekind como matemáticos que ao se valerem das ideias de Leibniz desenvolveram teorias de grande valor para a Matemática. Como foi apresentado ao longo do texto, a construção dos Números Reais e a formulação da hipótese do *continuum* foram marcos na história da continuidade.

Em 1905 tanto a Filosofia quanto a Física trouxeram outras compreensões sobre o tempo e, com isso, outras perspectivas se mostraram para compreender o contínuo. O matemático alemão Hermann Weyl, baseando-se em trabalhos de Husserl e de Einstein, realiza um estudo criticando a casa da Análise, expondo a compreensão de ter ela sido edificada sobre areia, de modo que sugere que a ideia de número deve ser revista.

A crítica de Weyl, no século XX, nos leva a questionar o processo de formalização da Matemática que teve início nos primeiros anos do século XIX com o paradoxo de Russell e as pesquisas de Riemann para Aritmetização da Análise.

Retomando esse questionamento, Longo (1999) realiza estudos sobre os caminhos que levam à constituição formal do conhecimento matemático. Como caso exemplar cita o contínuo e apresenta teorias que se valem das ideias de continuidade para serem construídas. Suas ideias lançam luz no foco de nossa investigação, tornando possível vislumbrar como a ideia do contínuo vem se configurando e presentificando nas teorias da Ciência Moderna.

Movemo-nos então para compreender o contínuo no âmbito da Ciência Matemática. Para isso nos debruçamos sobre o processo de formalização da Análise, a qual se deu pela estrutura dos Números Reais. Concordamos com Eves (2004) que afirma que a estrutura da Matemática está baseada nos Números Reais e que, a discussão de temas das mais diversas áreas subjaz a compreensão clara das características desse tipo de número.

A discussão realizada permitiu compreender as aproximações entre os modelos desenvolvidos por Dedekind e por Cauchy, bem como pudemos ver que a Lógica permite definir uma estrutura algébrica de Corpo, a qual garante o isomorfismo entre as perspectivas de construção desse tipo de número. Ou seja, a Matemática vê as diferentes construções como faces distintas de um mesmo objeto. Assim, embora possamos evidenciar filosoficamente a diferença entre elas, no que diz respeito à necessidade de se recorrer à linguagem geométrica para sua construção, as construções são todas vistas como isomorfas, portanto, dizem do mesmo ente matemático.

Embora seja demonstrável o isomorfismo entre as diferentes construções existentes, entendemos que cada uma traz consigo uma concepção epistemológica diferente que terá desdobramentos quando invocadas para discutir novos conceitos. Com isso queremos dizer que assumir uma ou outra forma de construção dos números não é uma atitude inofensiva como apresenta Lima (2002). Entendemos que a construção efetuada por Dedekind torna presente a ideia geométrica de reta, o que permite falar que, ao pensar na reta real, todos os números estão presentes, de imediato. Por outro lado, a concepção de Cauchy traz consigo a ideia dos números em potência, ou seja, qualquer Número Real pode ser escrito por meio de uma sequência de Números Racionais, de modo que a sua presentificação se dá ao voltar-se para ele (Número Real) e definir a sequência em questão. Inferimos que essa situação é análoga à diferença entre o Infinito Real e o Infinito Potencial.

Tendo compreendido de modo satisfatório a estrutura dos Números Reais, e que esse conhecimento é válido para a comunidade matemática pudemos articular nossas *quaestiones* sobre a sua estrutura, e encontramos na Análise Matemática a possibilidade de buscar compreensões sobre os modos de o contínuo estar presente na Matemática.

O estudo da Análise via Cauchy-Weierstrass é, atualmente, o modelo mais difundido na Academia, e ganhou espaço por sua força de generalidade. Tomando os Números Reais como corpo completo ordenado é possível definir um critério de cerceamento de valores de uma função. A propriedade de completude do conjunto dos Números Reais permite trazer aspectos sempre suficientes para uma estrutura de cerceamento, de forma que não havendo buracos ou salto ela é dita contínua.

Por outro lado, a Análise Matemática realizada por meio de estruturas infinitesimais assume uma perspectiva filosófica distinta. Nessa abordagem a estrutura que garante a continuidade é a variação por graus insensíveis.

O estudo realizado nos permitiu compreender que é necessário distinguir infinitésimos de números, uma vez que os infinitésimos representam uma relação entre todos os números de uma vizinhança. O conceito de infinitésimos é um recurso que busca compreender o comportamento de uma função nos valores de um ponto. A interdependência dos pontos coincide com o que afirmamos sobre a estrutura contínua do tempo.

Entendemos, com base em Weyl (1994) e Longo (1999), que as duas perspectivas de Análise se distanciam quando tematizamos o conceito de número. Para o modelo de Cauchy-Weierstrass temos os números como entidades pontuais, que podem ser tomadas de modo discreto, mas que, pela propriedade completa, se constitui numa entidade contínua. Já o modelo dos infinitésimos vê os números diante de uma interdependência de valores em uma vizinhança, do mesmo modo que Husserl compreende os instantes temporais como agoras-duração que, ao se estenderem, constituem uma estrutura contínua.

Quando tematizamos a continuidade junto à Ciência da Computação percorremos o mesmo caminho efetuado com a Ciência Matemática, buscando compreender o que é o computador, em sua estrutura, e qual concepção de números é presentificada para que possamos dizer da continuidade ao se estar junto ao computador.

A estrutura de números que está presente no computador é a de pontos flutuantes. Essa concepção de números se vale da base binária e traz consigo o dinamismo na representação numérica. Contudo, existe uma limitação operacional com relação a sua capacidade de armazenamento. Isso implica que determinados números só podem ser representados por meio de arredondamentos ou truncamentos.

Esse cenário pode nos levar, à primeira vista, a concluir que é impossível representar os Números Reais junto ao computador. Nyimi (2011) corrobora essa perspectiva ao afirmar que “existe uma infinidade não-enumerável de números reais. Logo, existe uma infinidade não-enumerável de número reais que não admitem descrição algorítmica e, portanto, são incomputáveis” (NYIMI, 2011, p. 89). Entretanto, ao tematizar com atenção a questão, podemos ver que a postura assumida por esse autor, revela uma visão da epistemologia apresentada na concepção de número de Dedekind, uma vez que recorre a números construídos de forma teórica. Contudo, a concepção de número computável apresentada por Turing (1936) e trazida nessa *lectio* por meio de Weihrauch (2000) se vale de uma epistemologia consonante à proposta por Cauchy, que diz da potência dos números.

Como o conceito de continuidade repousa sobre o conceito de número, podemos dizer que, ao assumir a epistemologia subjacente ao trabalho de Dedekind, que é a defendida por Nyimi (2011), há impossibilidade de trabalhar com a totalidade dos Números Reais. Isso implicaria na presença de buracos na representação de funções e, consequentemente, na descontinuidade computacional insuperável. Por outro lado, a epistemologia subjacente ao trabalho de Cauchy, que também está presente no trabalho de Turing (1936), aponta para possibilidade de trabalhar com qualquer Número Real. Tomando o caminho dessa possibilidade, tem-se que os possíveis lapsos observados podem ser preenchidos e, portanto, todas as funções computáveis são contínuas.

A síntese realizada por nós e apresentada acima revela modos de a continuidade se presentificar tanto na Ciência Matemática, quanto na Ciência da Computação. O exercício filosófico efetuado, que teve como norte a *quaestio* de investigação apontou considerações sobre duas perspectivas de continuidade, Análise Matemática e computabilidade.

Pela Análise Real, posta nos termos de Cauchy-Weierstrass, uma função é contínua se atender a certos critérios de cerceamento de domínio e imagem. Tais critérios dizem que para qualquer número, pertencente ao domínio da função, que esteja próximo a um dado ponto, é possível exibir um valor, do conjunto do contradomínio, próximo o suficiente da imagem do ponto dado. O que subjaz essa definição é a existência de elementos do conjunto domínio de uma função. Ou seja, se houver uma restrição que torne o ponto dado isolado, então não há necessidade de cerceamento de modo que a função é definida como contínua. Dessa perspectiva, o que se presentifica no trabalho computacional é que, se considerarmos a impossibilidade representacional afirmada por Nyimi (2011), podemos ter a continuidade devido aos pontos isolados.

Porém, se tomarmos a concepção computável de Weihrauch (2000), temos que toda a função é contínua, pois em uma determinada vizinhança é possível verificar um comportamento dos pontos cuja diferença será ínfima. De modo que a função será contínua pela definição da Análise por infinitésimos.

Ao percorrer a trajetória no trilhar desta pesquisa, entendemos que o exercício filosófico efetuado nos trouxe um amadurecimento como pesquisador e uma compreensão esclarecedora do fenômeno inquirido. Existem diferentes modos de a continuidade se presentificar no trabalho junto ao computador. Esses modos distinguem-se principalmente pela perspectiva epistemológica assumida.

O *continuum*, tal como é entendido pela Análise Cauchy-Weierstrass, se mostra quando adotamos a postura defendida por Nyimi (2011), uma vez que havendo a impossibilidade computacional de representação de determinados números o conjunto domínio da função será constituído por pontos isolados. Por outro lado, o *continuum* com o qual trabalhamos ao assumir a perspectiva da Análise apresentada por Caraça (1998) se presentifica na concepção de número computável de Turing (1936), a qual apresenta os números como sucessão de intervalos, como vizinhanças a serem organizadas e compreendidas como um todo. Desse modo entendemos que é o ser humano que, ao se voltar intencionalmente para o trabalho com a máquina, traz os diferentes modos da continuidade como presença.

Nossa pesquisa lançou luz sobre a questão da continuidade e, ao enfocar o trabalho desenvolvido junto ao computador, foi possível evidenciar a presença da continuidade em modos de se trabalhar com o ferramental da computação. O exercício filosófico engendrado nos permitiu efetuar uma articulação de significados de diversas áreas, as quais buscaram compreensões sobre a continuidade no decorrer da História.

Compreendemos que o processo de produção do conhecimento abarca diferentes dimensões, e seus desdobramentos são propulsores para outros movimentos de produção junto a diferentes comunidades científicas. Portanto, nossa articulação realizada não esgota o assunto da continuidade, ainda há questões em aberto, por exemplo, a dualidade contínuo-discreto se mostra como uma *quaestio* aberta. Continuamos a nos perguntar, no âmbito de questionamentos filosóficos, se a continuidade poderia ser considerada a geradora do que é dito discreto, ou se é a união de discretos que nos permite falar da continuidade. Mas esse é o modo de produção do conhecimento intersubjetivo. Nossa compreensão subjetiva sobre continuidade foi articulada de modo inteligível para os membros da comunidade matemática produzindo conhecimento sobre o tema. Esse modo de compreensão articulado abrirá horizontes de compreensão, e consequentemente novas questões.

Vislumbramos desdobramentos distintos para cada concepção de continuidade apresentada e discutida no texto e podemos dizer que, enquanto comunidade acadêmica, ainda estamos desenvolvendo as estruturas que permitirão atualizar as concepções de números para a virtualidade do ciberespaço. O que nos é evidente, todavia, é a presença dos conhecimentos histórico-socialmente construídos no desdobrar da Ciência.

Nossa pesquisa nos mostrou que existem conexões entre diferentes concepções matemáticas, que as correntes filosóficas podem se imbricar ao discutir determinados temas e, ainda, que o desenvolvimento científico pode ser visto como oriundo de mais de uma área de pesquisa. Essa perspectiva nos salta aos olhos, uma vez que a presença desses fios condutores não é usualmente evidenciada no discurso oficial da História. Com isso queremos dizer que, ao nos debruçarmos sobre um tema, de modo rigoroso como feito nesta tese, buscando tematizar um conceito em diferentes dimensões, é possível enxergar um fluxo que transcende as limitações teóricas das Ciências Ocidentais, e que as conectam. Esse fluxo é uma teia, cujas *linhas escondidas* conectam, por exemplo, a Análise e Ciência da Computação.

Entendemos que no processo histórico do desenvolvimento dessas Ciências não houve a intenção de aproximá-las. Contudo, os desafios atuais postos para ambas podem ser tematizados de maneira conjunta, pois as linhas que as unem existem, cabe a nós trazê-las à superfície para receber a devida atenção.

O desafio enfrentado atualmente sobre o *continuum* computacional pode ser compreendido de maneira análoga àqueles enfrentados pelos gregos à época da crise dos incomensuráveis, bem como aos esforços dos pesquisadores do século XIX para vencer a crise nos Fundamentos da Matemática. Assim, entendemos que podemos vencer as limitações físicas computacionais, e possivelmente vislumbrar outros modos de desenvolver computação, ou de representar a virtualidade dos números.

Para finalizar nosso texto, gostaríamos de destacar que embora as questões que foram tematizadas nesta tese estão, em sua maioria, no âmbito da Filosofia da Matemática, o exercício filosófico que foi efetuado nos lança a horizontes de compreensão que vão além de nossas perplexidades iniciais.

Desse modo, torna-se evidente para nós que o trabalho com o computador pode produzir resultados que, quando aplicados e interpretados à realidade mundana, abrem diferentes perspectivas. Cada perspectiva traz possibilidades de resposta a respeito de interferências na vida da comunidade, socialmente organizada ou não, ao embasar tomadas de decisão sobre políticas públicas de caráter da saúde, da economia, da educação, da ecologia etc. Posto isso, entendemos que os riscos que podem ser desencadeados por trabalhar com uma ou com outra vertente filosófica, subjacente às concepções de continuidade que sustentam os programas computacionais, devem ser foco de discussão entre os especialistas da área. Para além disso, devem ser explicitados a um público de não especialistas, em um esforço de se criar uma cultura contra a ideologia da certeza, a qual garante confiabilidade indiscutível de resultados obtidos mediante programas computacionais de alta tecnologia.

Nós, enquanto membros da comunidade, precisamos manter a postura filosófica inquisitiva, e questionar os resultados, compreender os desdobramentos e conhecer os fundamentos daquilo que é produzido junto ao computador, e que terá influência direta em nossas vidas. Compreendemos que nosso trabalho abre portas para essas discussões.

Referências

AGOSTINHO, S. **Confissões**: livros VII, X e XI.Covilhã: Lusa Sofia Press, 2008. (Coleção: Textos Clássicos de Filosofia). Tradutores: Arnaldo do Espírito Santo / João Beato / Maria Cristina Castro-Maia de Sousa Pimentel.

ALVES, P. M. S. **Fenomenologia deltiempo y de lapercepción.** Madri: Editora Nueva, 2010.

ARAÚJO, A. **Matemática do Discreto e do Contínuo**. Coimbra, 1998. Texto para uma Ação de Formação de professores do Ensino Secundário. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~alma/publicat/other/Foco.pdf>. Acesso em: 14 out. 2018.

BERKLEY, G. O Analista: um discurso dirigido a um matemático infiel. **Scientiæstudia**, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 633-676, 2010.

BICUDO, M. A. V. **Professor Ildeu**: Filósofo da educação. No prelo.

BICUDO, M. A. V. **Tempo, tempo vivido e história**. Bauru: Edusc, 2003.

BICUDO, M. A. V (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, 2011.

BICUDO, M. A. V. Sobre História e historicidade em Edmund Husserl, **Cadernos da EMARF**, Fenomenologia e Direito, Rio de Janeiro, v.9, n.1, p. 21 – 48, abr./set.2016.

BICUDO, M. A. V. Mathematics Education Actualized in the Cyberspace: A Philosophical Essay . In: Ernest, P. (Ed.) **Philosophy of Mathematics Education Today**. Switzeland: Springer, 2018, p 253 – 270.

BICUDO, M. A. V ; AFONSO DA SILVA, A. Análise de vivências em situação de constituição de conhecimento. In: COSTA, A. P. ; SÁNCHEZ-GOMEZ M.C.; CILLEROS, M. V. M. **A prática na Investigação Qualitativa**: exemplos de estudos. Aveiro, Pt: Ludomedia, 2018, p. 154 – 178.

BOCATO, L. **Computabilidade.** Mar/2018. 27 p. Notas de aula.

CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 25, n. 1, p. 3-16, 2006.

CAFEZEIRO, I. et. al. Recontando a computabilidade. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, p. 231-251, jul | dez 2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARNIELLI, W; EPSTEIN, R. L. **Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2006.

COÊLHO, I. M. Universidade e Ensino: treino ou formação? In: COÊLHO, I. M.; FURTADO, R. M. M. (Org.) **Universidade, Cultura, Saber e Formação**. Campinas: Mercado das Letras, 2016. p. 87 – 107.

COHEN, L. W.; EHRLICH, G. **The structure of the real number system**. Nova York: Van Nostrand, 1963.

DEDEKIND, R. **Essays on the Theory of Numbers**. [S. I.]: E-Book, 2007. Disponível em: < https://www.gutenberg.org/files/21016/21016-pdf.pdf>. Acesso em: 14 out. 2018.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FAJARDO, R. A. S. **Introdução à Análise Real.** nov de 2017. 125 p. Notas de aula, 2017.

FERREIRA, F. **A Lógica Matemática como empreendimento fundamentador.** Lisboa,2013. Comunicação à Sessão da Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa em 15 de janeiro de 2009.

FOLSCHEID, D.; WUNENBURGER, J. **Metodologia Filosófica**. São Paulo: Martins Fontes, 1997. Tradução: Paulo Neves.

HERRERA, R. M. Histórias de Matemáticas: El sólido hiperbólico agudo. **Revista de InvestigaciónPensamiento Matemático**. Madri, n. 2, p. 1-11, abr. 2012. Disponível em: <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3891846.pdf> Acesso em: 01 jun. 2015

HOUAISS. **Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa**. Editora Objetiva. Versão 2.0a, abr. 2007.

HUSSERL, E. **The Crisis of European Sciences and Transcendental Phenomenology** (translated by David Carr). Evanston: Nothwestern University Press, 1970.

HUSSERL, E. **Lições para uma fenomenologia da consciência interna do tempo**. Lisboa: Imprensa Nacional- Casa da Moeda, 1994.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental:** Uma Introdução à Filosofia Fenomenológica. Lisboa, Phainomenon e Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, (Tradução Diogo Falcão ferrer). 2008.

KLUTH, V. S. **Estruturas da álgebra**: investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. 2005. 192 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2005.

KNUTH, D. E. **The art of computer programming**.2d ed. Massachusetts. USA: Addison-Wesley Publishing, 1979.

LANDAU, E.**Foundations of Analysis**. Nova York: Chelsea, 1951.

LEIBNIZ, G. W. **Discurso de metafísica e outros textos**. São Paulo: Abril Cultural, 1983. (Coleção Os pensadores). Tradução Marilena Chauí e Carlos Lopes de Mattos.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2002. (Volume 1).

LONGO, G. The Mathematical Continuum: From intuition to logic. In: PETITOT, J et al. (Ed.). **Naturalizing Phenomenology**: Issues in Contemporary Phenomenology and Cognitive Science, Stanford, California: Stanford University Press, 1999. p. 401- 428.

LOPES, P. C. R. **Construções dos Números Reais**. 2006. 150 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira. Funchal, Portugal, 2006.

MONDINI, F.. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. In: BAUMANN, A. P. P; MIARKA, R., MONDINI, F.; LAMMOGLIA, B; BORBA, M.C..(Org.). **Maria em Forma/ação**. [S.I.], 2010, p. 1-14.

NYIMI, D. R. S. **Computabilidade e Limites da Matemática das Teorias Físicas**: Aplicações em Sistemas Elétricos de Potência. 2011. 160 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.

PEANO, G. **Formulaire de Mathématiques**. Paris: Georges Carréet C. Naudeditores, 1901.

PIAUÍ, W. S. Leibniz e as Duas Faces do Labirinto do Contínuo: uma introdução. **Argumentos**, Fortaleza, ano2, n. 3, p. 16-24. 2010. Disponível em: <http://www.periodicos.ufc.br/index.php/argumentos/article/viewFile/200/200>. Acesso em: 01 jun. 2015.

PIETTRE, B. Verité et Sens. **Revista Pesquisa Qualitativa** SE&PQ, São Paulo, n. 1, p. 27-72, 2005.

RUSSELL, B. **Introdução à Filosofia da Matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966.

RUSSEL, B. **The Principles of Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903.

SBARDELLINI, L. A. **O Continuum, os Reais e Conceito de Homogeneidade**. 2005. 123 p. Tese (Doutorado em Filosofia) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

SCURI, A. E. **Fundamentos da Imagem Digital**. Tecgraf/PucRio, 2002. Livro para aulas.

SILVA, J. J. **Filosofia da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

Turing, A. M. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. **Proceedings of the London Mathematical Society**, Series 2, n.42, p 230-265. 1936.

WEYL, H.**The Continuum:** A critical examination of the foundation of Analysis. Mineola/N.Y. – EUA. DoverPublications, 1994.