

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**O NEXO “GEOMETRIA FRACTAL – PRODUÇÃO DA CIÊNCIA CONTEMPORÂNEA”
TOMADO COMO NÚCLEO DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO**

Tânia Baier

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Tese de Doutorado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos-Científicos para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)

2005

Comissão Examinadora

Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Maria Inês Fini

Silvio Donizetti de Oliveira Gallo

Suzinei Aparecida Siqueira Marconato

Ubiratan D'Ambrósio

Tânia Baier

Rio Claro, 21 de fevereiro de 2005.

Resultado: Aprovada

Para os apaixonados pela Educação Matemática

Agradeço a todos que contribuíram para a criação deste trabalho e especialmente pela orientação cuidadosa da Prof^a. Dr^a. Maria Aparecida Viggiani Bicudo.

RESUMO

Nesta tese é desenvolvida a proposta de trabalhar a Matemática no Ensino Básico segundo as concepções da ciência contemporânea. Tomou-se a Física Clássica e a Moderna e as respectivas teorias matemáticas por elas utilizadas, buscando-se explicitar as visões de homem, de mundo, de conhecimento e de ciência por elas assumidas. Privilegiou-se, nesta análise, a contraposição da ciência mecanicista em relação à sistêmica. Na primeira, o destaque sendo dado à separação sujeito/objeto, à representação do espaço físico como sendo apenas o euclidiano, ao cálculo exato, priorizando, portanto, os aspectos quantitativos da Matemática. A metáfora que diz dessa concepção é a da *máquina*. Na sistêmica, a metáfora que a expressa é a da *rede*, que diz da impossibilidade de separar o sujeito que conhece do objeto conhecido e da inexistência de uma hierarquia de *a priori*s. Nesta abordagem, foi destacada a importância dos padrões que emergem pelos processos iterativos, os quais geram, também, objetos fractais. O tratamento matemático estende-se do quantitativo ao qualitativo. Com a emergência do pensamento sistêmico, dá-se conta da ameaça que se anuncia à permanência da vida no planeta. Nesta investigação buscou-se trabalhar o núcleo do que está na ameaça, entendida como decorrente de praticar-se a postura mecanicista à exaustão, mostrando-se uma possibilidade de neutralizá-la por meio da adoção da postura fenomenológica, pela realização de *ser-se cuidado*. Ele foi tomado como central à atividade educadora articulada com a visão sistêmica da ciência.

Palavras-chave: pensamento moderno, pensamento sistêmico, caos, fractais

ABSTRACT

This thesis develops a proposition about working with Mathematics in Basic Teaching (Elementary and High School), according to the conceptions of contemporary science. Classical and Modern Physics, as the mathematical theories used by those, were taken, searching to explain the visions of man, of world, of knowledge and science assumed by them. This analysis privileges the confrontation of mechanistic science in relation to the systemic science. In the first one, the emphasis is given to the separation subject/object, to the representation of physical space as only being the Euclidian one, to the exact calculation, thus prioritizing the quantitative aspects of Mathematics. The metaphor which talks about this conception is the *machine*. In the systemic science, the metaphor which express it is the *web*, which talks about the impossibility of separating the knowing subject from the known object and the inexistence of a hierarchy of *a priori*. This approach has emphasized the importance of patterns emerged by the iterative processes which generate, also, fractal objects. The Mathematical treatment extend from quantitative to qualitative. With the emergency of systemic thought, one take into account the threat announced to the permanence of life on the planet. This research aimed to work over what lays in that threat, understood as a result of practicing the mechanistic attitude to the exhaustion, showing a possibility of neutralize it by the adoption of the phenomenological posture, by the achievement of *one-self-being care*. It was taken as central to the educational activity, articulated with the science systemic vision.

Key words: modern thought, systemic thought, chaos, fractals.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse on développe la proposition de traiter la Mathématique dans « Ensino Básico » (l'enseignement primaire et secondaire) selon les conceptions de la science contemporaine. On a pris la Physique Classique et la Physique Moderne et ses respectives théories mathématiques pour elles utilisées, en cherchant expliciter les visions de l'homme, du monde, de la connaissance et de la science pour elles assumées. On a privilégié, dans cette analyse, l'objection de la science mécaniciste par rapport à la science systématique. Dans la première, on met en relief la séparation sujet/objet, la représentation de l'espace physique comme n'étant que l'eulidien, le calcul exact, donc en priorisant les aspects quantitatifs de la Mathématique. La métaphore qui parle de cette conception est celle de la *machine*. Dans la science systématique, la métaphore qui l'exprime est celle du *réseau*, qui parle de l'impossibilité de séparer le sujet qui connaît de l'objet connu, et de l'inexistence d'une hiérarchie d'*a priori*s. Dans cette approche, on a mis en relief l'importance des standards qui émergent des procès itératifs, auxquels génèrent, aussi, des objets fractals. Le traitement mathématique se prolonge du quantitatif au qualitatif.

Avec l'émergence de la pensée systémique, on s'aperçoit de la menace annoncée à la permanence de la vie sur la planète. Dans cette recherche on a cherché de travailler le noyau de ce qui est menacée, ceci compris comme résultat de l'act de se pratiquer l'attitude mécaniciste à l'exhaustion, en montrant une possibilité de la neutraliser par l'adoption de l'attitude phénoménologique, par la réalisation de *s'être-soin*. Il a été pris comme central à l'activité éducative articulée avec la vision systématique de la science.

Mots clés: moderne pensée, systématique pensée, chaos, fractals.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Representação em perspectiva no Renascimento	24
Figura 2: Rafael. <i>A Escola de Atenas</i>	25
Figura 3: A distorção espaço-temporal	36
Figura 4: Munch. <i>O Grito</i>	78
Figura 5: Da Vinci. <i>Mona Lisa</i> (detalhe)	79
Figura 6: Cézanne. <i>No Parque de Château Noir</i>	81
Figura 7: A complexidade do movimento de três corpos	89
Figura 8: O atrator de Lorenz	95
Figura 9: A transformação do padeiro – o gato de Arnold	97
Figura 10: A ferradura de Smale	99
Tabela 1: As vinte primeiras iterações de $x \rightarrow x^2 - 2$	104
Figura 11: Gráfico das vinte primeiras iterações de $x \rightarrow x^2 - 2$	104
Figura 12: Diagrama da teia de aranha de $x \rightarrow 2x + 1$	105
Figura 13: Diagrama da teia de aranha de $x \rightarrow -1/2x$	106
Figura 14: Diagrama da teia de aranha de $x_{n+1} \rightarrow 2,8 x_n (1 - x_n)$	107
Figura 15: Diagrama da teia de aranha de $x_{n+1} \rightarrow 3,2 x_n (1 - x_n)$	108
Figura 16: Diagrama da teia de aranha de $x_{n+1} \rightarrow 4 x_n (1 - x_n)$	109
Figura 17: O primeiro diagrama de bifurcação construído por May	109
Figura 18: Mapa logístico com valores de k entre 0 e 4	110
Figura 19: Mapa logístico com valores de k variando entre 3 e 4	112
Figura 20: Mapa logístico com valores de k variando entre 3,83 e 3,855	112
Figura 21: Paisagem criada via computacional utilizando <i>Geometria Fractal</i>	114
Figura 22: O atrator de Hénon	117
Figura 23: O conjunto de Cantor	118
Figura 24: O conjunto de Cantor no mapa de Smale da ferradura	118
Figura 25: Iterações iniciais das colunas da escada do diabo	121
Figura 26: A escada do diabo (função de Lebesgue)	121
Figura 27: A curva de Peano – Iteração 0	122
Figura 28: A curva de Peano – Iteração 1	122
Figura 29: O padrão da curva de Peano	122
Tabela 2: Primeiras iterações da curva de Peano	123
Figura 30: A curva de Hilbert	124
Figura 31: O kolam Serpente	124

Figura 32: A <i>curva de Sierpinski</i>	124
Figura 33: Iterações iniciais do <i>triângulo de Sierpinski</i>	127
Figura 34: A estrutura do <i>triângulo de Sierpinski</i>	127
Figura 35: O <i>conjunto de Mandelbrot</i>	129
Figura 36: O <i>conjunto de Mandelbrot</i> ampliado.....	129
Figura 37: Aqui Deus cria círculos, ondas e fractais	130

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	APRESENTANDO O TEMA INVESTIGADO	11
1.2	DELINEAMENTO DAS IDÉIAS BÁSICAS E MODOS DE ABORDAR O INTERROGADO	13
2	A CIÊNCIA MODERNA:	
	SOLO ONDE AS DÚVIDAS E AS INTERROGAÇÕES PERTINENTES	
	À CIÊNCIA CONTEMPORÂNEA SE INSTALAM	20
2.1	A CONCEPÇÃO GALILEANA	20
2.2	A VISÃO DE MUNDO CARTESIANA	22
2.3	A MÁQUINA NEWTONIANA	28
2.4	A DESESTRUTURAÇÃO DO EDIFÍCIO DA CIÊNCIA MODERNA	31
3	AS CONCEPÇÕES SOBRE MUNDO E CIÊNCIA	
	NAS COLUNAS SUSTENTADORAS DA FÍSICA DO SÉCULO XX	34
3.1	AS TEORIAS EINSTEINIANAS	34
3.2	A TEORIA QUÂNTICA	39
4	A CONCEPÇÃO CONTEMPORÂNEA DO MUNDO: A COMPLEXIDADE SISTÊMICA	58
4.1	AS DUAS VERTENTES PRESENTES NA BIOLOGIA:	
	O MECANICISMO E A VISÃO SISTÊMICA	58
4.2	A AMEAÇA CARTESIANA E SEU ANTÍDOTO: O <i>CUIDADO</i>	69
4.3	EXPRESSÕES DA TOTALIDADE NA LINGUAGEM ARTÍSTICA	75
5	A BUSCA PELA DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA CONCEPÇÃO SISTÊMICA DO MUNDO	82
5.1	ENTRANDO NO TERRENO DA CONSTRUÇÃO	
	DAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	82
5.2	O AVANÇO DAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	85
5.3	EXPLICITANDO A LINGUAGEM DOS FRACTAIS	112
6	COMPREENDENDO O PENSAMENTO SISTÊMICO E A EDUCAÇÃO COMO <i>POÍESIS</i>	131
6.1	EM BUSCA DE UMA SÍNTESE, AINDA QUE DE TRANSIÇÃO	131
6.2	POSSIBILIDADE E URGÊNCIA DE TRABALHAR A <i>GEOMETRIA FRACTAL</i>	
	COMO NÚCLEO DA MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO	139
	BIBLIOGRAFIA	143

1 INTRODUÇÃO

1.1 APRESENTANDO O TEMA INVESTIGADO

Profundas transformações estão acontecendo na paisagem cultural planetária, novos rumos são traçados, diferentes desafios são enfrentados, mudanças acontecem com velocidade vertiginosa em todas as áreas do conhecimento e comparecem nas decisões políticas e nas pequenas ações do cotidiano das pessoas. No mundo acadêmico soam alertas sobre a alienação e obsolescência dos currículos, em que a Matemática seria constituída por conteúdos desinteressantes para o educando.” O grande desafio é desenvolver um programa dinâmico, apresentando a ciência de hoje relacionada a problemas de hoje e ao interesse dos alunos” (D’AMBROSIO, 1996, p. 32).

Tal desafio tem norteado minha atividade docente na Universidade Regional de Blumenau, onde atuo como professora de *Pesquisa Operacional* no curso de Administração de Empresas, de *Cálculo Diferencial e Integral* e *História da Matemática* na Licenciatura em Matemática, na Pós-graduação em nível de especialização em Educação Matemática e em cursos de formação continuada para professores de Matemática.

Foco, com especial interesse, aspectos da *História da Matemática* do século XX e, juntamente com meus alunos, tenho investigado a possibilidade de discutir no Ensino Básico a Matemática da atualidade. Na relação dialógica que estabelecemos, os alunos balizam minhas pesquisas, utilizando em sala-de-aula minhas sugestões de atividades e apontando obstáculos nas atividades de ensino e no processo de aprendizagem, uma vez que, devido à carência de professores nas escolas do Ensino Básico, eles já atuam como docentes, enquanto ainda são estudantes da Licenciatura.

Um dos ramos da Matemática construído durante o século XX, a *Pesquisa Operacional*, que compreende a ferramenta matemática denominada *Programação Linear*, foi tema de minha dissertação de mestrado, voltada para o curso de Administração de Empresas. Minhas investigações continuaram no sentido de trabalhar a *Programação Linear* no Ensino Médio uma vez que, apesar de estar relacionada com o tratamento computacional do grande número de variáveis envolvidas nas questões estudadas, constatei que soluções de problemas, com duas variáveis de decisão, são possíveis com a utilização de conteúdos matemáticos tratados no Ensino Médio.

Durante minha prática docente, uma pergunta recorrentemente posta, é: *Os conteúdos matemáticos que constituem os currículos escolares estão atualizados?* Tal

questionamento acontece pelo fácil acesso às informações acerca dos avanços científicos e, também, pela realidade virtual onde vivemos.

Os objetos matemáticos conhecidos como fractais, formas belas, coloridas e dotadas de movimento, despertam especial fascínio e curiosidade. Os fractais aparecem em filmes de ficção científica, sítios da Internet, jogos eletrônicos, programas educativos na televisão e revistas populares de divulgação científica, proporcionando prazer estético e conduzindo professores e estudantes às indagações sobre as suas relações com a Matemática. Motivam o pensar sobre o distanciamento entre os conteúdos matemáticos estudados nas escolas e o mundo onde vivemos. Geram, com isso, preocupações com a ausência, nos currículos escolares, dos conteúdos matemáticos construídos nas últimas décadas.

Na minha atividade docente, acompanhei o desenvolvimento de trabalhos de conclusão de disciplinas e também de monografias relacionadas com os conteúdos matemáticos que fundamentam a *Geometria Fractal*. Vivências em sala de aula mostram que fractais relacionados com figuras geométricas clássicas, tais como segmentos de retas, quadrados e triângulos, são facilmente construídos, requerendo apenas a utilização de régua e compasso. Fractais elaborados com recursos computacionais, dotados de movimento e intensamente coloridos, em um primeiro olhar, não aparentam possuir qualquer vínculo com os conteúdos matemáticos que integram os currículos escolares. Porém, uma leitura mais cuidadosa revela que a construção desses objetos envolve conceitos matemáticos estudados desde o Ensino Básico.

Minha preocupação com a busca de um trabalho docente atualizado leva-me a procurar modos, bem como respectivos fundamentos filosóficos e científicos, de incorporar conteúdos da Matemática contemporânea no Ensino Básico. O termo *incorporar* é aqui utilizado no sentido de “unir, reunir, juntar, em um só corpo ou um só todo [...] Entrar a fazer parte; ingressar” (FERREIRA, 1997). Nesse sentido, apresenta-se a possibilidade de incorporar aspectos das teorias do caos e dos fractais aos conteúdos curriculares do Ensino Básico sem desconsiderar o currículo tradicional, articulando conteúdos clássicos e contemporâneos.

Penso que tais ligações podem ser procuradas por meio de uma visão abrangente do desenvolvimento histórico da ciência contemporânea, focando a possibilidade de seu vínculo com a Matemática que integra o currículo do Ensino Básico. A palavra *possibilidade* é aqui entendida no sentido de apresentar como possível aquilo que pode acontecer, ou praticar-se e não do ponto de vista denominado pelo dicionário como *físico*: “o que satisfaz às leis gerais da experiência, o que não está em contradição com nenhum fato ou lei empiricamente estabelecida” (FERREIRA, 1997).

Trata-se da possibilidade de abertura para o que pode acontecer e ser realizado por professores e alunos, ao estarem com a Matemática em uma postura de interrogação sobre aquilo que ela diz e faz no mundo em que vivem. Mundo esse que é uma totalidade de idéias, que é dinâmico e onde investigador e investigado fazem parte de uma mesma trama.

Portanto, nessa perspectiva, experiências que tenham por meta comprovar *verdades*, baseadas em teorias tão somente, ou em tratamentos estatísticos, não encontram ressonância, uma vez que se limitam a explicar dados ocorridos e prever ocorrências futuras. Minha postura nesta pesquisa é a de perseguir uma interrogação, procurando compreendê-la, bem como compreender os desdobramentos possíveis no cenário do ensino e da aprendizagem da Matemática do Ensino Básico.

Voltando às preocupações que habitam meu pensar, continuo expondo minhas perguntas:

Seria o estudo dos fractais uma resposta às críticas efetuadas a respeito do afastamento dos conteúdos matemáticos que constituem o currículo escolar da realidade do mundo? Seria o ensino dos fractais um modo de realizar, na prática da sala de aula, a interdisciplinaridade?

Essas indagações, ao serem pouco a pouco compreendidas ao longo de minha prática docente reflexiva, transformaram-se na interrogação:

TRABALHAR A INCORPORAÇÃO DA GEOMETRIA FRACTAL NO CURRÍCULO TRADICIONAL DO ENSINO BÁSICO POSSIBILITARIA UMA COMPREENSÃO DA VISÃO DE MUNDO QUE PERMEIA A CONSTRUÇÃO DA CIÊNCIA CONTEMPORÂNEA?

1.2 DELINEAMENTO DAS IDÉIAS BÁSICAS E MODOS DE ABORDAR O INTERROGADO

A pergunta condutora da investigação é enfocada mediante a explicitação da visão de mundo construída a partir de um pensar crítico e reflexivo do que as ciências naturais dizem do mundo.

Nos procedimentos desta investigação, o rigor na sistematicidade das análises e interpretações efetuadas é buscado em autores que ofereceram contribuições decisivas nas ciências específicas. Além disso, registraram em textos escritos as descrições de suas vivências, refletindo sobre elas e efetuando interpretações. Trata-se, então, de um movimento histórico, se por *História* entende-se, com Bicudo (2003, p. 65), que

a interpretação é fundada (preenche-se de sentido) na experiência vivida por aquele que interpreta sua própria experiência [...] As obras humanas,

portanto, são históricas e sociais, de tal maneira que ele (o eu) se conhece de modo indireto, via as expressões de suas ações, restringe a si mesmo, mas se estende, contextualizadas social e historicamente, preservadas e veiculadas pela tradição. É aqui que se encontra o significado da hermenêutica. Ela permite, ao mesmo tempo, que o intérprete compreenda o mundo (realidade onde vive, da qual partilha e a qual fabrica) e se compreenda (enquanto pessoa individual e como ser humano).

Nesta investigação começa-se com um breve relato histórico de alguns ramos da ciência, buscando a visão de mundo que norteia a construção da ciência moderna e os princípios filosóficos da ciência contemporânea, sendo focados aqueles ligados à compreensão da complexidade dos fenômenos da vida. Uma visão histórica ampla permitirá a compreensão da escolha de determinados conteúdos matemáticos presentes nos currículos escolares, uma vez que sua eventual obsolescência tem sido questionada.

Nesta pesquisa é destacado o conceito de *incerteza*, uma vez que muitos pesquisadores têm afirmado que esse conceito, instaurado no âmago do pensamento contemporâneo a partir da formulação da teoria quântica, evidencia a desestruturação da ciência moderna produzida por Galileu, Descartes, Newton e seguidores.

A investigação é dirigida para as pesquisas científicas relacionadas com os temas que, nesse início do século XXI, comparecem nos jogos computacionais e nos filmes de ficção científica, onde personagens assumem versões massa/energia e acontecem interações homens/máquinas. No mundo vivido por nossos jovens se fazem presentes diversas criações científicas contemporâneas, tais como a teoria quântica, a teoria da relatividade, a teoria dos fractais e a do caos.

Nas diversas culturas, diferentes visões de mundo permeiam o desenvolvimento do pensamento científico. A presente pesquisa, inicialmente, se volta para a civilização ocidental européia, solo da ciência moderna. Tal enfoque se justifica pelo fato de a Matemática, apresentada aos estudantes do Ensino Básico, relacionar-se com os conceitos matemáticos utilizados para a construção dessa ciência, originários nas civilizações mediterrâneas e européias.

Em seguida são focadas as descobertas da *Física Moderna*, nas primeiras décadas do século XX. Essas descobertas levam a uma revisão da concepção que o homem faz sobre o universo e de seu relacionamento com ele, bem como da maneira pela qual pensa sobre si mesmo em relação ao mundo onde vive. Conduzem uma releitura dos princípios filosóficos que se encontravam definidos no legado da ciência moderna, tais como de espaço e tempo absolutos, objetividade, matéria, localidade, determinismo e causalidade.

Werner Heisenberg (1999, p. 65), Prêmio Nobel em Física, em 1932, por sua contribuição para o desenvolvimento da Mecânica Quântica, conhecido de modo destacado pelo *princípio da incerteza*, constata que

mais de um quarto de século se passou para, da idéia primeira do *quantum* de energia, chegar-se a um entendimento real das leis teóricas da mecânica quântica. Isso indica uma mudança profunda que teve de ocorrer nos conceitos fundamentais que dizem respeito à realidade, antes que se pudesse entender a nova situação.

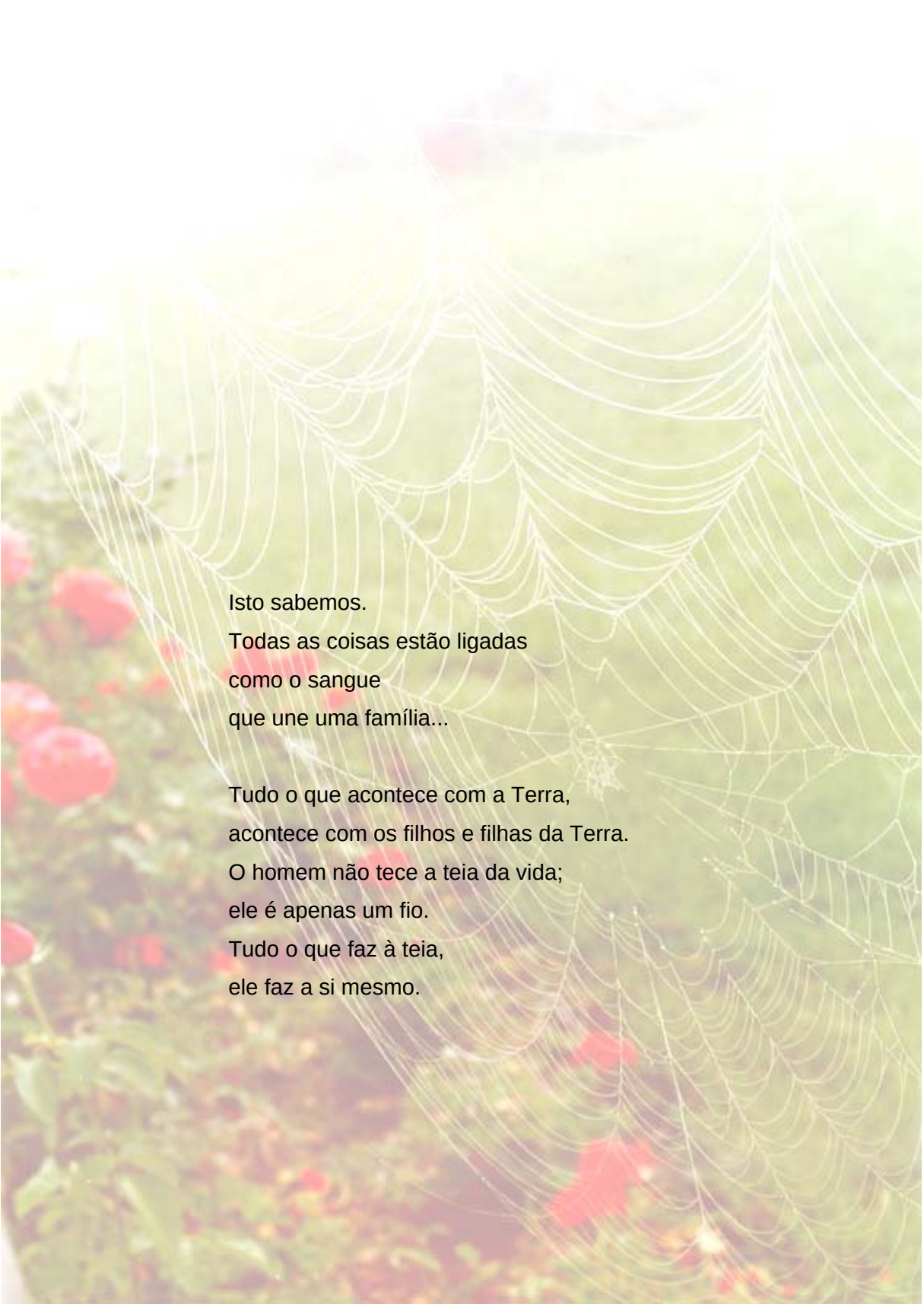
Considerando que concepções filosóficas diferenciadas existem nas diversas civilizações, Heisenberg (1999, p. 280) destaca uma civilização não ocidental, observando que

a grande contribuição que o Japão trouxe no campo da física teórica, desde a última guerra, talvez possa ser vista como uma indicação de um certo relacionamento entre as idéias filosóficas da tradição do Extremo Oriente e o conteúdo filosófico da teoria quântica. É possível que seja mais fácil adaptar-se ao conceito quântico de realidade quando não se viveu o modo ingênuo do pensamento materialista, que ainda prevalecia na Europa nas primeiras décadas deste século.

As ligações entre antigas filosofias orientais e as descobertas da Física do século XX são mostradas por Fritjof Capra, pesquisador em Física de alta energia, o qual, em suas obras sobre as implicações filosóficas da ciência contemporânea, constata uma visão de mundo, emergindo a partir da teoria quântica, uma postura que denomina ecológica, esclarecendo que não se trata apenas de Educação Ambiental, mas sim de uma *ecologia profunda*. Essa visão de mundo tem recebido diversas denominações, tais como organísmica, sistêmica, holística. Importante notar que

falar em uma abordagem holística sempre causa alguns arrepios no leitor ou no ouvinte. Assim como falar em transdisciplinaridade, em etnomatemática, em enfoque sistêmico, em globalização e em multiculturalismo [...] Essencialmente, todas estas denominações que causam arrepios são praticamente a mesma coisa. Salvo nuances, todas refletem o amplo esforço de contextualizar nossas ações, como indivíduos e como sociedade, num ideal de paz e de uma humanidade feliz (D'AMBROSIO, 1996, p. 9).

A estrutura filosófica e espiritual da postura sistêmica, que Capra denomina *ecologia profunda*, tem sido exposta em diversas ocasiões ao longo da história humana. Na cultura indígena Seattle, afastada da herança cartesiana, o entendimento da interdependência completa de todos os fenômenos se expressa na *metáfora da teia*, explicitada no texto do pronunciamento do Chefe Seattle, adaptado por Ted Perry, que Capra (1998, p. 9) transcreve:



Isto sabemos.
Todas as coisas estão ligadas
como o sangue
que une uma família...

Tudo o que acontece com a Terra,
acontece com os filhos e filhas da Terra.
O homem não tece a teia da vida;
ele é apenas um fio.
Tudo o que faz à teia,
ele faz a si mesmo.

Nos dias atuais, gradativamente acontece um entendimento pré-predicativo de uma completa junção de tudo. Porém, uma postura

ecológica somente surgirá quando aliarmos ao nosso conhecimento racional uma intuição da natureza não-linear de nosso meio ambiente. Tal sabedoria intuitiva é característica das culturas tradicionais, não-letradas, especialmente as culturas dos índios americanos, em que a vida foi organizada em torno de uma consciência altamente refinada do meio ambiente (CAPRA, 2000, p. 39).

Capra (2000, p. 403) identifica no taoísmo “uma das mais profundas e belas expressões de sabedoria ecológica, ao enfatizar a unicidade fundamental e a natureza dinâmica de todos os fenômenos naturais e sociais”. Considera que uma filosofia de fluxo e mudança é ensinada no século V a.C. por Heráclito e que Francisco de Assis defende pontos de vista e uma ética profundamente ecológicos. “A sabedoria da ecologia profunda também é evidente em muitas obras da filosofia ocidental, incluindo as de Baruch Spinoza e Martin Heidegger. É encontrada em toda cultura americana nativa e foi expressa por poetas” (CAPRA, 2000, p. 403).

D'Ambrosio (1996, p. 21), avaliando as várias dimensões na produção do conhecimento, destaca como sendo

as mais reconhecidas e interpretadas nas teorias do conhecimento, a sensorial, a intuitiva, a emocional e a racional [...] o conhecimento religioso é favorecido pelas dimensões intuitiva e emocional, enquanto o conhecimento científico é favorecido pelo racional, e o emocional prevalece nas artes. Naturalmente essas dimensões não são dicotomizadas nem hierarquizadas, mas são complementares. Desse modo, não há interrupção, [...] as dicotomias corpo/mente, matéria/espírito, manual/intelectual e outras tantas que se impregnaram no mundo moderno são meras artificialidades.

Essas dicotomias constituem pressupostos básicos da epistemologia cartesiana, a qual se mostra insuficiente para nortear a construção de uma atitude pedagógica que contemple a visão de mundo impregnada na ciência contemporânea. Nesta pesquisa são buscados subsídios na direção indicada por Capra, para quem a fenomenologia mostra-se como possibilidade de assumir tal concepção.

Considerando a complexidade do mundo, constata Heisenberg (1999, p. 153) que ele “nos aparece como um complexo tecido de fenômenos, no qual conexões de tipos diversos alternam-se ou se sobrepõem ou combinam-se e, em consequência, determinam a tessitura do todo”. Referindo-se aos fenômenos da vida, conclui, na década de 1950, que “em biologia o grau de complexidade é tão desencorajador que, presentemente, não se pode imaginar qualquer conjunto de conceitos em que a inter-relação entre eles seja tão bem definida a ponto de permitir uma correspondente representação matemática” (HEISENBERG, 1999, p. 150).

Na época em que Heisenberg externa suas considerações sobre as dificuldades de construção de modelos matemáticos que descrevam a complexidade da vida, a elucidação da estrutura física do DNA fomenta as pesquisas biológicas. A partir de então, a *Biologia Molecular* torna-se, entre os cientistas da Biologia, uma maneira de pensar difundida e exclusiva. Na segunda metade do século XX, muitas questões resistem à abordagem mecanicista da *Biologia Molecular*. Até a criação de técnicas matemáticas para lidar com a complexidade dos fenômenos da vida, nenhuma teoria sistêmica havia sido aceita como científica. Os pensadores sistêmicos percebem que

as interações simultâneas de muitas variáveis geram os padrões de organização característicos da vida, mas eles careciam dos meios para descrever matematicamente a emergência desses padrões. Falando de maneira técnica, os matemáticos de sua época estavam limitados às equações lineares, que são inadequadas para descrever a natureza altamente não-linear dos sistemas vivos (CAPRA, 1998, p. 75).

Conceitos e técnicas matemáticos para lidar com a complexidade são apresentados inicialmente por Henri Poincaré. Porém, não acontecem progressos na sua época por falta de tecnologia computacional e pelo desinteresse dos cientistas em fenômenos irregulares, pois que se buscavam, desde Galileu, leis científicas mecanicistas fundadas em dados quantitativos. Apenas na segunda metade do século XX ocorre a abordagem da complexidade por meio do aspecto qualitativo da Matemática. Entretanto, nos currículos escolares são estudados apenas alguns tópicos da Matemática, aqueles que possibilitaram a criação da ciência ocidental moderna, uma vez que “o ensino é herdeiro de uma tradição, mesmo nas matemáticas: não se apresenta senão o que se sabe fazer, o que está bem compreendido e serviu bastante, passando em silêncio sobre os pontos obscuros e os fatos constrangedores” (EKELAND, 1993, p. 38).

Hoje, no Ensino Médio, é trabalhada a parte da *Física Clássica* denominada *Dinâmica de Newton* e podem ocorrer mal-entendidos com a denominação teoria dos sistemas dinâmicos. A expressão *Matemática da complexidade* induz o entendimento de algo difícil, além de remeter ao conceito de *número complexo*. Com essas considerações, é adotada nesta pesquisa a denominação menos técnica e mais popular: *Matemática do caos*. Capra (1998, p. 99) esclarece:

Para evitar confusões, é útil ter sempre em mente o fato de que a teoria dos sistemas dinâmicos não é uma teoria dos fenômenos físicos, mas sim, uma teoria matemática cujos conceitos e técnicas são aplicados a uma ampla faixa de fenômenos. O mesmo é verdadeiro para a teoria do caos e para a teoria dos fractais, importantes ramos da teoria dos sistemas dinâmicos.

Analisando os conteúdos matemáticos construídos na contemporaneidade, que poderiam constituir os currículos escolares,

pode-se prever que na matemática do futuro serão importantes o que hoje se chama matemática discreta e igualmente o que se chamavam casos *patológicos*, desde a não-linearidade até a teoria do caos, fractais, *fuzzies*, teoria dos jogos, pesquisa operacional, programação dinâmica. Lamentavelmente isso só é estudado em algumas especialidades de matemática aplicada. Justamente por representar a matemática do futuro, é muito mais interessante para o jovem. Os problemas tratados são mais interessantes, a visualização é no estilo moderno, parecido com o que se vê em TV e nos computadores. O mais importante é destacar que toda essa matemática é acessível até no nível primário (D'AMBROSIO, 1996, p. 59, grifos do autor).

Esta investigação procura evidenciar as relações entre os fractais e a teoria do caos e mostrar a possibilidade de estabelecer ligações com os conteúdos matemáticos que atualmente constituem o currículo do Ensino Básico. Essa abordagem, entretanto, não constitui um tratamento da teoria dos fractais tomada em sua totalidade, mas enfoca aspectos dessa teoria relacionados com a *Ecologia*.

A abordagem da *Matemática do caos* traz para o professor de Matemática o desafio de trabalhar a atualidade na sala de aula, pois “é necessário estarmos sempre abertos a novos enfoques, a novas metodologias, a novas visões do que é ciência e da sua evolução [...]” (D'AMBROSIO, 2001, p. 18).

Na estrutura desta tese, aspectos históricos e filosóficos relacionados com a construção da ciência moderna constituem o Capítulo 2, possibilitando uma visualização da lógica do pensamento da época moderna, que se estende do final da Idade Média até o início do século XX. No Capítulo 3 são abordadas as duas colunas de sustentação da Física do século XX, a saber, as teorias einsteinianas e quântica. A seguir, no Capítulo 4, também são enfocados aspectos históricos e filosóficos, porém da ciência contemporânea. Posteriormente, no Capítulo 5, são destacados alguns temas da Matemática ligados à ciência contemporânea passíveis de comporem o currículo do Ensino Básico. Vai além da citação desses tópicos, penetrando na formalização do seu desenvolvimento teórico, sem perder de vista o contexto onde são trabalhados: o do Ensino Básico. Finalizando, é apresentado o entendimento de pensamento sistêmico e Educação como *poíesis*, sendo procurada uma *síntese*, ainda que *de transição*. De acordo com Bicudo, em sessão de orientação, a “*síntese de transição* significa que não se trata de uma síntese fechada, mas de interpretações articuladas numa totalidade que, no movimento contínuo de investigação, escorregam para compreensões e interpretações que se aglutinam, que se separam, caminhando a outras sínteses, sempre de transição”.

2 A CIÊNCIA MODERNA:

SOLO ONDE AS DÚVIDAS E INTERROGAÇÕES PERTINENTES À CIÊNCIA CONTEMPORÂNEA SE INSTALAM

Este capítulo trata das três principais concepções de ciência que estruturam o denominado pensamento da ciência moderna e busca contextualizar as questões que, aos poucos, vão sendo colocadas, solicitando por soluções que essas concepções já não conseguem equacionar.

Tem-se claro que essas três concepções não se constituem totalidades estanques, mas que suas idéias se interpenetram e perduram na trama do pensamento científico do mundo, presentes, inclusive, entre nós, hoje.

2.1 A CONCEPÇÃO GALILEANA

No decorrer da história da humanidade, em todas as épocas, dos mais diversos modos, tem sido procurado o misterioso código da natureza. A contribuição decisiva para o entendimento de que a natureza se comporta de acordo com leis matemáticas acontece com Galileu Galilei (1564-1642) que se vale de modo sistemático do método experimental, procurando verificar, por meio de repetidas experimentações, como os movimentos ocorrem, fundando a *Mecânica* dos corpos em queda livre e estabelecendo os fundamentos da *Dinâmica*.

Galileu assume que os fenômenos devem ser observados sem a interferência de princípios religiosos e filosóficos pré-estabelecidos e que a garantia do rigor da pesquisa científica reside na possibilidade de verificação experimental e na utilização da linguagem matemática para descrever os fenômenos da natureza.

Apoiando-se nas criações geométricas das antigas civilizações mesopotâmica, egípcia e grega, cujas obras são sintetizadas por Euclides, Galileu formula as suas leis a partir do entendimento da natureza como sendo um livro escrito em caracteres matemáticos, aguardando leitores capazes de compreendê-lo. Na época quando os que faziam ciência eram denominados filósofos, ao invés de pesquisadores, como na atualidade são conhecidos, e quando a Física era denominada Filosofia Natural, Galilei (1999, p. 46) assim expressa seu entendimento:

A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se

pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas [...].

Objetivando descrever matematicamente a natureza, Galileu estabelece que a ciência deve se restringir ao estudo de formas, quantidades e movimentos dos corpos materiais, propriedades que podem ser medidas. Essas propriedades dos corpos são passíveis de descrição com a Matemática disponível em sua época, de modo que Galileu associa o espaço físico ao espaço geométrico euclidiano, despojado de cores, odores e sabores.

Com essa sua maneira de abordar os fenômenos da natureza, uma nova postura diante do mundo é assumida e o conhecimento passa a ser construído a partir da observação da realidade, pela repetição sistemática de experiências e não mais resultante de especulações decorrentes de uma atitude contemplativa. Nessa visão de mundo, pesquisar cientificamente significa reduzir as observações às relações quantitativas, eliminando todas as qualidades sensíveis. Desse modo, o mundo da ciência se afasta do mundo onde vivemos, sentimos, raciocinamos e sofremos, substituindo-o por fórmulas geométricas. A natureza começa a ser entendida como passível de ser submetida a experimentações e o conhecimento obtido deste modo propicia o desenvolvimento de tecnologias, ocorrendo uma aliança entre a técnica e a ciência. A produção manufatureira, em fase de crescimento, demanda invenções que impulsionem a indústria e elas passam a ser proporcionadas por uma ciência que investiga o domínio das forças da natureza com a utilização de aparelhos técnicos. Desse modo, duas diretrizes que norteiam “o trabalho de Galileu – a abordagem empírica e o uso de uma descrição matemática da natureza – tornaram-se as características dominantes da ciência do século XVII e subsistiram como importantes critérios das teorias científicas até hoje” (CAPRA, 2000, p. 50).

Na mesma época, também ocorrem contribuições notáveis para a Matemática com Johannes Kepler (1571-1630), que analisa a imensa quantidade de dados astronômicos coletados por Tycho Brahe (1546-1601) durante duas décadas, procurando organizá-los segundo regras matemáticas, procurando uma organização oculta. O trabalho de Kepler culmina com o estabelecimento de suas três leis do movimento planetário, sendo que “a descoberta empírica dessas leis, a partir da massa de dados de Brahe, constitui um dos mais notáveis trabalhos de indução jamais feitos na ciência” (EVES, 1995, p. 357). São elas uma aplicação prática do estudo das secções cônicas efetuado pelos gregos na Antiguidade. Na avaliação de Gårding (1981, p. 71):

Desde o tempo de Apolônio que as secções cônicas têm uma carreira fantástica na Física. Kepler descobriu por volta de 1610 que os planetas se movem em elipses com o sol num dos focos, e Newton provou em seu livro *Principia Mathematica* ... (1686) que isso pode ser deduzido da

lei da gravitação e das leis da Mecânica. A pedra angular da Mecânica Quântica é o teorema espectral para transformações lineares auto-adjuntas, descendentes das secções cônicas.

Kepler conclui que os planetas percorrem órbitas elípticas, nas quais o Sol ocupa um dos focos, que o raio vetor ligando um planeta ao Sol percorre áreas iguais em intervalos de tempo iguais e que o quadrado do tempo para que um planeta complete sua elipse é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da órbita. Assim, os planetas aceleram quando se aproximam do Sol, sendo a sua aceleração diminuída quando dele se afastam. Kepler relaciona as velocidades dos planetas com as dimensões de suas órbitas. Quanto mais afastados eles estiverem, mais lentamente giram. Para o cálculo da área, ele a entendia como sendo constituída por “uma infinidade de pequenos triângulos com um vértice no Sol e os outros dois em pontos infinitamente próximos um do outro ao longo da órbita. Dessa forma ele pode usar uma forma tosca de calcular integral” (BOYER, 1996, p. 222).

A procura por uma ordem, a partir de uma massa de dados, revela uma postura diferente diante do mundo, consistindo em

procurar ver se eles se organizam por si mesmos segundo regras matemáticas. Essas regras podem ser qualificadas de empíricas. [...] As três leis de Kepler servem de paradigma, de exemplo perpetuamente repetido, para essa noção de regra empírica [...] Com Kepler, a astronomia cumpriu seu papel de parteira da ciência, revelando a existência de leis empíricas cuja forma é matemática (OMNÈS, 1996, p. 50).

Note-se que Galileu e Kepler valem-se de figuras geométricas já presentes na civilização grega e sistematizadas por Euclides para descrever os fenômenos da natureza. A concepção geométrica de espaço, como posta por Euclides, sustenta os cálculos efetuados por esses autores modernos e servem de modelo ao qual a natureza há de se adequar.

2.2 A VISÃO DE MUNDO CARTESIANA

Uma poderosa ferramenta matemática é criada no século XVII por René Descartes (1596-1650), a *Geometria Analítica*, fornecendo um outro enfoque para a *Geometria*, uma tradução de operações algébricas em linguagem geométrica.

A correspondência entre números reais e pontos de uma reta, entre pares de números naturais e pontos do plano e entre ternos de números reais e pontos do espaço possibilita cálculos com números interpretados geometricamente e solução de problemas geométricos reformulados como algébricos. Desse modo,

a natureza exterior reduz-se, então, segundo Descartes, à extensão. A extensão possui duas características: ela é indefinidamente divisível e, na medida em que podemos falar de pontos de extensão, cumpre considerá-los como não substituíveis reciprocamente, ou seja, tendo cada um sua localidade própria (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 204).

Descartes idealiza um método, fundamentado na razão e inspirado no rigor da Matemática, consistindo em decompor cada questão em outras mais simples, até que a solução se torne evidente, mediante a elaboração de uma síntese total, precisa e completa. Rejeitando a intervenção de sentimentos e emoções, seu sistema filosófico estabelece a razão como única instância capaz de, a partir do raciocínio lógico, garantir o encontro da verdade absoluta, tão certa quanto uma conclusão matemática, entendida como exata e definitiva.

Descartes consolida a concepção de Galileu ao buscar, na Matemática, a linguagem para o conhecimento científico, rejeitando as qualidades do objeto pesquisado obtidas pelas sensações do corpo. Assume que na natureza tudo é quantitativo, passível de ser medido.

A modernidade se deu com a incorporação do raciocínio quantitativo, possível graças à aritmética [tica = arte+ aritmos = números] feita com algarismos indo-arábicos e, posteriormente, com as extensões de Simon Stevin [decimais] e de John Neper [logaritmos], culminando com os computadores. Nessa evolução foi privilegiado o raciocínio quantitativo, que pode ser considerado a essência da modernidade (D'AMBROSIO, 2001, p. 29).

Na época de Descartes construíam-se, em larga escala, animais e bonecos dotados de movimento por meios mecânicos, tais como os relógios-cuco.

Sua época era a do barroco francês, quando os mecanismos de relojoaria foram amplamente utilizados para a construção de maquinários artísticos *semelhantes à vida*, que deleitavam as pessoas com a magia de seus movimentos aparentemente espontâneos. À semelhança da maioria de seus contemporâneos, Descartes estava fascinado por esses autômatos, e achou natural comparar o seu funcionamento com o dos organismos vivos (CAPRA, 1998, p. 67, grifos do autor).

Ele estabelece uma visão mecanicista da realidade, em que a natureza e o corpo humano são concebidos como máquinas, instaurando no pensamento ocidental uma visão de mundo, tanto entre cientistas como no entendimento popular: o modelo mecanicista cartesiano.

Mudando o foco do olhar, uma incursão pela *História da Arte* pode clarear a visão de mundo que permeia a construção da ciência moderna. Em cada período, a representação do espaço é feita segundo diferentes expressões artísticas. Bardonnèche (1997, p. 196) esclarece que “a partir dos dados do mundo que lhe é contemporâneo,

aqueles da ciência, da técnica, da sociedade e do pensamento [...] a representação é um dispositivo que recorre à experiência e à cultura de uma época” [...].

Na época de Descartes, a perspectiva é o sistema de representação do espaço que impera na arte. Merleau-Ponty (2000, p. 270) aponta o artificialismo que permeia o modo de ver o mundo nesse período: “no século XVII, havia coincidência entre o interesse pelo autômato e pela perspectiva. O que impressionava nesta, tal como no autômato, é que ela dava a ilusão da realidade”.

Para um entendimento da visão de mundo que impera na época cartesiana, a presente investigação busca apoio também na expressão artística, particularmente na técnica da perspectiva, por constituir a proposta artística que se encontra no contexto cultural da época da criação da ciência moderna. Para Bardonnèche (1997, p. 196), a perspectiva encontra sua expressão máxima quando

a Renascença, a partir dos conhecimentos gregos e de uma técnica baseada sobre as descobertas de Thales e de Euclides, inaugura um sistema de visão unitário. O espaço da perspectiva nasce da exploração óptica do mundo e corresponde a uma visão do homem como centro do universo.

Ostrower (1983, p.93) considera importante salientar que, na perspectiva as visões de espaço sempre se referem ao homem, pois nas obras pictóricas, o plano frontal de um espaço figurado indica a posição fixa do espectador,

pois é em função dele, a partir de sua posição individual fixa diante de um campo visual igualmente fixo e delimitado, que se estabelece o horizonte – à altura de seus olhos – e, nesse horizonte, o ponto de fuga. Na polaridade entre os dois, entre a posição do indivíduo e o ponto de fuga – ponto onde o finito se condensa e toca o infinito – estende-se uma linha imaginária atravessando o espaço. E em torno dessa linha gira o universo. É difícil renunciar a uma visão como a que prevaleceu no Renascimento, visão antropocêntrica e, ao mesmo tempo, altamente afirmativa para a humanidade. E ainda hoje é difícil reconhecer e aceitar que esse espaço não seja mais nosso, que não corresponda à realidade que vivemos agora.

Figura 1: Representação em perspectiva no Renascimento

Fonte: OSTROWER, 1983, p. 93

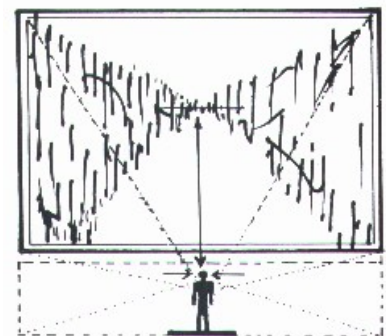




Figura 2: Rafael. *A Escola de Atenas*

Fonte: BECKETT, 1997, p. 128

Na técnica da perspectiva, os objetos são projetados sobre sucessivas superfícies de modo que, segundo seu distanciamento do observador, vão sofrendo alterações nas suas dimensões, diminuindo progressivamente para o fundo. O primeiro plano corresponde à posição do observador, completamente separado dos demais corpos. Linhas diagonais convergem para o ponto de fuga, localizado em um ponto de uma reta fixa, a linha do horizonte.

Conseqüentemente, o espaço global se nos depara em forma de um gigantesco volume tridimensional, onde todos os objetos são vistos ocuparem posições determinadas dentro do invólucro que se estende entre o primeiro plano e o horizonte – invólucro este, que seria a imagem do Universo. Tudo nele apresenta-se mensurável e comparável, material e finito, no ponto de fuga terminando todos os recuos possíveis –, é o limite do espaço e do tempo (OSTROWER, 1995, p. 47).

A partir da Renascença, segundo Bardonnèche (1997, p. 197), a perspectiva impregna a arte e

a primeira fissura importante no sistema da Renascença vem do Impressionismo que coloca em questão o espaço cenográfico. Trata-se de registrar de maneira imediata o espaço e os objetos por pinceladas coloridas que não se submetem mais aos contornos das formas

geométricas. As três dimensões fictícias da geometria euclidiana perdem seu interesse [...].

Na concepção cartesiana, entende-se que objetos podem ser estudados sendo isolados e neutralizados com o estabelecimento de um contorno bem definido entre eles e o mundo. No contexto da representação do espaço pelo sistema da perspectiva, um grande valor é atribuído à existência física *material*, um novo valor que surge na Renascença.

Mas cabe dar-lhe um destaque especial, pois a *afirmação da matéria* deve ser compreendida como anterior e *imprescindível*, como *premissa* para o sistema da perspectiva. Não é possível colocar em perspectiva algo que seja imaterial, que não tenha propriedades físicas. Conseqüentemente, é em virtude da nova visão de mundo que admitia e, mais, aprovava a materialidade dos fenômenos, subvertendo os valores medievais, que se pôde elaborar a proposta da perspectiva [...] Puderam-se desenvolver as idéias de observação, de mensuração e comparação, de análise racional. Mais tarde, tornar-se-iam procedimentos significativos na exaltação de leis universais a regerem a natureza que, embora consideradas de origem divina, já puderam ser indagadas pelos instrumentos da lógica humana (OSTROWER, 1987, p. 110, grifos da autora).

Conforme considera Ostrower (1995, p. 178), a perspectiva não mais existe como forma expressiva na arte moderna, tendo sido

a expressão perfeita de uma determinada concepção de mundo. Mas isto não a torna um dogma, uma verdade eterna e absoluta. [...] Ela não é a realidade e tampouco formula o conhecimento da realidade. Em nossos dias, a perspectiva deixou de ser forma expressiva, representando apenas um método útil, uma esquematização para se projetar plantas de arquitetura ou a construção de móveis [...].

Desse modo, hoje, a perspectiva não é mais uma forma de expressão artística, tornando-se um método para o desenho de projetos arquitetônicos. De modo similar, a *Geometria Analítica* de Descartes é um método, amplamente utilizado nos dias atuais, que possui limitações, não é inútil e obsoleto, mas sim, limitado, ou seja, não dá conta de sustentar todas as pesquisas elaboradas pela ciência contemporânea.

A representação do espaço pela perspectiva é bem sucedida por séculos, sendo colocada sob questionamento apenas no final do século XIX.

A grande ruptura do Impressionismo é de quebrar o ponto de vista único trocado por uma visão múltipla e aproximada [...] Um espaço próximo e incomensurável sucede ao espaço distanciado, óptico das distâncias e dos horizontes, abrindo para a arte do século XX um espaço não mais extenso, na projeção de uma visão global do mundo, mas intenso pela justaposição de superfícies coloridas que ganham valores no espaço. O espaço da perspectiva questionado pelo Impressionismo não é um espaço sensível, mas um espaço matemático, um espaço construído que supõe um olho único e imóvel [...] (BARDONNÈCHE, 1997, p. 197).

Esse olho duro, sozinho, isolado do mundo, mecânico e imóvel, remete a um observador entendido como um mecanismo: a concepção de Descartes que norteia o desenvolvimento da ciência moderna.

Levantando dúvidas sobre a validade das informações oriundas dos sentidos corpóreos, Descartes chega à sua famosa máxima: *cogito ergo sum*, ou seja, *penso logo existo*, estabelecendo uma dicotomia entre a *coisa pensante*, um *Eu* que é puro pensamento, denominado por *res cogitans* e a *coisa extensa*, que denomina *res extensa*. Mente e corpo são entendidos como separados e esta divisão é aceita pelos pesquisadores das ciências naturais, que concentram seus interesses na *res extensa*, adotando a proposta cartesiana como sendo o único método científico, enquanto que a *res cogitans* passa a ser objeto de reflexões filosóficas e religiosas. Os princípios científicos são assumidos como elaborações da mente, a *coisa pensante*, independentemente das informações obtidas pelas sensações do corpo, a *coisa extensa*. O progressivo sucesso das pesquisas científicas, estabelecendo previsões e buscando o controle da Natureza, induz cientistas a questionarem a validade das concepções medievais, objetivando a supremacia da ciência sobre a matéria.

Assim, na visão de mundo cartesiana, o universo é concebido como sendo uma imensa máquina composta por objetos completamente separados do pensamento. Nessa postura, os objetos são reduzidos aos seus componentes fundamentais, cujas propriedades determinam todos os fenômenos naturais. Essa concepção de Natureza é, também, adotada para o entendimento dos organismos vivos, considerados máquinas cujo funcionamento acontece pela interação entre suas partes componentes.

Projeto cartesiano: eis a denominação atribuída por Heidegger e Husserl à essa proposta que fundamenta a *Física Clássica*, hipótese levada ao extremo, supondo que toda a realidade física pode ser totalmente descrita por regras matemáticas fundadas em dados quantitativos.

O pensamento cartesiano exerce forte influência sobre o mundo ocidental, encorajando os indivíduos a

equiparem sua identidade com sua mente racional e não com seu organismo total [...] Na medida que nos retiramos para nossas mentes, esquecemos como *pensar* com nossos corpos, de que modo a usá-los como agentes do conhecimento. Assim fazendo, também nos desligamos do nosso meio ambiente natural e esquecemos como comungar e cooperar com sua rica variedade de organismos vivos (CAPRA, 2000, p. 37, grifo do autor).

É importante observar o significado de Descartes e do pensamento cartesiano como imbricado em seu tempo. Suas pesquisas, argumentações, bem como as de seus seguidores, respondem às perguntas formuladas no cenário do *desarranjo* de um mundo – o

medieval europeu – e a busca de outras respostas: aquelas que serviam bem aos anseios da época.

Certa vez, Sartre opôs o Descartes que existiu, viveu esta vida, pronunciou estas palavras, escreveu estas obras – bloco inquebrantável, limite indestrutível – ao cartesianismo, *filosofia errante* que muda incessantemente nas mãos dos herdeiros. Tinha razão. Nenhuma fronteira indica até onde vai Descartes e onde começam seus sucessores, e enumerar os pensamentos que *estão em Descartes* e os que *estão neles* teria tanto sentido quanto fazer o inventário de um língua. Feitas estas restrições, realmente o que conta é a vida pensante que chamamos Descartes e cujas obras são a esteira, felizmente conservada. Se Descartes está presente é porque, rodeado de circunstâncias hoje abolidas, atormentado com preocupações e com algumas ilusões de seu tempo, respondeu a esses acasos de tal maneira que nos ensina a responder aos nossos, embora diferentes, e diferente nossa resposta (MERLEAU-PONTY, 1989, p. 158, grifos do autor).

2.1 A MÁQUINA NEWTONIANA

A concordância entre pesquisadores em aceitar o método cartesiano como sendo o único método que forneceria princípios científicos acontece com o sucesso obtido pelo trabalho de Isaac Newton (1642-1727). As pesquisas de Galileu, Kepler e Descartes fundamentam o modelo científico newtoniano, fornecendo um aspecto novo às leis da Física construídas por Newton, sendo que

todas elas se apresentavam, antes dele, como regras empíricas extraídas da massa dos fatos através de uma análise cuidadosa. Newton introduz, pelo contrário, *princípios*, ou seja, leis universais a que a natureza se conforma e de que as regras empíricas anteriores são conseqüências lógicas, matemáticas (OMNÈS, 1996, p. 54, grifo do autor).

Na concepção newtoniana, o espaço e o tempo são absolutos e a matéria é entendida como sendo constituída por pequenas partículas imutáveis, agindo umas sobre as outras por meio de forças, das quais a gravitação é um tipo. Sendo conhecidas as posições e as velocidades dessas partículas em qualquer instante e conhecendo-se como calcular as forças entre elas, as leis de movimento são usadas para calcular posições e velocidades em qualquer instante posterior. A localização da matéria num espaço preciso é um dos pressupostos básicos e, conforme aponta Merleau-Ponty (2000, p. 185), “a fraqueza de Newton provém de que ele só concebe um único modo de ocupação do espaço”.

Pesquisadores que se apóiam na proposta newtoniana assumem que, uma vez mensuradas as condições iniciais de um sistema e sendo conhecido o modelo matemático, constituído por equações relacionando as variáveis do sistema, é possível calcular a sua

evolução. Desse modo, o método newtoniano possibilita inferir as posições futuras dos planetas sendo conhecidas a posição e a velocidade em determinado instante. Tal procedimento permite, por exemplo, prever a ocorrência de eclipses lunares e solares, calcular órbitas e massas de planetas, órbitas de satélites artificiais e movimento de naves espaciais.

O *Cálculo Diferencial e Integral*, tendo como criadores Newton e Leibniz (1646-1716), se revela poderoso instrumento matemático para o tratamento de diversos problemas. O interesse dos cientistas da época se volta para esse *Cálculo*, entusiasmados com a sua grande aplicabilidade, apesar de sua fraca fundamentação teórica. Sua utilização é justificada pela fecundidade na obtenção de resultados práticos, e não pela fundamentação em demonstrações rigorosas. Nessa época, nas civilizações ocidentais, no estudo dos fenômenos da natureza efetuados sob os postulados da ciência clássica, os bem-sucedidos conceitos e métodos da *Física Clássica* são adotados por estudiosos de outras áreas do conhecimento, almejando o reconhecimento de suas pesquisas como sendo científicas.

No mundo científico, o modelo newtoniano foi aceito como definitivo e as pesquisas posteriores continuam expandindo a *Mecânica*. É desenvolvido o *Cálculo das Perturbações*, sendo criados métodos matemáticos para prever a posição dos planetas, considerando que sofrem desvios em suas trajetórias em função da presença dos outros.

A crença na existência de uma ordem natural permanente dos fenômenos da natureza é posteriormente consolidada com a *Mécanique Céleste*, de Laplace (1749-1827). Stewart (1991, p. 17) apresenta o entendimento de Laplace:

Um intelecto que, num momento qualquer, conhecesse todas as forças que animam a Natureza e as posições mútuas dos seres que a compõem, se esse intelecto fosse vasto o suficiente para submeter seus dados à análise, seria capaz de condensar numa única fórmula o movimento dos maiores corpos do universo e o do menor dos átomos: para tal intelecto nada poderia ser incerto; e tanto o futuro quanto o passado estariam presentes diante de seus olhos.

O sucesso da proposta newtoniana induz o mundo da ciência a formular e resolver equações diferenciais. Dissemina-se o entendimento de que cada investigador, ao representar um sistema por equações diferenciais, pode efetuar medidas relativas ao seu estado inicial e inferir com precisão a evolução do sistema pesquisado. Nessa concepção, o universo é “um grande sistema mecânico funcionando de acordo com as leis newtonianas do movimento. Desse modo, as equações diferenciais de Newton tornaram-se o fundamento matemático do paradigma mecanicista” (CAPRA, 1998, p. 105).

Utilizando a *Mecânica*, pesquisadores descobrem corpos celestes, por meio de cálculos, sem que seu olhar se levantasse do papel. A descoberta do planeta Netuno

consagra o poder de previsão do sistema newtoniano. O alto grau de precisão do método newtoniano induziu a um entendimento de que tudo no universo poderia ser previsto, que toda causa produziria um efeito previsível matematicamente.

Dissemina-se a concepção de mundo conhecida como *determinismo*. Todos os fenômenos são concebidos como condicionados pelos que o precedem e, por sua vez, condicionando os que o seguem. “A máquina newtoniana do mundo era vista como completamente causal e determinista. Tudo o que acontecia tinha uma causa definida e dava origem a um efeito definido [...]” (CAPRA, 1998, p. 105). Impregna-se a aceitação da existência de uma relação linear da causa ao efeito entre todos os fenômenos da natureza. Esclarece Merleau-Ponty (2000, p. 44):

Subjacente à idéia comum de causalidade, há a idéia de uma conexão clara entre o antecedente e o conseqüente, funcionando de acordo com uma regra e, finalmente, a idéia da lei, de regra da Natureza. Descartes, Kant e Comte pensam existir relações eternas, como fundamentos pelos quais as coisas são determinadas de modo imutável [...].

Na concepção cartesiana-newtoniana todos os fenômenos da natureza passam a ser reduzidos à sua extensão e ao movimento dessa extensão, regidos por leis matematicamente descritas e os fenômenos naturais são pensados como totalmente quantificáveis. A natureza é compreendida, nesta visão, como

um ser inteiramente exterior, feito de partes exteriores, exterior ao homem e a si mesmo, como puro objeto [...] Nada do que Deus produz é imprevisto por ele, os efeitos são dados com as causas [...] Finalidade e causalidade já não se distinguem e essa indistinção exprime-se na imagem da *máquina*, a qual mistura um mecanismo e um artificialismo (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 9 -12, grifo do autor).

A visão de mundo que norteia o desenvolvimento da ciência moderna, construída desde Galileu e sedimentada por Descartes, Newton e seguidores, é usualmente referida pela *metáfora da máquina*, bem compreendida por aqueles que, em sua infância, se divertiram com brinquedos de corda, que ficaram impressionados com Charles Chaplin no filme *Tempos Modernos*, mas de difícil compreensão para os jovens de hoje, que consultam as horas em relógios de pulso digitais e se divertem em ambientes eletrônicos.

Na contemporaneidade, a visão de mundo mecanicista

ainda está na base da maioria de nossas ciências e continua a exercer uma enorme influência em muitos aspectos de nossa vida. Levou à bem conhecida fragmentação em nossas disciplinas acadêmicas e entidades governamentais e serviu como fundamento lógico para o tratamento do meio ambiente natural como se ele fosse formado de peças separadas a serem exploradas por diferentes grupos de interesses (CAPRA, 2000, p.37).

2.4 A DESESTRUTURAÇÃO DO EDIFÍCIO DA CIÊNCIA MODERNA

Desarranjando o cenário cartesiano, o movimento das moléculas aparece como um obstáculo para a total aceitação da proposta cartesiana-newtoniana. No início do século XIX, fica evidenciado que as leis de Newton regem os movimentos das moléculas, mas constata-se ser impossível o estudo de movimentos moleculares individuais.

Por outro lado, é possível estudá-los estatisticamente, analisar, por exemplo, a distribuição de energia em vários estados de equilíbrio e ver como essa distribuição pode variar com o tempo. Isto é feito na mecânica estatística, fundada por Glausius, Maxwell e Boltzmann [...] A mecânica estatística tem também um ramo na mecânica quântica [...] (GÅRDING, 1981, p. 285).

A *Mecânica*, fundada nas concepções newtonianas de força e trajetória, se revela inadequada para o tratamento das questões relacionadas com a *Termodinâmica*, cuja *segunda lei* se relaciona com a tendência dos fenômenos físicos isolados se encaminharem espontaneamente da ordem para a desordem crescente. Para expressar matematicamente essa direção, na evolução dos sistemas, os físicos introduzem uma quantidade denominada *entropia*, uma medida do grau de desordem. Quanto maior for a desordem num sistema, maior será sua *entropia* e, quanto mais ordenado ou mais organizado for um sistema, menor será sua *entropia*.

No final do século XIX, um grande dilema se estabeleceu: de um lado o entendimento, baseado nas observações dos biólogos, do mundo vivo como direcionado para uma ordem e complexidade crescentes, e de outro, a concepção de que a energia mecânica é dissipada em forma de calor, que não pode ser recuperado, de modo que toda a máquina do mundo acabaria parando. O primeiro entendimento carecendo de sustentação matemática e sem teorias físicas para descrevê-lo e o segundo apoiado nas leis da *Termodinâmica*.

A lei da gravitação, de Newton, afirma que duas partículas quaisquer do universo são atraídas, mutuamente, com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Os movimentos dos corpos, sejam eles grandes astros celestes ou pequenas partículas, sob influência das forças que sobre eles atuam, são soluções das equações de movimento. No entanto, apesar dos significativos avanços nas pesquisas, no final do século XIX, permanecem sem resposta algumas questões “como a do movimento de três corpos sob a gravidade [...] tais equações passaram a ser vistas como exceções, quando uma avaliação mais honesta as apresentaria como regra” (STEWART, 1991, p. 46).

O problema dos três corpos se relaciona com uma das idealizações assumidas por Newton: considerar partículas como elásticas e duras, sendo que a colisão de *duas* delas faz com que ricocheteiem com velocidades e ângulos previsíveis. Porém, a concepção newtoniana não fornece subsídios para determinar o resultado da colisão simultânea de *três* partículas. “Retrospectivamente, podemos ver que o determinismo da física pré-quântica só se salvou da bancarrota ideológica mantendo à distância as três bolas, postas no penhor” (STEWART, 1991, p. 47).

Na avaliação de Weinberg, que recebeu, em 1979, o Prêmio Nobel de Física, por seu trabalho de unificação de duas das forças fundamentais da natureza,

nos séculos XVIII e XIX, quanto mais os cientistas aprendiam sobre química, luz, eletricidade e calor, a possibilidade de uma explicação na linha newtoniana ia ficando cada vez mais remota. Em particular, para que fosse possível explicar as reações e afinidades químicas tratando os átomos como partículas newtonianas [...] nada poderia ser realmente concluído (WEINBERG, 1996, p. 20).

No final do século XVIII, um grande número de paradoxos e absurdos infiltrados na Matemática leva à necessidade de uma releitura de seus fundamentos, buscando uma base rigorosa, tendo início o movimento intelectual que visa fornecer rigor à *Análise Matemática*. Apresentar toda a Matemática formalizada pela axiomática é o objetivo do trabalho *Elementos de Matemática*, de Nicolas Bourbaki.

Sintetizando, pode-se dizer que

o século XVIII foi gasto em grande parte na exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo, que o século XIX foi dedicado grandemente à tarefa de construir uma fundamentação lógica sólida para a enorme, porém débil, superestrutura construída no século precedente, que uma das maiores ênfases do século XX tem sido a de generalizar, tanto quanto possível, os progressos já alcançados [...] (EVES, 1995, p. 462).

Uma visão geral do desenvolvimento histórico das teorias da relatividade einsteinianas e da teoria quântica, as duas colunas de sustentação da *Física Moderna*, se apresenta como possibilidade para um entendimento das mudanças nos pressupostos fundamentais da *Física Clássica* que nortearam a produção da ciência moderna. Por isso, é importante destacar, a seguir, as idéias básicas da *Física Moderna*, que inicia no século XX e que encontra sustentação na Matemática altamente formalizada.

A distinção entre os significados atribuídos à *Física Clássica* e à *Física Moderna* é instaurada com a criação da *Mecânica Quântica*, quando se “introduziu uma maneira completamente nova de se falar do estado de um sistema [...] Essa mudança foi tão profunda que os físicos agora usam a palavra *clássico* não para *greco-romano* ou *Mozart* etc., mas para *antes da mecânica quântica*” (WEINBERG, 1996, p. 59, grifos do autor).

A teoria de Einstein modifica a concepção do espaço, do tempo e da gravitação, mas os físicos a consideram uma teoria clássica por não contemplar condições quânticas. É o seguir do caminho pelo qual a teoria quântica se constitui, desde seu nascimento, que, na opinião de Heisenberg, revela a ruptura com os princípios estabelecidos na ciência clássica e a elaboração das novas idéias fundamentais da ciência contemporânea, embora essa teoria seja

apenas um pequeno setor da física atômica [...]. Mesmo assim, foi na teoria quântica que ocorreram as mudanças fundamentais no que diz respeito ao conceito de realidade e é mais nessa teoria, em sua forma final, que as novas idéias da física atômica estão concentradas e cristalizadas (HEISENBERG, 1999, p. 44).

3 AS CONCEPÇÕES SOBRE MUNDO E CIÊNCIA NAS COLUNAS SUSTENTADORAS DA FÍSICA DO SÉCULO XX

Neste capítulo são apresentadas as concepções de ciência e de natureza, conforme são expostas nos trabalhos da *Física Moderna*. Buscando evidenciar as dúvidas e as perguntas formuladas pelos seus autores, expõem-se modos de ver e tratar tais questões pela Filosofia, destacando-se o pensamento de Merleau-Ponty. Além disso, são explicitadas as dúvidas e os encaminhamentos que a Matemática permite.

3.1 AS TEORIAS EINSTEINIANAS

A estrutura científica construída até o século XIX, envolvendo conceitos de tempo absoluto, espaço absoluto e causalidade absoluta, mostra-se inadequada com a experiência de Michelson, repetida por Morley e Miller em 1904, evidenciando a impossibilidade de se detectar o movimento de translação da Terra por métodos ópticos.

Nessa época, Lorentz sugere uma transformação matemática, admitindo como hipótese que corpos em movimento se contraem, na mesma direção do movimento, por um fator numérico dependente da velocidade da luz. Admite também que

em diferentes referenciais, haveria diferentes tempos *aparentes* que, de muitas maneiras, tomariam lugar do tempo *real* [...] a velocidade *aparente* da luz é a mesma nos diferentes sistemas de referência (cada um deles movendo-se, em relação ao outro, em movimento de translação uniforme). Idéias semelhantes já tinham sido discutidas por Poincaré, Fitzgerald e outros físicos (HEISENBERG, 1999, p. 161, grifos do autor).

Einstein, ao construir uma das colunas da Física do século XX, a teoria da relatividade, utiliza um grupo de transformações algébricas, desenvolvidas por Lorentz, para lidar com problemas de eletricidade. Em trabalho publicado em 1905, Einstein estabelece o tempo aparente de Lorentz como sendo tempo real e elimina de sua teoria o que Lorentz chamara de tempo aparente.

Isso foi uma mudança que tocou nos fundamentos mais profundos da física [...] Para dar esse passo, na representação matemática da Natureza, fazia-se necessária, tão-somente, a aplicação consistente da transformação de Lorentz. Mas, por força dessa interpretação, mudara a estrutura de espaço e tempo e muitos problemas da física foram vistos sob nova luz (HEISENBERG, 1999, p. 162).

Transformações constituem mudanças que a teoria dos grupos efetua sobre uma construção matemática, alterando-a radicalmente. Por exemplo, uma equação matemática é transformada quando toda variável x é substituída por $(y+5)$; uma figura geométrica plana é transformada quando sofre deformações, sendo esticada ou torcida.

Na visão da *Física Clássica* e no cotidiano mundano, entende-se o *espaço* como sendo tridimensional e até o início do século XX, seja no cotidiano das pessoas ou no mundo da pesquisa científica, cada evento podia ser determinado por um número único chamado *tempo*. Nessa concepção, em qualquer relógio, funcionando de modo adequado, todas as pessoas encontrariam um único número correspondente ao intervalo de tempo separando dois eventos. A teoria da relatividade leva ao abandono da idéia de tempo único e absoluto.

Em lugar disso, cada observador teria sua própria medida do tempo, conforme registrado por um relógio que ele carregava, e os relógios carregados por diferentes observadores não necessariamente marcariam a mesma hora. Assim, o tempo passou a ser um conceito mais pessoal, relativo ao observador que o media (HAWKING, 1997, p. 182).

Na teoria desenvolvida por Einstein existe um contínuo espaço-temporal com quatro dimensões, sendo três espaciais e uma temporal, de modo que qualquer evento que aconteça na natureza é caracterizado pela sua posição nesse espaço-tempo quadridimensional.

Matematicamente, um ponto no espaço-tempo é descrito por quatro números, onde o tempo é tratado como uma dimensão espacial, uma distância no espaço-tempo, sendo multiplicado pela velocidade da luz. Por exemplo, para descrever o movimento de uma pedra lançada de um edifício, pela *Física Clássica* é tomada a sua posição inicial, sua posição final e o tempo que demorou para cair, enquanto que, na perspectiva da teoria da relatividade, consideram-se dois pontos no espaço-tempo, separados por uma distância.

A junção do espaço com o tempo passa despercebida no cotidiano de nossas vidas, porém, quando movimentos ocorrem onde a força de gravidade é imensa e em velocidades próximas à velocidade da luz, o espaço é deformado, tendo a sua geometria alterada, como uma massa de modelar que pode ser esticada em várias direções. Nas proximidades de astros com massa extremamente grande e nos buracos negros o campo gravitacional é tão forte que o espaço-tempo se curva sobre si mesmo.

Como exemplo dessa situação, pode ser citado o eclipse solar de 1919. São efetuadas observações astronômicas em Sobral, no Ceará, e também na Ilha do Príncipe, na costa africana. É confirmado que os raios de luz são encurvados pela gravidade solar, como Einstein havia previsto. A curvatura da luz faz com que uma estrela seja vista, da Terra, com um pequeno deslocamento em relação à sua posição real.

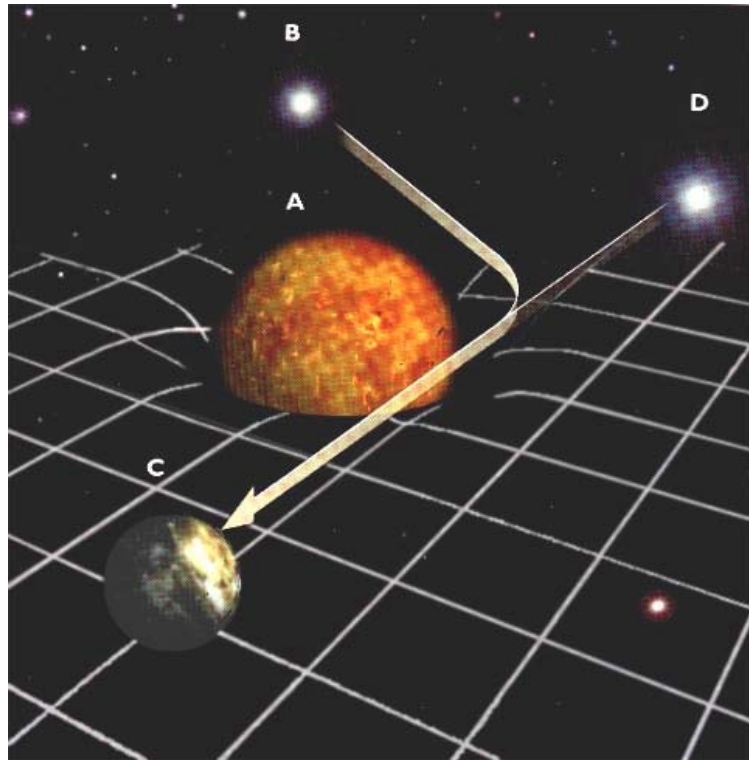


Figura 3: A distorção espaço-temporal

A massa do Sol (A) distorce o espaço-tempo próximo a ela. Isso desvia a luz de uma estrela distante (B) que passa próxima do Sol, de forma que, na Terra (C), ela parece ter vindo de uma direção diferente (D).

Fonte: HAWKING, 1997, p. 41-42.

A teoria da relatividade modifica a concepção de espaço e tempo, supostos como sendo absolutos na teoria de Newton, estabelecendo

uma relação entre espaço e tempo que jamais fora conhecida e que inexistia na mecânica newtoniana. Sob o impacto dessas novas estranhezas, muitos físicos, um tanto apressadamente, chegaram à seguinte conclusão: a invalidez da mecânica newtoniana tinha, finalmente, sido demonstrada (HEISENBERG, 1999, p. 137).

De modo similar, muitos professores, apressadamente, sem refletirem com rigor e sem conhecimento científico concluem que o ensino do *Cálculo Diferencial e Integral*, fundamento da *Física Clássica*, é obsoleto e inútil para compor currículos matemáticos, condenando demasiado rápido o conteúdo dos currículos.

Conceitos de *espaço* e *tempo* são comuns à *Mecânica Clássica* e à teoria relativista. Heisenberg (1999, p. 139) esclarece que

espaço e tempo, na mecânica de Newton, eram conceitos independentes, enquanto que na teoria da relatividade eles foram inter-relacionados pela

transformação de Lorentz [...] Os conceitos newtonianos não podem ser aplicados a eventos em que ocorram velocidades comparáveis em grandeza à velocidade da luz. Dessa maneira, encontrou-se, por fim, uma limitação essencial na mecânica newtoniana [...].

Não se dá obsolescência e abandono da teoria newtoniana no desenvolvimento da *Física Relativística*. Apenas é encontrada uma limitação para a representação de fenômenos que acontecem próximos à velocidade da luz.

Considerando as teorias einsteinianas, Omnès (1996, p. 152) sintetiza:

Tudo começou no limiar do estranho, com a teoria da relatividade restrita, descoberta por Einstein em 1905: o espaço e o tempo perdem o caráter absoluto que sempre tiveram nas consciências e que Newton revelara. As distâncias e a maneira como o tempo passa dependem, pelo contrário, do movimento de quem as mede. Pouco tempo depois, foi a vez da teoria relativista da gravitação, também da autoria de Einstein, que resolvia a grande questão deixada em suspenso por Newton: as forças gravitacionais não se exercem a distância de maneira instantânea, mas sua ação vai propagando-se aos poucos, na velocidade da luz. Esse triunfo maior foi também uma imensa fonte de perplexidade, pois não só o tempo e o espaço se conjugam intimamente sob o efeito do movimento, mas ambos, formam juntos, uma entidade nova, o espaço-tempo, totalmente inacessível à intuição e, além disso, curva. As matemáticas são as únicas que podem oferecer uma descrição dele [...].

Ambas as teorias de Einstein são fundamentadas na hipótese de que todas as medições científicas são relacionadas com o sistema de referência onde se encontra o pesquisador. Para Einstein não existe, no Universo, um ponto fixo a partir do qual possam ser efetuadas medidas de distâncias. Na teoria da relatividade restrita as equações da *Mecânica Clássica* são reescritas de maneira que sejam corrigidas suas descrições inadequadas de objetos, sejam astros ou partículas atômicas, que se movimentam em linha reta, com velocidades constantes, próximas à da luz. Na teoria da relatividade generalizada, as equações da *Mecânica* newtoniana são modificadas para possibilitar o seu uso em objetos com altas velocidades variáveis e se movendo em trajetórias curvas. Ou seja, matematicamente,

visto que as propriedades do espaço pareciam variar continuamente com as forças gravitacionais, a geometria desse espaço foi comparada à geometria das superfícies curvas, onde a curvatura varia continuamente, a linha reta da geometria euclidiana sendo substituída por uma curva dita *geodésica* (HEISENBERG, 1999, p. 173, grifo do autor).

O século XIX havia assistido à criação das *Geometrias Não-Euclidianas*, não se aceitando mais a antiga concepção de que a *Geometria Euclidiana* é a única possível.

Os postulados da geometria tornaram-se, para os matemáticos, meras hipóteses cuja veracidade ou falsidade físicas não lhes diziam respeito; o matemático pode tomar seus postulados para satisfazer seu gosto, desde que eles sejam consistentes entre si (EVENS, 1995, p. 544).

As *Geometrias Não-Euclidianas* não invalidam a *Geometria Euclidiana*, apenas expandem os seus limites, transformando-a em um caso particular. “O espaço euclidiano não pode ser considerado uma condição *a priori* de nossa ciência e de nossa experiência. Não é uma estrutura *de direito*. Os geômetras não-euclidianos, ao generalizarem a noção de espaço, fazem do espaço euclidiano um espaço particular” (MERLEAU-PONTY, 2000, p.163, grifos do autor).

A *Geometria Diferencial*, aplicação do *Cálculo Diferencial e Integral* ao estudo das propriedades das curvas e superfícies e suas generalizações, é desenvolvida por Cauchy e, mais tarde, por Riemann. “Einstein e outros iriam encontrar no conceito amplo de espaço de Riemann o contexto necessário para a teoria da relatividade” (EVES, 1995, p. 614).

Refletindo sobre as teorias einsteinianas e sua sustentação no espaço de Riemann, Merleau-Ponty (2000, p. 167) enfatiza que trata-se apenas de *parametrar*:

Se a ciência relativista for levada a sério, terá que ser dito que o espaço riemaniano, na medida em que ele admite Einstein, não é real mas objetivo, e permite integrar melhor os resultados da física moderna que o espaço euclidiano [...] Se o espaço é fechado, é claro que pode haver ali uma imagem dupla da mesma estrela, estando a única dificuldade em identificá-las. Seja como for, os resultados da teoria da relatividade, se confirmam a objetividade do espaço riemaniano, não nos autorizam a dizer que o espaço é riemaniano. Trata-se de *parametrar* e nada mais que isso.

Comenta Hawking (1997, p. 175) que qualquer teoria física pode ser “apresentada inicialmente por razões estéticas ou metafísicas, mas o verdadeiro teste consiste em verificar se faz previsões que correspondem à observação”, donde a importância, para a Física, de medidas. “As diferentes geometrias são métricas, e as métricas não são nem verdadeiras nem falsas e, por conseguinte, os resultados dessas diferentes métricas não são alternativas” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 166).

Examinar os quadros nos quais a natureza nos parece encerrada é a proposta de Poincaré (1995, p. 180), sendo que tais quadros são para ele o *tempo* e o *espaço* absolutos da *Física Clássica*. Na sua avaliação, “não é a natureza que os impõe a nós, somos nós que os impomos à natureza porque os achamos cómodos”.

O que é o espaço onde vivemos? Aceitamos que nosso mundo possui três dimensões, à moda de Platão, que, entre os sólidos geométricos, atribui à Terra o cubo: o espaço sendo constituído por cubos empilhados. “Não se pode nem dizer que o nosso espaço é riemaniano, nem dizer que é não-riemaniano, no máximo pode-se falar de tendência para curvar o espaço. O espaço perceptivo é polimorfo” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 170).

Merleau-Ponty (2000, p.168) expõe seu entendimento das afirmações de Bergson:

O universo da relatividade é um universo tão real, tão independente de nosso espírito, tão absolutamente existente quanto o de Newton e do comum dos homens: só que, enquanto para o comum dos homens e até mesmo para Newton esse universo é um conjunto de coisas (mesmo que a física se limite a estudar as relações entre as coisas), o universo de Einstein nada mais é do que um conjunto de relações.

3.2 A TEORIA QUÂNTICA

A segunda coluna que sustenta a Física do século XX, a teoria quântica, tem sua origem no estudo da radiação emitida por um corpo negro. Trata-se de um objeto que absorve toda a radiação e não irradia nem reflete energia alguma. Por exemplo, um forno pintado de preto com um pequeno orifício. O interesse dos físicos reside na radiação em seu interior quando as paredes internas são aquecidas. Sendo um fenômeno simples, deveria estar sujeito às leis clássicas, porém, não pode ser descrito pelas leis da radiação e do calor, na época conhecidas.

Em 1900, em Berlim, Curbaum e Rubens realizam medidas muito precisas do espectro da radiação térmica e, ao conhecer esses resultados, Planck os reproduz, teoricamente, por formulação matemática. Rubens se encontra com Planck para comparar os seus recentes resultados experimentais com a nova fórmula e a concordância é completa, mostrando seu grande poder de previsão. Esta descoberta é denominada *lei de Planck da radiação térmica*.

Investigando a interpretação física da nova fórmula, Planck levanta a hipótese de que a energia radiante é emitida e absorvida em quantidades discretas, em pacotes miúdos de energia aos quais deu o nome de *quanta*, cada *quantum* possuindo determinada quantidade de energia e sendo a energia emitida igual ao produto da frequência das ondas por um número conhecido como *constante de Planck*. Quanto maior a frequência da luz, mais energia em cada pacote. Ao apresentar essa hipótese, Planck rompe com uma tradição de vários séculos, uma vez que a energia era entendida como sendo um fluxo contínuo. A hipótese do *quantum* de energia é um marco decisivo na construção da ciência. Tudo o que havia sido investigado antes passa a ser denominado de *Física Clássica* e as pesquisas fundadas na hipótese de Planck constituem a *Física Moderna*.

Heisenberg avalia que a teoria quântica formulada por Planck levanta questionamentos “[...] relacionados ao método das ciências naturais exatas e à natureza da matéria. Tais questões levaram o físico a reconsiderar os problemas filosóficos que

pareciam estar definitivamente resolvidos no estreito quadro da física clássica” (BORN, 2000, p. 10).

Comparando as formulações matemáticas da *Física Clássica* com a *lei da radiação de Planck*, Heisenberg aponta diferenças entre as características das constantes. No contexto das leis da *Mecânica Clássica*, esclarece que as constantes matemáticas se referiam às propriedades dos objetos, por exemplo, à sua massa ou à intensidade da força que atua entre dois corpos, enquanto que,

o *quantum* de ação de Planck, que é a constante característica na sua lei de radiação, não representa propriedade de objetos, mas propriedade da natureza. [...] A lei da radiação de Planck prova pela primeira vez que há escalas na natureza e que fenômenos em diferentes graus de grandeza não são necessariamente do mesmo tipo (BORN, 2000, p. 13).

Na concepção newtoniana, as leis são consideradas igualmente válidas para todas as escalas. Por exemplo, as mesmas leis regem o movimento da Lua ao redor da Terra, a queda de uma maçã e o movimento de partículas atômicas. Com a *constante de Planck* ocorre o ingresso, na Física, do entendimento de que existem escalas na natureza, emergindo a possibilidade de outro entendimento de homem.

A noção de escala é uma noção absolutamente incompreensível se não nos referirmos à experiência perceptiva, implicando a homogeneidade do medido e do medidor que o sujeito faça causa comum com o espaço. A idéia de um sujeito encarnado é necessária para compreender o microscópio e a microfísica (MERLEAU-PONTY, 2000, p.160).

As idéias de Planck são usadas por Albert Einstein na investigação do efeito fotoelétrico, ou seja, a emissão de elétrons por metais sob ação da luz, onde a energia dos elétrons emitidos não depende da intensidade da luz, mas sim da sua cor, isto é, da sua frequência. Esse resultado não era passível de interpretação na teoria tradicional. Einstein explica tal resultado a partir da hipótese de Planck, deduzindo que a luz consiste em *quanta* de energia que se propagam pelo espaço. “Ademais, a energia de um único quantum de luz deve, de acordo com as hipóteses feitas por Planck, ser igual ao produto da frequência da luz pela constante de Planck” (HEISENBERG, 1999, p. 50).

Einstein também utiliza a hipótese de Planck no estudo do efeito fotoelétrico e na elaboração da teoria do calor específico dos corpos sólidos, revelando a presença do *quantum* de Planck

em fenômenos diversos que nada tinham diretamente a ver com a radiação térmica. Os dois resultados revelaram, também, o caráter profundamente revolucionário da nova hipótese, pois o primeiro deles conduzia a uma descrição da luz completamente diversa daquela propiciada pelo modelo ondulatório tradicional (HEISENBERG, 1999, p. 50).

Uma contradição se mostra entre o modelo ondulatório da teoria de Maxwell, onde a luz é interpretada como consistindo de ondas eletromagnéticas, e a idéia dos *quanta* de luz, pacotes de energia que se propagam pelo espaço. Heisenberg (1999, p. 51) avalia que a existência dessa contradição não podia ser posta em dúvida por Einstein e que “ele simplesmente encarou a contradição como algo que provavelmente seria entendido somente muito tempo depois”.

Em 1911, Rutherford apresenta seu modelo atômico, onde o átomo é apresentado como constituído de um núcleo maciço e de elétrons gravitando ao seu redor, como planetas em torno do Sol, modelo teórico acessível aos métodos conhecidos da *Mecânica Clássica*. No entanto, esse modelo não explica a imensa estabilidade do átomo pois, de acordo com a concepção newtoniana, nenhum sistema planetário voltaria à sua configuração original após uma colisão com outro sistema.

Em 1913, Niels Bohr, que trabalhava com Rutherford, explica a estabilidade dos átomos aplicando a hipótese quântica de Planck. “Sua teoria baseou-se em uma combinação de mecânica clássica, no que diz respeito ao movimento dos elétrons, e de condições quânticas, estas superimpostas ao movimento clássico dos elétrons a fim de propiciar estados estacionários discretos” (HEISENBERG, 1999, p. 52).

Na opinião de Omnés (1996, p. 166), o modelo de Bohr “é um modelo prudente, no sentido de que modifica o mínimo possível a física já conhecida – na realidade, ele preserva integralmente as suas leis, acrescentando apenas uma condição suplementar”. Bohr não abandona a teoria newtoniana, mas acrescenta uma lei à teoria clássica do átomo, na qual figura a *constante de Planck*, de modo que

cada trajetória elíptica permitida corresponde necessariamente a uma energia bem definida, na expressão da qual figuram a massa do elétron, sua carga e a constante de Planck, bem como um número inteiro, dito número quântico, que numera as elipses sucessivas, a partir da menor. Supõe Bohr, além disso, que o elétron, para irradiar, deve passar bruscamente de uma elipse a outra de energia mais baixa (são os famosos saltos quânticos) e que a energia assim liberada é vinculada pela relação de Planck à frequência da luz emitida (OMNÉS, 1996, p.167).

A teoria desenvolvida por Bohr admite uma limitação do conceito de órbita eletrônica, considerando-o válido nos estados de energia mais alta: nas órbitas mais exteriores. Bohr mantém o conceito de órbita eletrônica para os números quânticos maiores, ou seja, “[...] para as grandes órbitas. Neste último caso, a radiação emitida – por intermédio de suas frequências e intensidades – propicia uma imagem das órbitas eletrônicas que deriva do que os matemáticos denominam de expansão de Fourier da órbita” (HEISENBERG, 1999, p. 58). Nessa concepção, as leis mecânicas não são mais expressas por equações relacionando velocidades e posições de elétrons, mas sim, por equações para as frequências e amplitudes da expansão de Fourier.

A teoria de Bohr desencadeou uma nova linha de pesquisa e os dados empíricos, coletados durante décadas, por meio de espectroscopia e em experiências da Química, foram utilizados para o estudo dos movimentos dos elétrons. Na direção geral das pesquisas

preservavam-se as vantagens da física conhecida, acrescentando-lhes uma nova aquisição, uma condição capaz de selecionar os estados possíveis do átomo, conservando o essencial da imagem que podemos ter deles. Em suma, aumentava-se a lista das leis conhecidas sem modificar a imagem, a representação que se tinha das coisas (OMNÈS, 1996, p. 167).

Freqüentemente, as tentativas de descrever os fenômenos atômicos a partir dos conceitos da *Física Clássica*, conduziam a contradições e um novo entendimento emerge entre os pesquisadores, os quais

aprenderam qual descrição de um fenômeno atômico seria mais conveniente para uma dada experiência. Isso [...] serviu para modificar a atitude dos físicos [...]. Assim, mesmo algum tempo antes de se ter conseguido uma formulação consistente da teoria quântica, sabia-se prever mais ou menos qual seria o resultado de qualquer uma dessas experiências (HEISENBERG, 1999, p. 54).

O momento que marca o nascimento da *Mecânica Quântica*, acontece durante as férias tiradas por Heisenberg, em 1925. Nessa ocasião, ele decide que, não sendo possível a observação direta da órbita de um elétron de um átomo,

só iria lidar com quantidades que pudessem ser medidas: especificamente, com as energias dos estados quânticos nos quais todos os elétrons do átomo ocupam órbitas permitidas e com a taxa na qual um átomo poderia fazer a transição espontânea de qualquer um desses estados para qualquer outro estado por meio da emissão de uma partícula de luz, um fóton (WEINBERG, 1996, p. 60).

Como as concepções newtonianas não fornecem sustentação, Heisenberg

vai procurar amparo em conceitos formais e, em primeiro lugar, descobrir quais novos objetos matemáticos devem substituir as noções costumeiras. Entrega-se, então, a uma reflexão em que nos será difícil segui-lo sem todo um aparato técnico, mas que podemos esboçar assim: a aceleração de um elétron que vai gerar uma radiação só se manifesta no momento de um salto entre dois estados quânticos de um átomo. O objeto *aceleração* não é, pois, certamente um número, como se costumava pensar, mas depende do estado inicial e do estado final entre os quais o átomo transita no próprio instante em que ocorre o salto [...] A aceleração é, assim, substituída por uma tabela de números de dupla entrada que indicam o estado inicial e o estado final. Heisenberg é, então, levado a considerações análogas quanto à posição e à velocidade, que a cada vez substitui por tabelas de números. E consegue reformular o essencial das leis da mecânica com a ajuda dessas tabelas (OMNÈS, 1996, p. 169, grifo do autor).

Não encontrando ferramentas matemáticas no *Cálculo Diferencial e Integral*, Heisenberg elabora tabelas de números e, retornando das suas férias, “disseram-lhe que as

operações matemáticas naquelas tabelas já eram bem conhecidas pelos matemáticos; estes as conheciam como matrizes” (WEINBERG, 1996, p. 60).

Gårding (1981, p. 48) considera que as dificuldades encontradas pelos físicos, na elaboração de teoria quântica, eram devidas à falta de conhecimentos de conceitos matemáticos que, na época, não eram trabalhados na sua formação acadêmica.

Antes da criação da Mecânica Quântica nos anos de 1920 a teoria dos grupos era uma especialidade exclusivamente matemática. Nesse novo rumo da Física, entretanto, os argumentos da teoria dos grupos conduziram a descobertas importantes a respeito da estrutura de átomos e moléculas. A teoria dos grupos é hoje uma parte rotineira da Física e da Química Quânticas mas naquela época ela foi encarada com olhos grandes de espanto pelos físicos e químicos cujo único equipamento matemático era um curso de Análise básico.

Heisenberg encontra dificuldade na procura de ferramentas matemáticas para descrever os fenômenos que investigava porque sua formação acadêmica não contemplara o estudo da *Álgebra Matricial*. Atualmente, os conceitos básicos dessa área da Matemática são estudados no Ensino Básico.

A álgebra das matrizes existe na sua forma presente desde a metade do século XIX. Ela foi inventada por Hamilton, Cayley e Sylvester e durante muito tempo ela permaneceu como uma especialidade algébrica até tornar-se uma ferramenta da mecânica quântica na década de 1920. Atualmente as matrizes fazem parte de uma educação geral em Matemática (GÅRDING, 1981, p. 93).

Até o início do século XIX, a *Álgebra* era entendida apenas como sendo uma *Aritmética* simbólica, não trabalhando com números específicos, como em *Aritmética*, mas empregando letras que representam esses números. No início do século XIX, predominava o entendimento de que a *Álgebra* tradicional era a única possível.

Tentar, por exemplo, a construção de uma álgebra consistente na qual não se verificasse a lei comutativa da multiplicação não só provavelmente não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma idéia ridícula; afinal de contas, como seria possível uma álgebra lógica na qual $a \times b$ fosse diferente de $b \times a$? (EVES, 1995, p. 548).

Motivado por suas pesquisas físicas, Hamilton cria uma *Álgebra* em que a lei comutativa da multiplicação não vale, e denomina quatérnios aos quádruplos ordenados de números reais, sendo que “os quatérnios foram em parte revividos em 1927 com as *variáveis spin* na teoria quântica de Wolfgang Pauli” (EVES, 1995, p. 555, grifos do autor). Grassmann, Hamilton e Cayley são pioneiros na criação de álgebras abstratas, com leis estruturais diferentes da *Álgebra* usual.

Enfraquecendo ou suprimindo vários postulados da álgebra usual, ou substituindo um ou mais postulados por outros, consistentes com os

demais, pode-se encontrar uma enorme variedade de sistemas [...] A maior parte desse trabalho se deu no século XX e reflete o espírito de generalização e abstração [...] (EVES, 1995, p. 553).

Antes do final de 1925, Born, Jordan e Dirac colocam as idéias de Heisenberg em uma versão sistemática sob o formalismo matemático hoje denominado *Mecânica Matricial*, ou *Mecânica das Matrizes* ou, utilizando uma expressão mais geral, *Mecânica Quântica*. Deste modo, observa Heisenberg (1999, p. 59),

as equações de movimento da mecânica clássica foram substituídas por equações formalmente semelhantes entre matrizes; foi uma experiência realmente estranha ver que muitos resultados da mecânica newtoniana, como a conservação da energia e outros, podiam ser igualmente derivados no novo esquema.

As pesquisas posteriores realizadas por Born, Jordan e Dirac evidenciam a diferença essencial entre as *Mecânicas Quântica* e *Clássica*, pois os resultados de suas investigações mostram que não são matrizes comutativas as que representam posição e momento do elétron.

Omnés (1996, p. 108), considerando as relações entre a Matemática formalizada e a realidade, avalia:

Essa evolução de conjunto na direção do formal revelou-se espantosamente fértil [...] ela permitiu abrir e assentar inúmeras áreas novas no interior mesmo das matemáticas. Verificou-se, também, coisa estranha, que ela não consagrava um divórcio com a realidade, mas sim, pelo contrário, que ocorriam reconciliações. Com efeito, pouco depois da mutação das matemáticas, o curso da física deveria ser arrastado para as paisagens novas da relatividade, da teoria relativista da gravitação e da física quântica, e algumas das construções mais ousadas das matemáticas formais deveriam revelar-se como ferramentas indispensáveis à formulação das leis da natureza.

Em 1923, Louis De Broglie apresenta a sua abordagem de *função de onda* em artigos e na sua tese de doutoramento, em 1924. A idéia de uma onda de matéria correspondendo a um elétron em movimento, de modo similar a uma onda de luz correspondente a um *quantum* de luz se propagando, e relacionando a condição quântica ao dualismo onda-partícula, até então não tinha sido considerada na *Mecânica* dos elétrons. Experiências evidenciam, por exemplo, que fótons arremessados contra um metal polido agem como corpúsculos, arrancando, com o impacto, elétrons da superfície; fótons que passam por um prisma comportam-se como ondas, se decompondo em diversas cores.

De Broglie estabelece uma ligação entre o dualismo onda-partícula e a condição quântica, partindo do entendimento que “uma onda, circulando ao redor do núcleo atômico, não pode deixar de ser, por razões geométricas, uma onda estacionária; e o perímetro da onda tem que ser um múltiplo de seu comprimento de onda” (HEISENBERG, 1999, p. 57). Assim, a dupla descrição, de onda e de partícula, para as partículas subatômicas, é

entendida por De Broglie a partir da hipótese de que o elétron poderia ser tomado como um tipo de onda cujo comprimento se relacionaria ao seu momento, de modo similar à teoria de Einstein, onde os comprimentos de onda da luz se relacionam ao momento do fóton. "Em ambos os casos, o comprimento de onda é igual a uma constante fundamental da natureza conhecida como constante de Planck, dividida pelo momento. De Broglie não tinha qualquer idéia sobre o significado físico de onda" (WEINBERG, 1996, p. 62).

A insatisfação de De Broglie com a dupla interpretação das partículas elementares que constituem a matéria é comentada por Merleau-Ponty (2000, p. 145), que analisa os textos onde aquele autor

esforça-se por ligar os dois aspectos da realidade numa síntese portadora de significação física [...] Mas diante dos obstáculos suscitados por esta teoria, de Broglie aderiu às posições de Dirac, Bohr e Heisenberg. Para estes, não é possível encontrar uma síntese entre ondas e corpúsculos [...] Para uma medida de mecânica quântica, obtém-se seja a notação de tal posição, seja a de tal velocidade, mas nunca se poderá conhecer ao mesmo tempo a velocidade e a posição de um corpúsculo. Todas as outras posições são igualmente possíveis.

A partir da conjectura de ondas materiais, proposta por De Broglie, é estabelecida uma equação para as ondas estacionárias que circundam o núcleo atômico.

Foi Schrödinger, em Viena, que em 1925-26 transformou as idéias bastante vagas de De Broglie sobre ondas de elétrons em um formalismo matemático preciso e coerente, aplicável a elétrons ou outras partículas em qualquer tipo de átomo ou molécula. Schrödinger conseguiu mostrar que sua *mecânica de ondas* era equivalente à mecânica matricial de Heisenberg; uma pode ser matematicamente deduzida a partir da outra (WEINBERG, 1996, p. 62, grifos do autor).

Posteriormente, Max Born, co-laureado com o Prêmio Nobel, em 1954, por seus estudos estatísticos sobre funções de onda, retoma a idéia de *onda de probabilidade* e define a "quantidade matemática que deveria, no formalismo, ser interpretada como onda de probabilidade. Essa onda não era tridimensional, como as elásticas e de rádio, mas uma onda em um espaço de configuração multidimensional [...]" (HEISENBERG, 1999, p. 61).

Matematicamente, a equação de Schrödinger é do mesmo tipo (uma equação diferencial parcial) da equação que vinha sendo usada desde o século XIX no estudo de ondas de som e luz. Os físicos dos anos 20 estavam tão acostumados com esse tipo de equação de onda, que foram capazes de calcular imediatamente as energias e outras propriedades de todos os tipos de átomos e moléculas [...] Apesar desse sucesso, nem De Broglie, nem Schrödinger, nem qualquer outro sabiam no início que tipo de quantidade física oscilava numa onda de elétrons (WEINBERG, 1996, p. 63).

Do ponto de vista matemático, ondas são descritas por seqüências de números, um número para cada ponto do espaço por onde a onda passa. Numa onda de luz, por

exemplo, os números dão a intensidade e a direção dos campos magnéticos e elétricos de cada ponto do espaço por onde a luz passa. Numa onda sonora fornecem a pressão do ar em cada ponto. Os números que constituem a lista que descreve a onda do elétron para cada instante são descritos por Weinberg (1996, p. 220) como sendo

números complexos, no sentido de que geralmente envolvem a quantidade simbolizada pela letra i , equivalente à raiz quadrada de menos um [...] a função de onda é complexa. Existem realmente duas partes de cada valor da função de onda, chamadas de parte imaginária e parte real, que estão fora de fase entre si: quando uma é pequena, a outra é grande. A probabilidade de que um elétron esteja em qualquer região pequena é proporcional à soma dos quadrados das duas partes do valor da função de onda para aquela posição, e essa soma é estritamente constante em um estado de momento definido.

Weinberg (1996, p. 63) considera que, “a princípio, tudo o que era possível dizer a respeito da função de onda é que ela era uma solução da equação de Schrödinger”. Nessa época, os físicos não compreendiam que quantidade física era descrita pelos números da função de onda. Tinham à sua disposição um formalismo matemático possível de ser utilizado em duas formulações equivalentes, uma envolvendo relações entre matrizes e a outra relacionada com equações de ondas. Heisenberg (1999, p. 62) relata que, em meados de 1926, “ainda não era claro, em cada caso, como deveria ser utilizado o formalismo matemático a fim de se descrever uma dada situação experimental”.

Dificuldades com a busca da significação física das relações matemáticas da *Mecânica Quântica* acontecem desde o início do seu desenvolvimento, no entanto,

não é ao filósofo que compete arbitrar o diferendo entre os defensores da dupla solução, como de Broglie ou os probabilistas, como von Neumann, Bohr ou Heisenberg. Não é no nível dos fatos que ele pode intervir, mas no momento em que o ser científico se liga ao ser pré-científico. Pode o físico ser representável pelo não-físico? Este é o ponto de vista de Einstein que, numa célebre tirada contada por de Broglie, disse: *Toda teoria física deveria poder, excluído todo cálculo, ser ilustrada por imagens tão simples que até uma criança pudesse entendê-las [...]* É nessa junção do universo do cientista e do universo da linguagem que cumpre examinar a mecânica quântica, no momento em que o cientista-filósofo procura dar um sentido ao seu formalismo (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 143, grifos do autor)

Nessa direção segue a presente investigação pela visão de mundo que norteia o desenvolvimento da ciência contemporânea: a busca pela *significação física das relações matemáticas*.

Heisenberg relata as dificuldades encontradas na busca das relações físicas ligadas com o *quantum de ação de Planck*, pois

segundo um artigo de Einstein, de 1918, parecia provável que as leis da teoria quântica, de um modo ou de outro, implicassem relações estatísticas. Mas a primeira tentativa de estudar por inteiro a natureza estatística das leis

da teoria quântica foi realizada em 1924 por Bohr, Kramers e Slater (BORN, 2000, p.15).

Heisenberg (1999, p. 61) comenta que a introdução do conceito de *onda de probabilidade* consistiu em algo inteiramente novo na *Física Clássica* construída desde Newton e esclarece:

Probabilidade, em matemática ou na mecânica estatística, significa uma afirmação sobre o nosso grau de conhecimento acerca de uma situação concreta. Quando jogamos dados, não temos como conhecer exatamente os detalhes finos do movimento de nossas mãos, que determinam a maneira como caem os dados e, portanto, dizemos que a probabilidade de cair um certo número é uma em seis. A onda de probabilidade de Bohr, Kramers e Slater, todavia, significava mais do que isso: ela correspondia a uma tendência para alguma coisa. Tratava-se, assim, de uma versão quantitativa do velho conceito de potência da filosofia aristotélica, que introduzia algo entre a idéia de evento e o evento real, um tipo estranho de realidade física a mediar entre possibilidade e realidade.

A onda de probabilística de Born, Kramers e Slater envolve

o conceito decisivo de que as leis da natureza determinam não a ocorrência de um evento, mas a probabilidade de um evento verificar-se [...] A possibilidade ou a *tendência* para que um evento ocorra apresenta uma espécie de realidade – uma certa camada intermediária de realidade, meio caminho entre a realidade maciça da matéria e a realidade intelectual da idéia ou a imagem (BORN, 2000, p.16, grifo do autor).

Merleau-Ponty (2000, p. 146) esclarece:

A probabilidade da presença de um corpúsculo não é concebida aqui como nos clássicos. Ela só diz respeito à nossa ignorância. Com o indeterminismo probabilista, lidamos com a probabilidade pura. Admite-se que a probabilidade entra no tecido do real e a estatística se introduz a propósito de uma realidade individual que é genérica.

O uso de probabilidade em teoria quântica equivale, na visão de Heisenberg, a fornecer tratamento quantitativo ao conceito de potência (*potentia*) de Aristóteles, entendendo ele que

na teoria quântica moderna, tal conceito assume nova forma; é formulado quantitativamente como probabilidade e sujeito a leis da natureza que são expressas matematicamente. As leis da natureza formuladas em termos matemáticos não mais determinam os próprios fenômenos, mas a possibilidade de ocorrência, a probabilidade de que algo ocorrerá (BORN, 2000, p. 16).

Desse modo, as estruturas matemáticas que sustentam a *Física Moderna* se referem à possibilidade de um fenômeno e não ao próprio fenômeno.

Na concepção newtoniana, conhecendo-se as velocidades e as posições das partículas de um sistema, em qualquer instante, pode-se calcular velocidades e posições em

qualquer instante posterior por meio de leis de movimento. As pesquisas, no nível atômico, revelam que, quanto mais precisamente se procura medir a posição da partícula, menos precisamente se consegue medir sua velocidade e vice-versa. Diante dessa dificuldade, é modificada a linguagem usada para descrever a natureza. Ao invés de partículas com posição e velocidade bem definidas, os físicos passam a falar de funções de onda:

A mecânica quântica introduziu uma maneira completamente nova de se falar do estado de um sistema. Em mecânica quântica falamos de construções matemáticas chamadas funções de onda, que nos dão informações apenas sobre as probabilidades das diversas posições e velocidades possíveis (WEINBERG, 1996, p. 59).

Weinberg (1996, p. 64) sintetiza que, na equação de Schrödinger, “ondas de elétrons não são ondas de alguma coisa; seu significado é simplesmente que o valor da função de onda em qualquer ponto nos fornece a probabilidade de que um elétron esteja neste ponto ou perto dele”.

Exemplificando, Omnès considera uma bola para comparar como ela seria pensada e descrita na *Física Clássica* e na *Física Moderna*. O físico clássico associaria as coordenadas do centro da bola a números e, poderia entendê-la como um conjunto de átomos, imaginando cada átomo como uma pequenina bola. O físico quântico também parte da idéia de que a bola é uma reunião de um número enorme de átomos, mas passa de imediato para uma função de onda com tantas variáveis quantos forem os elétrons e núcleos de átomos da bola.

Sua noção da posição do centro da bola não difere muito da de seu avô, o físico clássico. Mas se ele quiser falar da velocidade, então começa derivando a função de onda em relação a certas variáveis, divide-a pelo número complexo i (raiz quadrada de -1) [...] Não tem ele na cabeça nenhuma imagem precisa da bola e, na melhor das hipóteses, só lhe resta a impressão difusa de uma nuvem de probabilidades (OMNÈS, 1996, p. 177).

Apenas a teoria dos erros está presente nas teorias newtoniana e einsteiniana, sendo utilizada pelo físico para estimar de quanto seus resultados experimentais divergem das estimativas oferecidas pela teoria, verificando deste modo se os dados experimentais confirmam ou não a teoria.

Em resumo, a diferença crucial, entre a mecânica quântica e as mecânicas de Einstein e de Newton, reside na maneira de especificar o estado de um sistema físico em qualquer instante de tempo; e essa diferença está no fato de que a mecânica quântica introduz o conceito de probabilidade em sua definição de estado, o que não é o caso das mecânicas de Newton e de Einstein (HEISENBERG, 1999, p. 17).

A interpretação probabilística das ondas de elétrons foi apoiada por um argumento notável exposto por Heisenberg, que considerou a dificuldade encontrada pelos físicos na obtenção de medidas da posição e do momento linear de um elétron.

Para fazer uma medida precisa de posição é necessário usar luz de pequenos comprimentos de onda, porque a difração borra a imagem de qualquer coisa menor que o comprimento da luz. Mas a luz de pequeno comprimento de onda consiste de fótons com momentos proporcionalmente altos, e quando fótons com momentos altos são usados para observar um elétron, o elétron necessariamente recua com o impacto, levando consigo uma parte do momento do elétron. Assim, quanto mais precisamente tentamos medir a posição de um elétron, menos sabemos, depois da medida, sobre o momento do elétron. Essa regra ficou conhecida como o princípio de incerteza de Heisenberg (WEINBERG, 1996, p. 64).

Por que não percebemos essa incerteza entre os objetos do cotidiano? Porque a *constante de Planck* é muito pequena: um ponto decimal seguido de 26 zeros e então 6626. Weinberg (1996, p. 65) explica que

a constante de Planck é tão pequena que a função de onda de uma bola de bilhar rolando pela mesa é muito menor que o tamanho de um núcleo atômico; logo, não existe dificuldade para se fazer uma medida bastante precisa da posição da bola e de seu momento ao mesmo tempo.

A utilização dos conceitos da *Física Clássica* é limitada pelas relações de incerteza, as quais

contém dados quantitativos sobre os limites estabelecidos para a aplicação dos conceitos clássicos. Assim, o físico conhece os casos em que pode considerar os eventos como determinados e aqueles em que não o pode; conseqüentemente, pode utilizar um método isento de contradições intrínsecas para a observação e a sua interpretação física (BORN, 2000, p.18).

Avalia Heisenberg que “a introdução da incerteza na física nos colocou em guarda contra a adoção de uma posição por demais definida” (BORN, 2000, p. 31). Do mesmo modo posiciona-se Merleau-Ponty (2000, p. 143) para quem a *Mecânica Quântica* “subverteu as nossas categorias fundamentais, mais ainda que a teoria de Einstein, [...] a nova mecânica sempre se presta à discussão, mas, seja qual for o desfecho do debate, terá retirado da mecânica antiga o seu dogmatismo”.

Ao final do século XX, Hawking (1997, p. 72) comenta o *princípio da incerteza de Heisenberg*, pelo qual a incerteza quanto à posição da partícula, multiplicada pela incerteza quanto à sua velocidade, multiplicada pela massa da partícula, nunca pode ser inferior a *constante de Planck*, esclarecendo que “[...] esse limite não depende de como se procura medir a posição ou a velocidade da partícula, nem do tipo de partícula em questão: o princípio da incerteza de Heisenberg é uma propriedade fundamental do mundo”.

Analisando o *determinismo* segundo as concepções clássica e quântica, Weinberg (1996, p. 38) avalia:

A mecânica quântica não é determinista no mesmo sentido que a mecânica newtoniana; o princípio de incerteza de Heisenberg nos alerta para o fato de que não podemos medir precisa e simultaneamente a

posição e a velocidade de uma partícula e, mesmo que façamos todas as medidas possíveis em um só instante, podemos prever apenas probabilidades quanto ao resultado de experimentos futuros.

No final do século XX, Hawking (1997, p. 231) analisa:

Sabemos hoje que as esperanças de determinismo nutridas por Laplace não podem ser realizadas, pelo menos não nos termos que ele tinha em mente. [...] teorias quânticas são deterministas no sentido em que geram leis para a evolução da onda no tempo. Assim, se conhecermos a onda em um momento, poderemos calculá-la em qualquer outro momento. O elemento imprevisível, aleatório só se manifesta quando tentamos interpretar a onda em termos de posições e velocidades de partículas.

Heisenberg (1999, p. 63) recorda que repetia “interiormente a mesma pergunta: *pode a Natureza ser tão absurda como nos tem parecido nessas experiências com os átomos?*” Analisando a *Física Moderna*, Merleau-Ponty (2000, p. 137), considera que ela

faz freqüentemente a sua autocrítica e a crítica de sua própria ontologia. Por isso a oposição radical, traçada por Heidegger, entre a ciência ôntica e a filosofia ontológica só é válida no caso da ciência cartesiana, que apresenta a Natureza como um objeto exposto diante de nós, e não no caso de uma ciência moderna, que coloca em questão seu próprio objeto e sua relação com o objeto.

Dáí o valor em procurar pela essência da natureza entre as pesquisas científicas, pois, a partir das primeiras descobertas da *Física Moderna*, interrogações estão sempre presentes. Muda a atitude da pesquisa científica, não sendo mais conduzida no sentido de confirmar teorias pré-estabelecidas, mas sim, de constantemente levantar indagações. *Como não se interessar pela ciência a fim de saber o que é a Natureza?* indaga Merleau-Ponty, no início da década de 1960, considerando que:

Se a Natureza é um Englobante, não se pode pensá-la a partir de conceitos, a golpes de dedução, mas deve-se pensá-la a partir da experiência, em especial, a partir da experiência sob a sua forma mais regulada, ou seja, a partir da ciência. E pode-se tanto mais pensá-la a partir da ciência, porquanto, nestes últimos cinquenta anos, deixou de se precipitar sobre o objeto sem se surpreender por reencontrá-lo [...] *Por que o mundo é o que é, em vez de outra coisa?* é uma pergunta que está na ordem do dia desde o começo do século (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 140, grifos do autor).

Com o advento da teoria quântica, “os cientistas tornaram-se irremediavelmente conscientes de que seus conceitos básicos, sua linguagem e todo o seu modo de pensar eram inadequados para descrever os fenômenos atômicos” (CAPRA, 2000, p. 13). Diante disso, resolveram reunir-se e tentar uma interpretação unânime. Por volta de 1930, estudos de todas as questões postas acima, concernentes às investigações do mundo subatômico, culminam com a denominada interpretação de Copenhague da teoria quântica. Omnès (1996, p. 304) esclarece que o termo *interpretação* na Física significa

a derivação a partir dos princípios formais de uma teoria (relatividade ou mecânica quântica) de uma representação lógica da realidade observável sob uma forma que pertence ao senso comum, podendo ser transmitida pela linguagem comum e bem-adaptada à descrição direta das experiências tais como são realizadas na prática.

A interpretação de uma teoria física, avalia Omnès (1996, p. 178), pretende remediar “o fato de que seus conceitos primeiros são irrepresentáveis para a imaginação. Poderíamos até acrescentar que, sendo toda a física mais ou menos formal, inclusive a chamada física clássica, ela sempre requer uma interpretação”. Quanto à teoria da relatividade, dispomos de um método simples de interpretá-la, que consiste em imaginar observadores em movimento, em diferentes lugares. No caso da teoria quântica, onde as leis que regem o mundo subatômico são confirmadas por experiências e onde ocorre a impossibilidade de conceber uma teoria além de probabilidades,

a meta da *interpretação* é reconciliar esses extremos, mostrar, se possível, que eles são coerentes, estabelecer quais serão os modos de pensamento capazes de ligá-los sem deformá-los. Não poderíamos imaginar operação mais filosófica, pois se trata, em suma, de saber como pensar o mundo (OMNÈS, 1996, p. 177, grifo do autor).

Duas abordagens são assumidas na interpretação de Copenhague da teoria quântica. Uma delas envolve uma mudança na interrogação que norteia as pesquisas, e a outra se refere ao conceito de *complementaridade* construído por Bohr.

Ao invés de perguntar: como se pode demonstrar, no esquema matemático conhecido, uma dada situação experimental?, uma outra pergunta era feita: seria verdade dizer-se que ocorrem na Natureza somente aquelas situações experimentais que podem ser demonstradas pelo formalismo matemático? A hipótese de que isso fosse realmente verdade deu lugar a limitações no uso de conceitos que tinham sido, desde Newton, básicos na física clássica. Da mesma maneira que na mecânica newtoniana, nada impede que se fale em posição e velocidade do elétron e, além disso, pode-se observar e medir essas grandezas. Mas, contrariamente ao que ocorre na mecânica de Newton, não se pode medir simultaneamente aquelas grandezas com alta precisão arbitrariamente. De fato, o produto das duas imprecisões, em suas medidas, resultou não ser menor que a constante de Planck dividida pela massa da partícula. Relações análogas foram igualmente formuladas para outras situações experimentais. Todas elas são usualmente chamadas de *relações de incerteza*, diferentes instâncias do *princípio de indeterminação*. E assim, aprendeu-se que os velhos conceitos não se adequam à Natureza de maneira exata (HEISENBERG, 1999, p. 63, grifos do autor).

Assim, com a *Física Quântica*, ingressa na ciência o entendimento de que lidamos com descrições *aproximadas* da realidade. A Física do século XX mostra que conceitos e teorias da ciência são limitados, não fornecendo verdade ou certeza absolutas, nem entendimentos completos e definitivos. A proposta cartesiana deixa de ser considerada como sendo a única maneira de atingir o conhecimento científico. No entanto, o pensamento

de Descartes e sua concepção de natureza continuam influenciando todos os ramos da ciência contemporânea, ainda que apontadas as suas limitações.

A outra abordagem da interpretação de Copenhague se relaciona com o conceito de *complementaridade* elaborado por Bohr.

Uma coisa não pode ser ao mesmo tempo uma partícula (isto é, substância confinada a um volume pequeno) e uma onda (isto é, substância espalhada sobre uma região de dimensões muito grandes), mas se complementam uma à outra. Jogando-se com ambas as descrições, indo-se de uma à outra, obteremos por fim a impressão correta desse estranho tipo de realidade que permeia os fenômenos atômicos. [...] O conhecimento da posição de uma partícula é complementar ao conhecimento de sua velocidade (ou momento linear). Se conhecermos uma dessas grandezas com alta precisão, a outra não poderá ser conhecida com essa mesma alta precisão; mesmo assim, precisaremos conhecer ambas as imprecisões a fim de determinar o comportamento do sistema (HEISENBERG, 1999, p. 73-74).

A maneira quântica de descrever os dois aspectos, de partícula e de onda, é considerada por Bohr

como duas descrições complementares da mesma realidade. Cada uma dessas descrições pode ser só parcialmente verdadeira, e limitações devem ser impostas ao uso, tanto do conceito de partícula como do de onda, pois caso contrário, não haveria como evitar contradições. Se levarmos em conta essas limitações, expressas pelo princípio de incerteza, as contradições desaparecerão (HEISENBERG, 1999, p. 64).

Matematicamente, esclarece Heisenberg (1999, p. 74), duas distintas descrições podem ser utilizadas, sendo que

na mecânica de matrizes, o formalismo é normalmente escrito de maneira a assemelhar-se ao da mecânica newtoniana, com equações de movimento para as coordenadas de posição e momento linear das partículas. E elas podem, por uma simples transformação, ser reescritas de maneira a tomar a forma de uma equação de onda, para ondas tridimensionais ordinárias de matéria. Assim, portanto, essa possibilidade de se jogar com descrições complementares distintas encontra sua analogia nas diferentes transformações que o esquema matemático oferece [...].

Enquanto que, na *Física Clássica*, é conhecida a trajetória de uma partícula, na *Física Quântica* a função de probabilidade descreve, durante o processo de observação, todo um leque de acontecimentos possíveis.

O ato de observação, por si mesmo, muda a função de probabilidade de maneira descontínua; ele seleciona, entre todos os eventos possíveis, o evento real que ocorreu. Visto que, pela observação, nosso conhecimento do sistema mudou descontinuamente, sua representação matemática também sofreu essa descontinuidade (HEISENBERG, 1999, p. 80).

Entre os opositores à interpretação de Copenhague da teoria quântica encontram-se eminentes cientistas, entre os quais Einstein, que nunca aceitou a idéia de um universo regido pelo acaso. Einstein acreditava na capacidade humana de conseguir uma única descrição completa da natureza em todas as escalas e defendia a postura tradicional da Física onde “o pensamento clássico só quer considerar determinações positivas, compô-las numa realidade única. Ora, a mecânica ondulatória afirma a impossibilidade de compô-las numa realidade pré-formada e completamente acessível [...]” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 148).

Heisenberg (1999, p. 116) busca analisar essa dificuldade de entendimento e aceitação da interpretação de Copenhague, concluindo que:

iremos encontrar, na raiz dessa dificuldade, a divisão cartesiana. Essa partição penetrou tão profundamente na mente humana durante os três séculos que se seguiram a Descartes, que muito tempo levará até que ela seja substituída por uma atitude realmente diferente no que se refere ao problema da Realidade.

Da perspectiva do físico, o objetivo não foi alterado. Comparando o objetivo dos físicos dos séculos XIX e XX, Heisenberg avalia que permaneceu o mesmo: “descobrir descrições e leis objetivas da natureza. A diferença é que o físico do século XX compreendeu que isso nem sempre é possível” (BORN, 2000, p. 34).

Refletindo a respeito da ação científica, Merleau-Ponty (2000, p. 137) reconhece:

Não se tem certamente que pedir à ciência uma nova concepção da Natureza, pronta e acabada, mas encontramos nela com o que eliminar as falsas concepções da Natureza. Por outro lado, os conceitos aceitos de Natureza fornecem ao nosso pensamento, senão orientações, pelo menos os seus termos de referência.

Na visão de mundo segundo a *Física Clássica*, é pressuposto que existe uma separação explícita entre o observador e os objetos que constituem a natureza, entendidos como completamente isolados uns dos outros e passíveis de serem contados e ordenados. Nessa concepção, é assumido que a ação do pesquisador, ao medir e efetuar uma descrição da natureza, não interfere com o objeto observado. Essa visão de mundo é profundamente modificada com a *Mecânica Quântica*. O observador determina se o elétron é partícula ou onda na medida em que interage com instrumentos, sendo que, antes do elétron ser medido, ele é potencialmente partícula e onda. A realidade no mundo quântico pode depender do ato de observação, sendo que vários observadores efetuando medidas não obterão, necessariamente, os mesmos resultados. Pela ação de tecnologias, em algumas pesquisas em *Física Quântica* “o próprio ato de observar altera o objeto que esteja sendo observado, quando seus números quânticos são pequenos” (HEISENBERG, 1999, p.39).

O papel do observador será o de cortar a cadeia das probabilidades estatísticas, de fazer surgir uma existência individual em ato [...] A operação de medida, em mecânica ondulatória, é uma operação *engajada*. Toda operação da nova mecânica é uma operação no mundo, que nunca é alheia ao ato do medidor (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 152, grifo do autor).

Bicudo (2000, p. 27) esclarece que, nessa concepção,

a função de ondas estacionárias, permanece apenas como provável. Ela se atualiza, isto é, é criada, torna-se real, somente quando há uma ação de um observador qualquer que desencadeia o acontecimento. Até então, a realidade permanece como potencial. Não se trata, portanto, apenas de influenciar a realidade, mas de criá-la, dar-lhe existência real, tirando-a do estado potencial.

Aí se encontra a diferença ou confluência com a concepção aristotélica de potência e ato, pois o ato, na concepção da *Física Quântica* expandida pela concepção merleauPontiana, é efetuado pelo *observador*, na linguagem da primeira, e pelo *sujeito encarnado*, na linguagem do segundo.

Segundo os pressupostos estabelecidos no mundo da ciência, a *objetividade* é um critério fundamental na avaliação de qualquer resultado científico. Heisenberg (1999, p. 82) questiona:

A interpretação de Copenhague ainda segue esse ideal? Talvez se possa dizer que a teoria quântica corresponda a esse ideal tanto quanto possível [...] descrevemos nossos experimentos apoiados nos conceitos da física clássica e, ao mesmo tempo, do conhecimento de que esses conceitos não se ajustam à Natureza de maneira precisa. É na tensão reinante entre esses dois pontos de partida que se encontra a raiz do caráter estatístico da teoria quântica.

Imbricam-se as concepções de objetividade e ausência dela na formulação da função de probabilidade a qual

combina em si elementos objetivos e subjetivos. Ela contém asserções sobre possibilidades ou tendências mais propícias (*potentia*, na filosofia aristotélica) e tais assertivas são completamente objetivas, por não dependerem de observador algum; ademais, contém ela afirmações acerca de nosso conhecimento do sistema que, é claro, são subjetivas no sentido de poderem diferir de um experimentador a outro (HEISENBERG, 1999, p. 78).

A visão de mundo cartesiana, fundada na dicotomia observador/observado se revela inadequada para pensar o mundo tal como ele é revelado pela *Física Moderna*.

O pensamento clássico coordena os fenômenos num modelo objetivo da Natureza. É essa unificação que nos parece impossível no nível da mecânica quântica. Se uma filosofia puder corresponder à mecânica quântica, será uma filosofia [...] mais subjetivista. Ao *eu penso* [...] deve suceder o aspecto situado e encarnado do físico (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 156, grifos do autor)

Note-se que esse autor constata a necessidade do *sujeito encarnado* para que a compreensão, ainda que pré-predicativa, da natureza se dê.

Pessis-Pasternak (1993, p. 103) apresenta o entendimento de Feyerabend:

fazemos parte da natureza. Se, por outro lado, de acordo com uma teoria específica, estabelecer-se uma distinção entre o ser humano e a natureza, como se o homem fosse um mero estrangeiro ao mundo material, de que modo se poderia atingi-la?

Como exemplo, Feyerabend considera um termômetro frio introduzido em um líquido quente, o qual esfria, sendo possível calcular a diferença de temperatura. Na teoria quântica, tal cálculo é impossível, pois não se pode diferenciar o termômetro do líquido que está sendo avaliado. “Essa situação pode parecer estranha, a menos que você se dê conta de que é parte integrante da natureza; então a separação desaparece, e o paradoxo está resolvido” (idem, 1993, p. 103).

Recorrendo à literatura juvenil, encontramos as aventuras da menina Dorothy, que iniciam quando o metrô em que viaja dispara e ela é conduzida ao mundo das partículas subatômicas. Em um episódio dessa narrativa, é solicitado que ela estenda seu braço.

Dorothy esticou o braço, enfiando-o no nevoeiro brilhante que a cercava. Quando o fez, ficou surpresa e horrorizada ao ver sua própria mão ficar correspondentemente enevoada assim que penetrou na bruma. Ali, estendendo-se a partir da manga do seu vestido, estava seu próprio braço tal como sempre o conhecera, mas do cotovelo para baixo ele se espalhava e tornava borrado e indistinto.

– Que aconteceu? exclamou, assustada.

– Que foi feito da minha mão? Puxou-a depressa e ficou aliviada ao ver que voltara a ter a aparência de sempre.

– Ora, ela entrou no nevoeiro da realidade e, em consequência, tornou-se mais real.

– Mais real! Dorothy repetiu. – Para mim não pareceu nada mais real. Foi como um sonho ou um pesadelo. Agora é que ela parece perfeitamente real e de volta ao normal.

– Ah, mas isso não passa de uma *ilusão de normalidade*. Na escala do ser que você habita agora, uma escala em que a Constante de Planck não pode mais ser ignorada, uma bruma como essa é a realidade. Sua idéia de normalidade, com tudo bem definido e preciso, é uma ilusão. Uma ilusão que decorre do fato de você ser incapaz de ver os detalhes de seu próprio mundo com suficiente precisão (GILMORE, 2002, p. 32, grifos do autor).

A dificuldade de entendimento do universo, conforme é revelado pelas investigações do mundo subatômico, deve-se à forte influência exercida pelo pensamento cartesiano, que afirma a separação observador/observado.

Todavia, a situação modificou-se com a edificação da teoria quântica [...] A ciência natural não se restringe simplesmente a descrever e explicar a Natureza; ela resulta da interação entre nós mesmos e a Natureza, e propicia uma descrição que é revelada pelo nosso método de

questionar. Essa foi uma possibilidade que não poderia ter ocorrido a Descartes, mas que torna impossível uma separação bem nítida entre o mundo e o *Eu* (HEISENBERG, 1999, p. 115, grifo do autor).

No que se refere às repercussões da *Mecânica Quântica*,

a despeito dos esforços realizados para refutá-la, a mecânica quântica sempre saiu vitoriosa de todas as provas [...] O ajuste entre a teoria e a experiência chega, em certos casos, até mais de dez algarismos significativos, o que continua sendo sem precedentes em todas as áreas da ciência (OMNÈS, 1996, p. 174).

A partir da constituição da *Mecânica Quântica* teve início a busca por uma teoria final unificadora, ainda não equacionada, sendo que algumas de suas características são teorizadas pelos cientistas. Na prática, os cálculos apresentam problemas técnicos, sendo que

a única maneira de contorná-los é seguir a seguinte receita peculiar: é preciso somar as ondas sobre as histórias das partículas que não estão presentes no tempo *real* que você e eu vivemos, mas que ocorrem no que é conhecido como tempo imaginário. O tempo imaginário pode soar como ficção científica, mas é, na realidade, um conceito matemático bem definido (HAWKING, 1997, p. 172, grifo do autor).

A utilização de *números imaginários* nos cálculos possibilita “um efeito interessante sobre o espaço-tempo: a distinção entre tempo e espaço desaparece completamente” (HAWKING, 1997, p. 173).

Atualmente, *números imaginários* são estudados no Ensino Básico, e, muitas vezes, considerados como sendo um tópico inútil. No entanto, sua abordagem possibilita o entendimento de que o espaço euclidiano não é o único possível, o que é evidenciado com a criação das teorias científicas contemporâneas.

Sintetizando, em termos gerais, “o século XIX procurou fotografar a natureza, enquanto que o século XX descreve a natureza numa linguagem matemática. O físico, todavia, compreendeu que, quando acreditava estar fotografando, nem sempre o estava fazendo” (BORN, 2000, p. 33).

A visão de homem e de natureza como sendo dicotomizados permeia a construção da ciência moderna e as descobertas da *Física Quântica* mostram íntimas ligações entre tudo. Desde as primeiras décadas do século XX, são alterados os princípios filosóficos que se encontravam anteriormente estabelecidos. O que não ocorre no que se refere à sustentação matemática das novas teorias, pois “a desestimulante complicação matemática, de algumas partes da teoria quântica, representa a consequência extrema dos métodos utilizados por Newton, Gauss e Maxwell” (HEISENBERG, 1999, p. 45).

A profunda mudança na visão de homem e de mundo que a teoria quântica conduziu, modificando as concepções tradicionais, pode levar à errônea dedução que a

Matemática que sustentou o desenvolvimento da ciência moderna tornou-se obsoleta. No entanto, a Matemática que sustenta a produção da ciência moderna não perde validade, continuando a ser utilizada, porém apresenta limitações.

4 A CONCEPÇÃO CONTEMPORÂNEA DE MUNDO: A COMPLEXIDADE SISTÊMICA

A idéia central desenvolvida nesse capítulo refere-se à emergência do pensamento sistêmico com as investigações efetuadas no campo da Biologia, na primeira metade do século XX, as quais carecem de sustentação matemática. São apresentadas duas vertentes que existem nas pesquisas em Biologia: a mecanicista e a sistêmica. Com a construção da ciência da Ecologia, a postura cartesiana é entendida como uma ameaça, sendo apresentado o seu antídoto: o *cuidado*. A concepção de totalidade sistêmica também é investigada buscando-se subsídios na linguagem da Arte pictórica.

4.1 AS DUAS VERTENTES PRESENTES NA BIOLOGIA: O MECANICISMO E A VISÃO SISTÊMICA

A visão de mundo cartesiana como sendo uma máquina perfeita, governada por leis exatas, também é assumida pelos investigadores das áreas biológicas. William Harvey disseca animais e seres humanos, descobrindo o funcionamento do sangue, das artérias e do coração. A aplicação do modelo mecanicista de Descartes ao fenômeno da circulação sanguínea é bem sucedida. Entretanto, as tentativas no sentido de aplicar o modelo mecanicista para descrever outras funções orgânicas resultam infrutíferas, uma vez que envolvem processos químicos desconhecidos na época.

No século XVIII, Antoine Lavoisier mostra que a respiração é uma forma especial de oxidação, dando início ao entendimento dos animais como sendo máquinas mais complexas que mecanismos de relojoaria por envolverem processos químicos. O mecanicismo cartesiano continua sendo dogmaticamente aceito, permanecendo entre os biólogos o entendimento de que as leis da Biologia são redutíveis às leis da Física e da Química.

No final do século XVIII e início do século XIX, um novo enfoque norteia as pesquisas em Biologia priorizando a questão da forma biológica, principalmente nas grandes escolas francesas de anatomia comparativa. Alguns biólogos sofrem influência do movimento intelectual que acontece nessa época: o *movimento romântico*, quando se buscavam explicações das propriedades dos seres vivos pela visualização das suas formas.

Goethe, um dos principais pensadores do *movimento romântico*, pensa a forma biológica do ponto de vista dinâmico, concebendo-a “[...] como um padrão de relações

dentro de um todo organizado – concepção que está na linha de frente do pensamento sistêmico contemporâneo” (CAPRA, 1998, p. 35). Para Goethe, cada organismo vivo é concebido como uma gradação padronizada dentro de uma totalidade harmoniosa. Suas idéias são ofuscadas pelo sucesso angariado com a utilização da proposta newtoniana.

A obra *What is Life?* do físico Erwin Schrödinger, um dos criadores da *Mecânica Quântica*, publicada em 1944, apresenta hipóteses sobre a estrutura molecular dos genes, abrindo “[...] uma nova fronteira da ciência: a *Biologia Molecular*. Nas décadas seguintes, esse campo gerou uma série de descobertas triunfantes, que culminaram na elucidação do código genético” (CAPRA, 1998, p. 19).

O sucesso da *Biologia Molecular* induz a concepção segundo a qual todas as funções biológicas são explicadas por estruturas e mecanismos moleculares, alicerçando fortemente a Biologia na Física e na Química. Desse modo fica consolidada a concepção mecanicista da vida como um dogma entre a maioria dos biólogos. Na avaliação de Merleau-Ponty (2000, p. 392), que reflete sobre o conceito de natureza, “à biologia repugna fazer sua revolução antimecanicista, esquecendo que a subversão do arcabouço mecanicista da física se tornou necessária diante de alguns fatos: experiência de Michelson – experiência de Planck”.

Considerando a relação da Física com os outros ramos da ciência, no tocante ao relacionamento com a Biologia, Heisenberg (1999, p. 145) conclui:

Os métodos da biologia diferem daqueles da física e da química, os conceitos biológicos sendo de caráter mais qualitativo que os das ciências exatas. Conceitos como vida, órgão, célula, função de um órgão, percepção não encontram correspondência em física e química. Por outro lado, a maior parte dos avanços em biologia, durante os últimos cem anos, foi conseguida pela aplicação da química e da física ao organismo vivo, e toda a tendência da biologia, em nosso tempo, é explicar os fenômenos biológicos com base nas leis físicas e químicas.

O enfoque restrito no funcionamento das partes fundamentais reduz o entendimento de um organismo como sendo “apenas físico-químico. A partir do momento em que se quer precisar o que se passa *nele*, não levando em conta a nossa visão global, em tal ponto e em tal instante, resta apenas a físico-química” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 333, grifo do autor).

Heisenberg avalia que os organismos vivos, constituídos por estruturas altamente complexas, possuem um grau de estabilidade que não poderiam ter, baseando-se apenas nas leis da Física ou da Química e conclui, assim, que algo de novo deveria ser acrescentado àquelas leis, para compreender completamente os fenômenos biológicos.

Heisenberg sintetiza dois pontos de vista discutidos na literatura da ciência biológica, na década de 1950, apresentados a seguir.

Uma linha de pesquisa na ciência da Biologia sustenta que às leis físico-químicas deve ser acrescentado o conceito de *história*, levando em consideração o longo período que se passou desde a formação desse planeta, ou seja, refere-se à teoria da evolução de Darwin em sua relação com a genética. De acordo com essa teoria, ocorrendo um imenso número de tentativas, algumas estruturas passam a duplicar a si mesmas e mudanças acidentais aumentam a diversidade biológica. Estruturas diferentes, competindo na aquisição da matéria circundante, seguem o princípio da sobrevivência do mais apto, possibilitando a evolução dos organismos. Em suas viagens, Darwin observara que diferentes espécies eram adaptadas às condições geográficas e climáticas dos locais onde viviam, concluindo que apenas os mais aptos sobrevivem e se reproduzem. Um grande número de indivíduos, causando carência de alimentos e competição, faz acontecer uma seleção natural.

Nessa concepção, o meio ambiente é considerado como o local de onde seres vivos retiram seu alimento, e não como um sistema vivo integrado e interagindo em um planeta. Tal primeiro entendimento traz em seu bojo a dicotomia cartesiana, uma vez que

a *coisa pensante* de Descartes fora confinada aos humanos, ao *Eu*, os animais não receberam alma e, assim, foram relegados exclusivamente à *coisa extensa*. Nessa maneira de pensar, o comportamento dos animais pode ser cientificamente entendido, esse é o argumento, nos mesmos termos da matéria em geral e as leis da física e da química, reforçadas pelo conceito de história, seriam suficientes para explicar esse comportamento [...] Mas a *partição* cartesiana é uma simplificação exagerada e, como tal, perigosa [...] (HEISENBERG, 1999, p. 149, grifos do autor).

A idéia de evolução darwinista se alinha com a concepção da natureza como sendo uma máquina. Segundo esse modelo, os homens são entendidos como concorrentes entre si e contra os desafios da natureza. Nessa concepção se passa à prática de uma produção industrial competitiva e predatória, uma vez que a vida em sociedade é concebida como luta competitiva pela existência e impera a crença do progresso material ilimitado, a ser alcançado através do máximo crescimento econômico e tecnológico.

Uma outra abordagem de cientistas da Biologia considera que os conceitos físico-químicos não proporcionam uma descrição completa dos fenômenos biológicos. Entendem que conceitos relacionados à humanidade, tais como percepção e afeto, são indispensáveis para uma descrição da vida. Desse ponto de vista, a combinação do darwinismo com a Física e a Química não é suficiente para explicar a vida orgânica.

Portanto, para um entendimento da vida, será provavelmente necessário ir-se além da teoria quântica a fim de construir um novo conjunto coerente de conceitos, o qual teria a física e a química como *casos limites*; a história seria parte essencial desse novo conjunto e conceitos como percepção, adaptação e afeição também lhe pertenceriam (HEISENBERG, 1999, p. 148, grifos do autor).

A primeira postura dos cientistas da Biologia, concernente à abordagem mecanicista, torna-se uma difundida maneira de pensar, uma vez que as teorias que contemplavam os padrões de organização característicos dos fenômenos da vida não eram aceitas como sendo cientificamente embasadas. Isso é constatado por Heisenberg (1999, p. 150), no final da década de 1950, quando avalia as pesquisas em Biologia, onde “o grau de complexidade é tão desencorajador que, presentemente, não se pode imaginar qualquer conjunto de conceitos em que a inter-relação entre eles seja tão bem definida a ponto de permitir uma correspondente representação matemática”.

Como ainda não se encontram disponíveis, na primeira metade do século XX, as ferramentas matemáticas para se lidar com a complexidade dos sistemas vivos, a postura não-mecanicista é desacreditada nos meios científicos, e, no entanto, é esse caminho que Merleau-Ponty percorre, considerando que, no que se refere “[...] ao trabalho da ciência, não se pode presumir essa operação concluída. É preciso aceitá-la em sua obscuridade, em sua espessura, com todas as motivações que nela estão implicadas, que nela *funcionam* (muitas vezes, pré-cientificamente)” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 328, grifo do autor).

No que se refere aos problemas do desenvolvimento e da diferenciação, a proposta mecanicista se mostra limitada. Nos primeiros estágios de desenvolvimento dos organismos superiores, o número de células aumenta. Sendo a informação genética idêntica em cada célula, o modelo mecanicista não explica o fato delas se especializarem de diferentes maneiras, tornando-se ósseas, musculares, etc. “O problema básico do desenvolvimento, que aparece em muitas variações por toda a biologia, foge claramente diante da concepção mecanicista da vida” (CAPRA, 1998, p. 38).

O embriologista Hans Driesch inicia a oposição à Biologia mecanicista com seus experimentos pioneiros sobre ovos de ouriços-do-mar. Ao destruir uma das células de um embrião de ouriço-do-mar, no estágio inicial de duas células, Driesch observa que a célula restante se desenvolve não formando meio animal, mas sim, num organismo completo, porém menor. “Driesch compreendeu que os seus ovos de ouriço-do-mar tinham feito o que uma máquina nunca poderia fazer: eles regeneraram totalidade a partir de algumas de suas partes” (CAPRA, 1998, p. 39).

Vê-se, com isso, a ausência de determinismo absoluto nos fenômenos da vida. Refletindo sobre as experiências de Driesch, constata Merleau-Ponty (2000, p. 275) que

animais aparentemente muito simples apresentam-nos algo muito diverso de uma atividade maquinal. As máquinas não passam de organismos incompletos, aos quais faltam duas propriedades para aparecer como organismos: a construção de formas e a regeneração.

Os experimentos de Driesch o levam a formular a primeira teoria do vitalismo. A oposição ao mecanicismo acontece com o trabalho dos biólogos vitalistas e também com os

biólogos organísmicos. Os primeiros defendem que alguma entidade, força ou campo não-físico deve ser acrescentada às leis da Física e da Química para se entender a vida.

Os biólogos organísmicos afirmam que o ingrediente adicional é o entendimento da *organização*, ou das *relações organizadoras* [...] a concepção de organização foi aprimorada na de *auto-organização* nas teorias contemporâneas dos sistemas vivos [...] O entendimento do padrão de auto-organização é a chave para se entender a natureza essencial da vida (CAPRA, 1998, p. 38, grifos do autor).

Nas pesquisas realizadas após o trabalho de Driesch,

o duelo entre mecanicismo e vitalismo continua [...] ziguezague das pesquisas de causalidade linear. Interação? Se é concebida como um conjunto de causalidades lineares, é uma clareza ilusória: existe um fio ou um número finito de fios da meada? Não: a causa é efeito, há uma rede (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 384).

O termo empregado por Merleau-Ponty – *rede* – é um conceito fundamental da nova visão de mundo. Surpreendentemente, Capra explicita que, desde o início da construção da ciência da Ecologia, as comunidades ecológicas têm sido concebidas como reuniões de organismos ligados à maneira de *rede*.

O entendimento de sistemas vivos interligados e interdependentes, concebidos como *redes auto-organizadoras*, acontece em vários momentos no decorrer da história.

No entanto, modelos detalhados de sistemas auto-organizadores só puderam ser formulados muito recentemente, quando novas ferramentas matemáticas se tornaram disponíveis, permitindo aos cientistas modelarem a interconexidade não-linear característica das redes (CAPRA, 1998, p. 99).

Gradualmente, pesquisadores do mundo da ciência se dão conta de que a concepção de mundo mecanicista é inadequada para uma nova compreensão científica de problemas que não podem ser entendidos isoladamente, que estão interligados e interdependentes. Essa concepção, na ciência do século XX, recebe denominações diversas: visão de mundo *holística*, *organísmica*, *ecológica* ou *sistêmica*.

Embora as abordagens sistêmicas desenvolvidas na primeira metade do século não tivessem resultado numa teoria matemática formal, elas criaram uma certa maneira de pensar, uma nova linguagem, novas concepções e todo um clima intelectual que tem levado a avanços científicos significativos em anos recentes (CAPRA, 1998, p. 76).

O bioquímico Lawrence Henderson foi o primeiro a utilizar o termo *sistema* para denominar tanto organismos vivos como sistemas sociais.

Dessa época em diante, um sistema passou a significar um todo integrado cujas propriedades essenciais surgem das relações entre suas partes, e *pensamento sistêmico*, a compreensão de um fenômeno dentro do contexto de um todo maior [...] Entender as coisas sistemicamente significa,

literalmente, colocá-las dentro de um contexto, estabelecer a natureza de suas relações (CAPRA, 1998, p. 39, grifos do autor).

Refletindo sobre a natureza, sobre o lugar desses estudos na Filosofia e o lugar do corpo humano nesses estudos, Merleau-Ponty (2000, p. 332) procura pelo sentido da natureza, buscando

uma verdadeira explicação do Ser, isto é, não a exibição de um Ser, mesmo infinito, no qual se processa – de um modo que, em princípio, nos é incompreensível – a articulação recíproca dos seres [...] Portanto, é necessário para nós, por exemplo, que a Natureza em nós tenha alguma relação com a Natureza fora de nós, é necessário até mesmo que a Natureza fora de nós nos seja desvelada pela Natureza que somos. O que buscamos é o *nexus* e não a colocação atribuída a cada um de nós sob o olhar de Deus [...] Não se trata mais de ordenar as nossas razões mas de ver como tudo isso se *mantém junto* [...]. (grifos do autor)

A concepção de *rede* é utilizada pelos biólogos sistêmicos em todos os níveis, os ecossistemas sendo considerados redes de organismos, entendidos como redes de células, órgãos e sistemas de órgãos. Os níveis são pensados de uma nova maneira, em termos de relações e de contexto.

A teia da vida consiste em redes dentro de redes. Em cada escala, sob estreito e minucioso exame, os nodos da rede se revelam como redes menores [...] Na natureza não há *acima* ou *abaixo*, e não há hierarquias. Há somente redes aninhadas dentro de outras redes [...] Na segunda metade do século XX a concepção de rede foi a chave para os recentes avanços na compreensão científica não apenas dos ecossistemas, mas também da própria natureza da vida (CAPRA, 1998, p. 45, grifos do autor).

Nessa concepção, a *metáfora da rede* pode substituir a *metáfora da máquina*, característica do modelo cartesiano. A *metáfora da rede* se estende, explicando a concepção de mundo e de conhecimento. Para mostrar a diferença entre as metáforas, referentes ao conhecimento, são abordadas aquelas do *conhecimento como edifício* e do *conhecimento como rede*.

Quanto à concepção de conhecimento, na atualidade, também passa a ser compreendida à moda de uma rede:

No novo pensamento sistêmico, a metáfora do conhecimento como um edifício está sendo substituída pela da rede. Quando percebemos a realidade como uma rede de relações, nossas descrições também formam uma rede interconectada de concepções e de modelos, na qual não há fundamentos. Para a maioria dos cientistas, essa visão do conhecimento como uma rede sem fundamentos firmes é extremamente perturbadora [...] (CAPRA, 1998, p. 48).

A visão do mundo como uma rede de inter-relações induz modalidades de investigação diferenciadas da postura tradicional, como, por exemplo, aquela relacionada à construção de Redes de Significação. Nesse modo de pesquisa, a obtenção de dados

acontece com a descrição do percebido, sendo que “a investigação fenomenológica não se reduz à descrição. Ela trabalha com os dados fornecidos pela descrição e vai além, analisando-os e interpretando-os de acordo com critérios de rigor” (BICUDO, 2000, p. 75). A partir das análises dos dados são obtidos os invariantes abrangentes, as *categorias abertas*, as quais revelam as grandes convergências, expostas segundo a configuração da Rede, explicitando núcleos para os quais convergem os sentidos.

A Rede de Significações não é composta de pontos, constituídos por conceitos, que se interligam formando a trama. Mas cada *nó* da rede expressa a experiência vivida que comporta *círculos* ou *turbilhões* no interior dos quais cada elemento é representativo de todos os outros e traz como que vetores que o ligam a eles. A experiência vivida, ao ser expressa, e somente assim pode constituir a rede, deixa a marca do sentido percebido pela pessoa e, ao mesmo tempo, a marca da história e da cultura por meio de sistemas constituídos de expressão (BICUDO, 2000, p. 97, grifos da autora).

A mudança da *metáfora da máquina* para a *metáfora da rede* implica o abandono da idéia de que a Física é a sustentação ideal para todas as outras ciências e a principal fonte de metáforas para descrições científicas. Considerando as mudanças na Biologia, na Medicina, na Psicologia e na Economia, Capra (2002, p. 14) avalia que Física não é

a ciência mais adequada para estabelecer um novo paradigma e constituir a principal fonte das metáforas usadas nesses outros campos. O paradigma da física tinha de ser substituído por uma estrutura conceitual mais ampla, uma visão de realidade cujo centro fosse ocupado pela própria vida

Em seus estudos sobre a significação filosófica da *Mecânica Quântica*, Merleau-Ponty (2000, p. 154) avalia:

A física não deveria conceber-se como uma busca da verdade, deveria renunciar a determinar um real físico; seria apenas um conjunto de medidas ligadas entre si por equações e que permitiria prever o resultado de medidas futuras. A física formalista ganha toda liberdade, mas perde seu conteúdo ontológico. Ela não significa nenhum modo de ser, nenhuma realidade.

Seguindo Capra e Merleau-Ponty, constata-se que a Física perde sua posição de ser a única fonte de metáforas, de ser a única coluna de sustentação para o entendimento do mundo. O percorrer do caminho pelo qual a *Ecologia* é constituída pode contribuir para o entendimento da nova visão de mundo, que emerge, com o estudo de comunidades de organismos, nas primeiras décadas do século XX.

A palavra *Ecologia* é introduzida, em 1866, pelo biólogo alemão Ernst Haeckel, que a define como sendo a ciência das relações entre o organismo e o mundo externo circunvizinho. *Ecologia* deriva do grego ‘oikos’, significando ‘lar’. Em 1909, a palavra

Umwelt, que pode ser traduzida por *meio ambiente*, foi utilizada pela primeira vez pelo biólogo Jakob von Uexküll.

Merleau-Ponty (2000, p. 277), baseando-se na concepção de Uexküll, considera que os animais inferiores só permitem penetrar neles o que for interessante para a sua vida, constituindo com seu mundo uma espécie de unidade fechada. A vida do animal não é uma luta brutal pela sobrevivência em um mundo exterior hostil, ele vive harmoniosamente num *Umwelt*, apesar deste apresentar coisas freqüentemente perigosas, mas às quais está adaptado. De tal constatação decorre a recusa da idéia darwinista de que o comportamento dos animais e seus organismos são soluções cada vez mais perfeitas para um mesmo problema. “Para Darwin, a vida é incessantemente ameaçada de morte; para Uexküll, há uma solidez das superestruturas, uma remanência da vida”

Referindo-se aos conceitos de Uexküll, Merleau-Ponty (2000, p. 281) analisa que

deve-se compreender a vida como a abertura de um campo de ações. O animal é produzido pela produção de um meio, ou seja, pelo aparecimento, no mundo físico, de um campo radicalmente diverso do mundo físico, com sua temporalidade e sua espacialidade específicas. Daí a análise da vida geral do animal, das relações que ele mantém com seu corpo, das relações do seu corpo com o seu meio espacial (seu território), da interanimalidade, quer no seio da própria espécie, quer no seio de duas espécies diferentes, até habitualmente inimigas [...].

Ao interpretar filosoficamente a noção de *Umwelt* assumida por Uexküll, Merleau-Ponty (2000, p. 281) considera que o conceito *Umwelt* vem “unir aquilo que habitualmente se separa: a atividade que cria órgãos e a atividade de comportamento, tanto inferior quanto superior [...] por toda parte existe desdobramento de um *Umwelt*”.

Esse desdobramento pode ser descrito metaforicamente como um “puro sulco que não se relaciona com nenhum navio” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 286). Na concepção de Uexküll, o desdobramento de um *Umwelt* é comparado a uma melodia, uma melodia que se canta a si mesma. Uma melodia, em sua totalidade, é mais do que uma seqüência de notas capturadas por um mecanismo auditivo. Sequer pode-se falar de uma parte dela. Ela perde seu sentido se algo lhe é retirado, pois a melodia está no todo interligado, não é causada pela primeira nota musical. Sequer a última nota é o efeito de uma seqüência de notas. A melodia se mostra para o sujeito que a percebe mesmo quando nenhum instrumento musical a executa.

Aí está uma comparação plena de sentido [...] Assim como o pintor se impressiona com um quadro que não está diante dele, o corpo fica suspenso àquilo que ele canta, a melodia encarna-se e encontra nele uma espécie de servo. A melodia nos dá uma consciência particular do tempo. Pensamos naturalmente que o passado segrega o futuro adiante dele. Mas essa noção de tempo é refutada pela melodia. No momento em que começa a melodia, a última nota está lá, à sua maneira. Numa melodia, ocorre uma influência recíproca entre a primeira e a última nota, e devemos dizer que a

primeira nota só é possível pela última e reciprocamente. É assim que as coisas se passam na construção de um ser vivo. Não há, em absoluto, prioridade do efeito sobre a causa (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 282).

Continuando sua interpretação filosófica na noção de *Umwelt* apresentada por Uexküll, Merleau-Ponty (2000, p. 283) foca o exemplo do carrapato, parasita do mamífero, que pode permanecer dezoito anos em estado letárgico, para então deixar-se cair sobre uma parte desprovida de pelos de um animal.

Não há nenhuma estimulação vinda de fora que não tenha sido provocada pelo movimento próprio do animal [...] O comportamento não pode ser compreendido se o compreendermos instante por instante [...] Cada parte da situação só age como parte de uma situação de conjunto; nenhum elemento de ação tem, de fato, utilidade separada. Entre a situação e o movimento do animal há uma relação de sentido que a expressão *Umwelt* traduz. O *Umwelt* é o mundo implicado pelos movimentos do animal e que regula seus movimentos por sua estrutura própria.

Na concepção cartesiana, o corpo humano é entendido como dissociado de tudo, de todos os outros corpos, sendo o espaço o recipiente onde cada corpo está colocado. Tal concepção revela-se inadequada quando se considera a interdependência dos fenômenos da vida. A visão de mundo que permeia a ciência contemporânea demanda uma outra compreensão de corpo. A partir dos movimentos dos biólogos, em seus primeiros estudos em *Ecologia*, “o corpo é não somente coisa, mas relação com um *Umwelt* [...] O corpo humano, portanto, é corpo que se move e isso quer dizer corpo que percebe – aí está um dos sentidos do *esquema corporal* humano” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 337, grifos do autor). Esclarece Bicudo (2000, p. 33) que “corpo e existência se pressupõem, embaralham-se, formam uma trama. Essa trama, que se forma como uma rede de significações expressas, constitui a realidade mundana na qual somos, ou seja, existimos de modo participativo, criando-a”.

A concepção de natureza como sendo a *esfera das puras coisas*, considerada no início da obra husserliana *Ideen II*, é assumida ao

encontramos coisas puramente materiais, como mesas, das quais vemos apenas a materialidade, ou homens, dos quais vemos a camada de animalidade. Essa concepção de *puras coisas* tem um alcance geral; nós a adotamos espontaneamente quando o nosso Eu, em vez de viver no mundo, se decide a apreender (*erfassen*), a objetivar. Nessas condições o Eu se faz *indiferente* e o correlato dessa indiferença é a pura coisa (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 119, grifos do autor).

Colocando-se à parte, o *Eu cartesiano* não vive no mundo, mas desconsidera o mundo-vida e concebe a Natureza como mera coleção de objetos. No enfoque fenomenológico, considera Merleau-Ponty (2000, p. 121):

Para que haja uma coisa, é preciso que ela seja apresentada a um sujeito encarnado [...] Quando percebo um objeto, tenho consciência das possibilidades motoras que estão implicadas na sua percepção. A coisa me aparece como função dos movimentos do meu corpo. Mas se esses movimentos se desenrolam em torno do objeto, não devo imaginar que eles são pensados por mim como fatores objetivos [...] Eu organizo com o meu corpo uma compreensão do mundo, e a relação com o meu corpo não é a de um Eu puro, que teria sucessivamente dois objetos, o meu corpo e a coisa, mas habito o meu corpo e por ele habito as coisas.

Na herança cartesiana a palavra *corpo* remete ao entendimento de objeto com limites bem separados em relação aos outros corpos. Na atualidade, alinhada com as descobertas da ciência contemporânea, a postura fenomenológica apresenta-se como possibilidade para um entendimento mais abrangente de *corpo* como sendo aquele que se expõe, percebe, se sente ligado com os *outros* e engajado em uma situação. Numa visão de mundo alinhada com a ciência contemporânea, o corpo é entendido como “o veículo do ser no mundo, e ter um corpo é, para um ser vivo, juntar-se a um meio definido, confundir-se com certos projetos e empenhar-se continuamente neles” (MERLEAU-PONTY, 1999, p. 122).

Diversas denominações são empregadas pelos fenomenólogos: *corpo encarnado*, *corpo-vivo*, *corpo-próprio*, *corpo-vivido*.

O corpo-vivido é o ponto de convergência da ação educadora, do movimento da intencionalidade, do sentido que o mundo faz para si, o ponto-zero que, de sua perspectiva, se estende para o outro, para o mundo e para si próprio, ao mesmo tempo em que mundo e outro nele estão presentes, constituindo a intersubjetividade. É nessa dimensão da realidade que a ciência se edifica (BICUDO, 1998, p. 21).

Merleau-Ponty (2000, p. 285) apresenta o entendimento de Uexküll para quem, na produção de um *Umwelt*, “cada sujeito tece suas relações como os fios de uma teia de aranha com certas características das coisas e os entrelaça para fazer uma rede que mantém sua existência”. O animal determina seu território, privilegiando um lugar, como a aranha que tece sua teia, sendo que, no caso particular da aranha, o seu *Umwelt* provém de sua própria substância e a teia efetua a imbricação entre seu mundo e seu corpo.

Quando se assiste a um verdadeiro *Umwelt*, existe um plano vivo. É preciso dissociar a idéia de *Umwelt* da idéia de substância ou de força. Há planos naturais que são vivos. O sinal deles é que condições exteriores idênticas acarretam diferentes possibilidades de comportamento (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 286).

Como exemplo, o caranguejo pode utilizar a anêmona-do-mar, tanto para proteger-se, camuflando sua carapaça, como para alimentar-se ou para usá-la como carapaça, caso ela lhe venha a faltar. O animal fornece símbolos, definindo no seio da natureza uma espécie de pré-cultura, sendo que o *Umwelt* é orientado para a interpretação de símbolos.

“Mas não existe ruptura entre o animal planejado, o animal que se planeja e o animal sem plano” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 286).

O nosso *Umwelt* engloba o *Umwelt* dos animais, o que nos permite conhecê-los. Merleau-Ponty (2000, p. 287) apresenta o entendimento de Uexküll, para quem o *Umwelt* dos *Umwelt* é a natureza e “todos esses meios (*Umwelten*) são sustentados e conservados pela totalidade que transcende cada meio particular. Por trás de todos os mundos que ele produz, se esconde, eternamente presente, o sujeito: a Natureza”

Para Merleau-Ponty, a concepção de *Umwelt* abarca aquela do ser vivo que age com elementos físico-químicos, mas não está inteiramente sob a dependência dessas condições. O animal é como uma força maleável, não bastando que uma única condição física seja dada para que ele desapareça. O animal regula, faz desvios. “A noção de *Umwelt* já não nos permite considerar o organismo em sua relação com o mundo exterior, como um efeito desse mundo exterior, ou como uma causa” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 289).

O percorrer do caminho pelo qual se constitui, desde sua origem, a *Ecologia*, mostra que a concepção de Natureza, exposta por Descartes, é limitada e que não existe “outro meio de pensar a Natureza finalmente senão através da Natureza percebida [...] o corpo humano só pode ser compreendido como corpo percipiente: é a percepção e o percebido que são a chave [...]” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 347).

De acordo com Merleau-Ponty, a percepção oferece verdades como *presenças*, dizendo com isso tratar-se de uma verdade percebida com nitidez no momento em que o sentido se faz para o sujeito. Portanto, não se trata de uma verdade lógica, nem intelectual. O sentido, no plano da percepção, ainda não está intelectualmente articulado (BICUDO, 2000, p. 31, grifo da autora).

O ser humano não pode ser entendido, à moda de Descartes, como sendo um *Eu penso* mas como um *Eu posso*:

Entre os movimentos do meu corpo e as *propriedades* da coisa revelada por eles emerge uma relação do *eu posso* com as maravilhas que tem o poder de suscitar. Entretanto, é preciso que meu próprio corpo esteja engrenado no mundo visível: seu poder advém, justamente, de ter um lugar *de onde se vê* (MERLEAU-PONTY, 1989, p. 194, grifos do autor).

Esclarece Bicudo (2000, p. 43) que, nas relações orgânicas estabelecidas, Merleau-Ponty

traz à cena o corpo-próprio enquanto sistema de ações possíveis, enquanto um corpo virtual cujo lugar fenomenal é definido por sua tarefa e por sua situação. Meu corpo está ali, onde há algo a fazer. Ao preencher essa intencionalidade por meios de movimentos dirigidos de modo harmonioso ao espetáculo percebido [...] o máximo de nitidez é obtido na percepção e na ação. É essa nitidez que define o solo perceptivo, que significa um fundo, um ambiente geral para coexistência de corpo-próprio e mundo.

4.2 A AMEAÇA DA POSTURA CARTESIANA E SEU ANTÍDOTO: O CUIDADO

Enquanto o homem se entender separado do mundo, observador neutro cujos atos em nada interferem, ele continua um peregrino em terra estranha, e tal concepção faz com que se torne agressor do meio em que vive, porque não sente o *Umwelt* como seu *lar*. O comportamento competitivo e predatório tem suas raízes na concepção de natureza defendida pelos seguidores da teoria darwinista, alinhados com o pensamento mecanicista, que entendem a vida em sociedade como uma luta pela existência regida pela sobrevivência dos mais aptos. Nesse entendimento, a competição desenfreada é considerada a força propulsora da economia, a abordagem agressiva sendo a atitude desejada no mundo dos negócios.

A partir da segunda metade do século XX, no cotidiano, são constatadas interligações e interdependências entre os fenômenos e a palavra *Ecologia* aparece na mídia e no meio escolar. Gradativamente tem emergido uma compreensão de que o *Umwelt* se encontra em situação de risco. No nível do senso comum fala-se das questões ecológicas vagas de significação, reduzidas a ações como, por exemplo, reciclagem de lixo. Esforços crescentes em prol de um meio ambiente equilibrado têm impulsionado a elaboração de leis governamentais e implantado mecanismos de fiscalização, buscando impedir a degradação ambiental e favorecer a sua regeneração. Diante do evidente esgotamento dos recursos naturais do planeta, aumentam as preocupações com as instabilidades climáticas, uma vez constatadas as conexões existentes entre as atividades econômicas e o aquecimento global, favorecido pelo desmatamento predador e conseqüente erosão do solo, provocando inundações, secas e criminosa redução da biodiversidade.

Na contemporaneidade, concepções sistêmicas são utilizadas nas empresas industriais, uma vez que administradores passam a considerar não apenas o grande número de componentes individuais envolvidos, mas também os efeitos originários das inúmeras interações. À medida que se tornam mais complexas, algumas empresas assumem o entendimento da organização dos negócios como um sistema social vivo, sendo incorporadas muitas idéias vindas da *Ecologia*.

Uma mudança no entendimento que o homem tem de si mesmo e de sua relação com o mundo possibilita a busca de atividades empresariais responsáveis e a utilização de tecnologias que promovam um desenvolvimento econômico que respeite o meio ambiente. Numa postura diante do mundo alinhada com o movimento da ciência contemporânea “o

campo da consciência se torna presente de maneira mais viva, permitindo que se cultive uma capacidade maior de reflexão sistemática. Na filosofia, isso se chama de passagem da atitude natural para a atitude fenomenológica” (CAPRA, 2002, p. 62).

Na *atitude natural* a “postura imperante é a da ingenuidade, no sentido de aceitar o ponto de partida e as afirmações interconectadas de modo lógico, concernentes ao corpo de conhecimento de um campo de saber, sem crítica” (BICUDO, 1990, p. 5). É a atitude que percebemos ser predominante na contemporaneidade, assumida desde a época moderna: a de “exploração que impõe à natureza a pretensão de fornecer energia, capaz de, como tal, ser beneficiada e armazenada” (HEIDEGGER, 2001, p. 19).

O filósofo exemplifica tal exploração tomando, como exemplo, uma usina elétrica instalada no rio Reno que *dis-põe* o rio a fornecer pressão hidráulica, que *dis-põe* as turbinas a girar. Por outro lado, o moinho de vento extrai energia das correntes de ar, mas não as armazena. Na atualidade explora-se a terra, mas

era outro o lavradio que o lavrador dispunha outrora, quando *dis-por* ainda significava lavar, isto é, cultivar e proteger. A lavra do lavrador não desafiava o lavradio [...] Hoje, em dia, uma outra posição também absorveu a lavra do campo, a saber, a posição que *dis-põe* da natureza. E dela *dis-põe*, no sentido de uma exploração (HEIDEGGER, 2001, p. 19, grifo do autor).

Realizando a técnica, o homem participa da exploração das energias da natureza,

tomando-a por objeto de pesquisa até que o objeto desapareça no não-objeto da *dis-ponibilidade* [...] a técnica moderna não se reduz a um mero fazer do homem [...] Está em causa o poder que o leva a *dis-por* [...] Chamamos aqui de *com-posição* (*Ge-stell*) o apelo de exploração que reúne o homem a *dis-por* do que se *des-encobre* como *dis-ponibilidade* (HEIDEGGER, 2001, p. 22).

Para Heidegger, o conceito *com-posição* não se refere aos equipamentos, eles pertencem à *com-posição*. A *com-posição* é um modo de desencobrimento, o desencobrimento da exploração. O comportamento *dis-positivo* do homem mostra-se, inicialmente, no aparecimento das ciências modernas da natureza. “A teoria da natureza, proposta pela física moderna, não preparou o caminho para a técnica, mas para a essência da técnica moderna. Pois a força de exploração, que reúne e concentra o desencobrimento da disposição, já está regendo a própria física” (HEIDEGGER, 2001, p. 25).

Para a Física, a natureza é um sistema de forças que podem ser operadas, entendidas como disponíveis à experimentação. “A física moderna nunca poderá renunciar à necessidade de a natureza fornecer dados, que se possa calcular, e de continuar sendo um sistema *dis-ponível* de informações” (HEIDEGGER, 2001, p. 26).

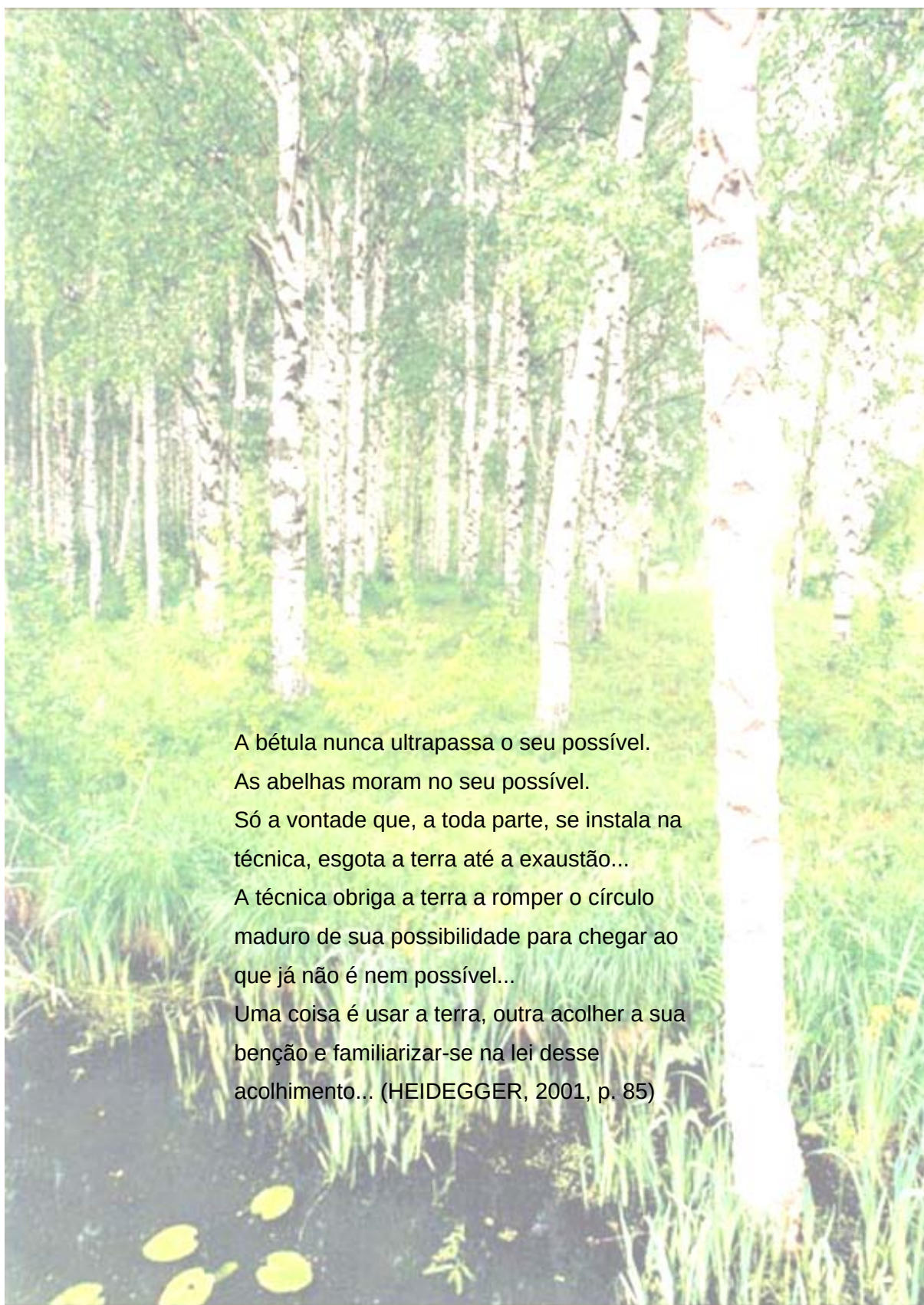
Considera o filósofo que, quando “[...] o homem se reduz apenas a *dis-por* da *dis-ponibilidade* – então é que chegou à última beira do precipício, lá onde ele mesmo só se

toma por disponibilidade. E é justamente este homem assim ameaçado que se alardeia na figura de senhor da terra” (HEIDEGGER, 2001, p. 29).

Pode-se descrever a ameaça decorrente da postura mecanicista por meio de expressões da Matemática: com a emergência do pensamento sistêmico, dissemina-se o entendimento de que, na natureza, proliferam os fenômenos *não-lineares*, mas, o comportamento predatório está ligado ao pensamento *linear*. As desastrosas mudanças ambientais induzidas pela ação do homem com suas práticas ecologicamente destrutivas, prejudicam os “[...] serviços sistêmicos que a natureza nos oferece de graça – o processamento de resíduos, a regulação do clima, a regeneração da atmosfera, etc. Esses processos essenciais são propriedades emergentes de sistemas vivos não-lineares” [...] (CAPRA, 2002, p. 218).

O planeta onde vivemos tem limitações de ar e de água, mas o homem dispõe dele como se fosse fonte inesgotável de recursos naturais, que alimenta sua sede de produção desenfreada atrelada ao consumismo exagerado. A imersão na atitude de exploração máxima da natureza, ao mínimo custo financeiro, induz a ameaça que pesa sobre o homem, a qual “não vem, em primeiro lugar das máquinas e equipamentos técnicos, cuja ação pode ser eventualmente mortífera. A ameaça, propriamente dita, já atingiu a essência do homem” (HEIDEGGER, 2001, p. 30).

Heidegger, considerando a ameaça que paira sobre o homem, extraindo alucinadamente os recursos do planeta, até a exaustão, busca exemplos do modo de ser harmonioso que predomina na natureza. Fala das abelhas, que nos fornecem mel, realizando suas tarefas de acordo com as suas possibilidades. Lembra a bétula, muito comum na Europa, apreciada pela sua madeira branca e pela sua seiva, fonte de açúcar, crescendo dentro do possível.



A bétula nunca ultrapassa o seu possível.
As abelhas moram no seu possível.
Só a vontade que, a toda parte, se instala na
técnica, esgota a terra até a exaustão...
A técnica obriga a terra a romper o círculo
maduro de sua possibilidade para chegar ao
que já não é nem possível...
Uma coisa é usar a terra, outra acolher a sua
benção e familiarizar-se na lei desse
acolhimento... (HEIDEGGER, 2001, p. 85)

Para Heidegger, onde reina a *com-posição*, reina, em grau extremo, o *perigo* e, ao citar o poeta Hölderlin, constata que *onde mora o perigo é lá que também cresce o que salva*. Indaga: *O que significa “salvar”?* Comenta que, comumente, entende-se que *salvar* se relaciona apenas a retirar, a tempo, da destruição, algo que está ameaçado em continuar a ser o que vinha sendo. Para o filósofo, salvar significa mais: é chegar à essência, a fim de fazê-la aparecer em seu próprio brilho. Se a essência da técnica constitui perigo extremo, ela guarda o que salva: “a essência da técnica há de guardar em si a medrança do que salva” (HEIDEGGER, 2001, p. 31).

A emergência de uma profunda transformação no entendimento da essência humana se coloca como primordial, tal como a escolta de um prenúncio, conforme explicita Heidegger (2001, p. 86):

Nenhuma transformação chega sem a escolta de um prenúncio. Como, no entanto, uma escolta pode aproximar-se sem que clareie o acontecimento do próprio, sem que a essência humana, num chamado e numa convocação, conheça o brilho dos olhos, isto é, olhe com profundidade e, nesse olhar, traga os mortais para o caminho de uma construção pensante, poética?

Buscando clarificar a essência humana, Heidegger vai à mitologia grega. O homem moderno freqüentemente vê no mito uma coletânea exótica de estórias, pura fantasia, porém, foi por meio da mitologia que os gregos tentaram expor o mistério da existência. O mito relata uma história verdadeira no sentido de que se refere profundamente ao homem. A mitologia grega identifica em cada aspecto do cotidiano um enlaçamento com os grandes ciclos da vida. O mito é a expressão da interioridade humana: nisso reside a sua verdade.

O mito expressa o mundo e a realidade humana, mas cuja essência é efetivamente uma representação coletiva, que chegou até nós através de várias gerações. E, na medida em que pretende explicar o mundo e o homem, isto é, a complexidade do real, o mito não pode ser lógico: ao revés, é ilógico e irracional. Abre-se como uma janela a todos os ventos; presta-se a todas as interpretações. Decifrar o mito é, pois, decifrar-se (BRANDÃO, 1991, p. 36).

Os gregos conferiram aos seus deuses a figura humana, sem desligá-los da ordem da natureza e das coisas da vida. No mundo dos deuses helênicos há vida exuberante; nele, tanto o bem como o mal, tudo está igualmente divinizado, numa totalidade irreduzível. As narrativas mitológicas, constituídas geração após geração, apresentam imagens acessíveis a todas as idades, a todas as culturas, em todos os tempos.

Da mitologia grega, Heidegger (1998, p. 263) traz a fábula de Cura, apresentada em *Ser e Tempo*:

Certa vez, atravessando um rio, Cura viu um pedaço de terra argilosa: cogitando, tomou um pedaço e começou a lhe dar forma. Enquanto refletia sobre o que criara, interveio Júpiter. A Cura pediu-lhe que desse

espírito à forma de argila, o que ele fez de bom grado. Como a Cura quis então dar seu nome ao que tinha dado forma, Júpiter a proibiu dizendo que devia dar-se-lhe o seu. Enquanto Cura e Júpiter disputavam sobre o nome, surgiu também a Terra (Tellus) querendo dar o seu nome, uma vez que havia fornecido um pedaço de seu corpo. Os disputantes tomaram Saturno como árbitro. Saturno pronunciou a seguinte decisão, aparentemente eqüitativa: Tu, Júpiter, por teres dado o espírito, deves receber na morte e tu, Terra, por teres dado o corpo, deves receber o corpo. Como, porém, foi a Cura quem primeiro o formou, ele deve permanecer à Cura, enquanto viver. Como, no entanto, sobre o nome há disputa, ele deve se chamar homo, pois foi feito de hummus (Terra).

Buscando o sentido fenomenológico de *cura*, Bicudo considera a fábula da cura e apresenta as possíveis interpretações para compreender-se o homem como *cura*, ou como *cuidado*, ou *Dasein* heideggeriano, ou, o *ser-no-mundo-com-os-outros*, ou o *ser da presença*. Para Bicudo (1998, p. 22), no mito da Cura está presente “a realidade do homem (homo), desnudada como corpo (humus) e espírito (Júpiter), porém não retendo a dicotomia corpo-espírito e, sim, desvelando o que é essencial à vida mundana desse ente feito de terra e de espírito, que é a *cura*”.

A palavra cura pode significar esforço angustiado, cuidado e dedicação.

Dizer que *cura* é *esforço angustiado* leva à interpretação de o homem ser um ente em que está, nele mesmo, em jogo o seu próprio ser. Traz consigo a incumbência de manter-se vivo, de perceber-se vivo, percebendo-se abandonado a si mesmo, por já *ser-no-mundo*. Esse *ser-no-mundo* se concretiza como ocupação, materializando-se no fazer e no estar com os outros nos encontros dados socialmente e como preocupação, ou seja, como uma ocupação prévia com o que *pode-ser*, no sentido das possibilidades possíveis antevistas. Assim, *esforço angustiado* por manter-se como tal, vivo, ocupando-se e preocupando-se *no-mundo*, imerso nas facticidades existenciais encontrados no cotidiano: violência, mesquinhez, verdades impostas, uso e manipulação do humano, palavras vazias de sentido e de significado, mas também, encontro, diálogo, pensar autêntico, solidariedade, solicitude. *Cura* como *cuidado*, sendo cuidado entendido como estar-atento, lúcido ao próprio *poder-ser* do homem, cuidando para que ele *seja*, mantendo-se vivo, podendo ser para as suas possibilidades mais próprias. *Cura*, como *dedicação*, significa doação, dar-se ao projeto da manutenção da vida (BICUDO, 1998, p. 22, grifos da autora).

Buscando a filologia da palavra *cuidado*, Boff esclarece que alguns estudiosos derivam *cuidado* do latim *cura*, palavra que se encontra na tradução de *Ser e Tempo* de Heidegger. Em sua versão latina mais antiga, a palavra *cura* era utilizada nas situações relacionadas com amor, amizade, preocupação com pessoa amada, inquietação e desvelo. Outros pesquisadores derivam *cuidado* de *cogitare-cogitatus* onde o sentido é o mesmo de cura: cogitar, pensar, mostrar interesse, revelar atitudes de preocupação e desvelo. “O cuidado somente surge quando a existência de alguém tem importância para mim. Passo então a dedicar-me a ele; disponho-me a participar de seu destino, de suas buscas, de seus sofrimentos e de seus sucessos, enfim de sua vida” (BOFF, 1999, p. 91).

No entendimento de Boff, Heidegger é, por excelência, o filósofo do *cuidado* e esclarece que, na postura fenomenológica,

não se trata de pensar e falar *sobre* o cuidado como objeto independente de nós. Mas de pensar e falar *a partir* do cuidado como é vivido e se estrutura em nós mesmos. Não *temos* cuidado. *Somos cuidado*. Isto significa que o cuidado possui uma dimensão ontológica que entra na constituição do ser humano. É um modo-de-ser singular do homem e da mulher. Sem cuidado deixamos de ser humanos (BOFF, 1999, p. 89, grifos do autor).

4.3 EXPRESSÕES DA TOTALIDADE NA LINGUAGEM ARTÍSTICA

A nova visão de mundo, que emerge durante o século XX, traz em seu bojo não apenas um outro entendimento do que é a essência humana. Um olhar sobre a natureza das relações estabelecidas entre tudo, nos revela um novo enfoque. Se, na visão de mundo segundo a ciência clássica, a reunião articulada de partes pequenas constituía o todo, tal concepção se mostra limitada na contemporaneidade.

O entendimento dos fenômenos da natureza como sendo uma *totalidade irreduzível* é oposto ao pensamento analítico, o qual isola alguma coisa a fim de conhecê-la. Dificuldades acontecem pelo fato de que a compreensão dos sistemas como totalidades irreduzíveis não pode ser submetida à análise. Após séculos de aceitação da postura mecanicista, no mundo da ciência ocidental, como sendo a única possibilidade de entendimento, os pesquisadores deparam com uma visão de natureza em que *a totalidade não é o mero somatório de partes*. No modelo mecanicista, associado à metáfora da máquina, impera a crença de que, em qualquer sistema complexo, a dinâmica do todo, à moda de Descartes, pode ser entendida a partir da compreensão das propriedades das suas partes componentes. No pensamento analítico, exposto por esse filósofo, o universo pode ser entendido pela análise em termos de suas menores partes, de modo que a compreensão completa advém do somatório. No pensamento sistêmico, expresso pela metáfora da rede, uma parte é meramente um padrão numa rede de interligações e as propriedades do sistema só podem ser entendidas a partir da dinâmica do todo.

De acordo com a visão sistêmica, as propriedades essenciais de um organismo, ou sistema vivo, são propriedades do todo, que nenhuma das partes possui. Elas surgem das interações e das relações entre as partes. Essas propriedades são destruídas quando o sistema é dissecado, física ou teoricamente, em elementos isolados. Embora possamos discernir partes individuais em qualquer sistema, essas partes nunca são isoladas, e a natureza do todo é sempre diferente da mera soma de suas partes (CAPRA, 1998, p. 40).

Merleau-Ponty (2000, p. 249) considera que:

a pluralidade dos fenômenos se unem e constituem um conjunto que tem um sentido. Hegel já comparava a vida a um turbilhão: o turbilhão nada mais é do que água, mas a sua forma não se explica pela água. O organismo não seria uma totalidade transcendente, como tampouco seria uma totalidade por somação. Encontramos modelos dessa idéia de totalidade no mundo da percepção [...] a ciência tem dificuldade em admitir um princípio organizador na totalidade [...] a percepção não nos fornece coisas, mas aquilo que vemos. Nesse meio fenomenal, nada impede que o todo seja outra coisa que a soma de suas partes, sem ser todavia uma entidade transcendente.

Para melhor esclarecer a questão do todo ser outra coisa do que a mera soma de suas partes, (Merleau-Ponty 2000, p. 251) apresenta, como exemplo, o devir de um quadro onde

o pintor Matisse joga suas pinceladas em locais tão dispersos quanto possível e, ao fim de um certo tempo, a lógica surge [...] Fios se ligam, provenientes de toda parte, e constituindo formas independentes, e ao mesmo tempo ocorre que esses fios realizam algo que tem unidade. Com o primeiro signo aparece um leque de possíveis que não estavam contidos nele e que eram imprevisíveis a partir desse primeiro signo.

Na postura mecanicista, Arte e Matemática pertencem a dois mundos completamente distintos, separados pela objetividade do pensamento científico. Uma breve incursão pela *História da Arte* pode contribuir com o entendimento do pensamento sistêmico no que se refere à concepção da totalidade como irreduzível, da relação entre partes e todo, da imbricação homem-mundo.

Heisenberg, um dos criadores da Mecânica quântica, explicita que não é exclusividade da Matemática ser um conjunto formal utilizado para a descrição dos fenômenos abordados pela pesquisa científica. Concepções de mundo também podem ser descritas pela linguagem artística.

Um estilo de arte pode também ser definido por um conjunto formal de regras que são aplicadas ao objeto dessa particular arte. Tais regras não poderão, talvez, ser representadas, *stricto sensu*, por um conjunto de conceitos e de equações matemáticas, embora seus elementos fundamentais estejam bem de perto relacionados com entidades básicas da matemática [...] Os dois processos, portanto, o da ciência e aquele da arte, não são diferentes um do outro. Tanto a ciência quanto a arte construíram, no correr dos séculos, uma linguagem que veio permitir que possamos falar sobre as partes mais recônditas da Realidade; e os conjuntos consistentes de conceitos da ciência, assim como o estilos de arte, são como palavras ou grupos de palavras diferentes nessa mesma linguagem (HEISENBERG, 1999, p. 153-155).

Por considerar a afirmação de Heisenberg importante ao dizer que a expressão artística também é uma linguagem formal, finalizando este capítulo, são apresentadas as mensagens sobre totalidade veiculadas por artistas diversos, segundo diferentes estilos.

Nas diversas épocas, em diferentes culturas e de acordo com a personalidade do artista, nos contextos onde ela pode se manifestar, variam os enfoques seletivos adotados. Os diferentes estilos refletem posturas diversas diante do mundo. Na busca por uma linguagem pictórica que contribua para um entendimento da visão de mundo que permeia a ciência contemporânea, apresentam-se múltiplos estilos, destacando-se

três atitudes básicas. Elas representam *modos de vivenciar*, ou seja, maneiras diversas de se encarar e elaborar a experiência do viver. Como se fossem correntes submarinas moldando o curso das ondas, as grandes correntes estilísticas – o Naturalismo, o Idealismo e o Expressionismo – caracterizam essencialmente os diversos estilos históricos, assim como os estilos individuais dos artistas. Tais correntes não se excluem mutuamente. Por vezes se interpenetram no estilo da época ou na obra de um artista (OSTROWER, 1983, p. 312, grifos da autora).

Na arte pré-histórica, os rituais mágicos relacionados à caça levam os artistas a representar os animais com a maior semelhança possível: um exemplo do estilo naturalista. Os artistas impressionistas podem ser tomados como exemplo do Naturalismo com um estilo mais recente, quando “descrevem, em vez de um objeto material, um fenômeno da natureza: a luminosidade atmosférica. Esse fenômeno é observado com um rigor e com uma objetividade quase científicos” (OSTROWER, 1983, p. 313). O Naturalismo se mostra no enfoque descritivo, quando o artista procura se manter objetivo diante dos fenômenos, pretendendo capturar momentos fugidios, fixando no objeto aquelas qualidades que o comoveram, focando o objeto no espaço e no tempo como um evento preciso, sem introduzir ênfases subjetivas de caráter emocional. Trata-se da postura que permeia a constituição da ciência moderna: o observador numa atitude de separação do objeto observado.

O Idealismo é a atitude onde “os aspectos individuais de um fenômeno são subtraídos em favor de uma generalização [...] numa *aproximação* das formas da natureza a formas *geométricas*. A geometria é sentida como protótipo espacial, como referência ordenadora do espaço” (OSTROWER, 1983, p. 314, grifos da autora). Exemplificando: o desenho de uma árvore, elaborado de acordo com a atitude naturalista, reproduz as irregularidades acidentais que ocorrem na natureza, enquanto que, na atitude idealista, as pequenas irregularidades são abstraídas. O enfoque do Idealismo é reconhecido em toda a produção artística da Renascença, norteadas pelas idéias geométricas gregas, onde os rostos são mais ovais, os corpos mais cilíndricos, os narizes mais retos. A coloração contribui para preservar a disposição geométrica dos corpos no espaço. As figuras são solenes, procurando o artista manter-se objetivo ao representá-las.

A corrente estilística denominada Expressionismo fundamenta-se na intensificação das emoções. Exemplificando: na atitude expressionista, o desenho de uma árvore é elaborado selecionando-se detalhes que se mostram relevantes do ponto de vista emotivo.

Uma irregularidade no tronco é representada por uma torção violenta, os galhos furam o céu e as cores são fortes e contrastantes. Nas obras pictóricas expressionistas

há um afastamento de formas geometrizarantes, e mesmo de arranjos regulares ou simétricos. Também, em vez de semelhanças formais, prevalecem os *contrastes*. Conseqüentemente, no equilíbrio final da obra, encontramos fortes *tensões* espaciais [...] O conteúdo expressivo visa o instável da vida, o excepcional, destacando a transformação em vez da permanência (OSTROWER, 1983, p. 316, grifos da autora).

A postura expressionista converge com aquela que norteia a criação da ciência contemporânea, quando emerge o entendimento do universo como sendo

rico de diversidades qualitativas e surpresas fundamentais. Descobrimos que o diálogo racional com a natureza não constitui mais o sobrevôo desencantado dum mundo sublunar [...] Não estamos mais no tempo em que os fenômenos imutáveis prendiam a atenção. Não são mais as permanências que nos interessam antes de tudo, mas as evoluções, as crises e as instabilidades (PRIGOGINE, 1991, p. 5).

D'Ambrosio foca o movimento expressionista, que rompe com as representações tradicionais de homem, da natureza e do cosmos, deflagrado com as novas linhas da pesquisa científica. Considera as aproximações entre as ciências e o Expressionismo, constatando como princípio fundamental desse movimento “uma visão subjetiva do mundo, na qual a representação dos sentimentos humanos prepondera sobre as impressões do real” (D'AMBROSIO, 2002, p. 103).

No Expressionismo moderno, “todos os aspectos que caracterizam a corrente básica expressionista são imediatamente reconhecíveis na obra de Edvard Munch e Van Gogh. O clima emotivo é o de angústia” (OSTROWER, 1983, p. 318). D'Ambrosio constata que, na obra de Edvard Munch, *O Grito* (1893), é denunciada a dor do homem angustiado, sufocado pela frieza predominante no ambiente científico, sustentado pela rigidez do sistema lógico dedutivo dos conhecimentos matemáticos da época. Nessa obra, a figura humana se contorce, expressando fortes emoções. “As linhas sinuosas do céu e da água, e a linha

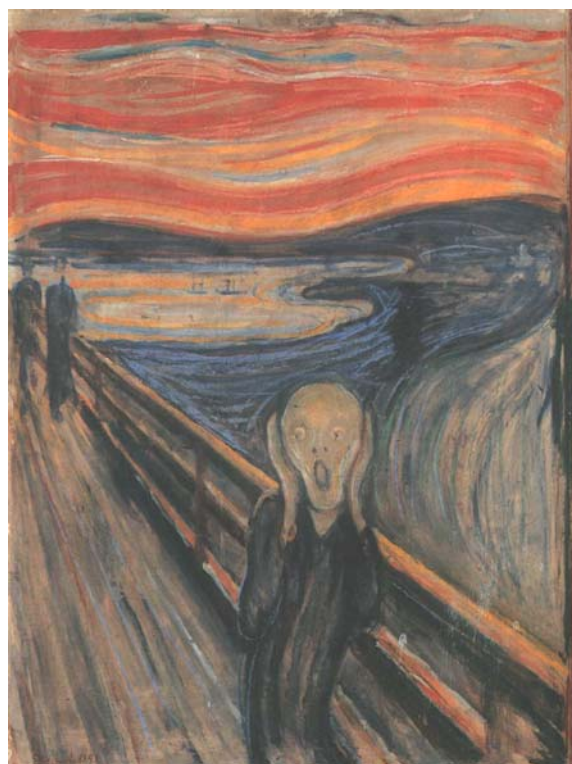


Figura 4 : Munch. O Grito

Fonte: PROENÇA, 1998, p.152

diagonal da ponte conduzem o olhar do observador para a boca da figura que se abre num grito perturbador” (PROENÇA, 1998, p. 152).

Ostrower esclarece que a atitude expressionista não é necessariamente angustiante ou trágica, citando como exemplo Rubens, que não é trágico sequer quando representa uma crucificação.

Sobretudo na obra de Matisse torna-se claro que a condição espiritual que se manifesta nas imagens é, talvez mais ainda do que euforia, um enaltecimento da vitalidade [...] as linhas e o colorido aparentemente *livres* exaltam uma afirmação do viver sensual e racional ao mesmo tempo (OSTROWER, 1983, p. 319, grifo da autora).

A arte do início do século XX reflete a situação nova que a ciência revela, inquietante, sendo fortemente influenciada pelas concepções de Matisse e de Picasso, cujas obras expressam a nova compreensão do mundo que está se formando. Matisse luta para encontrar liberdade artística, fugindo das concepções que se estabelecem na arte desde a Renascença, entendimento esse representado no sistema da perspectiva. “Matisse entendia como os elementos trabalhavam em conjunto, como as cores podiam ganhar vida da maneira mais surpreendente quando vistas em contexto. Em suas obras, tudo coopera magnificamente” (BECKETT, 1997, p. 339).

Desde a Renascença, norteadas pelas leis do sistema da perspectiva, a arte pictórica mostrara o mundo observado de fora pelo observador, sendo o homem entendido como o centro do Universo. No entanto, uma visão de mundo, onde o homem é entendido como completamente envolvido com a natureza, se mostra na *Mona Lisa*.

Na *Mona Lisa* a ilusão da perspectiva é quebrada na paisagem ao fundo, sendo o horizonte da direita mais alto do que o da esquerda. Entre as graduações de claro e escuro, os cabelos de *Mona Lisa* se confundem com as rochas e o seu manto se mistura com o aqueduto. Obra jamais entregue, apesar de ter sido encomendada, *Mona Lisa* “devia conter para Leonardo significados profundos e íntimos para que ele não quisesse se separar do quadro. Personificava talvez o próprio espírito da natureza, como ele



Figura 5: Da Vinci. *Mona Lisa* (detalhe)

Fonte: COPPLESTONE, 1998, p. 64

o concebia em sua visão de vida, na união mística e na ulterior harmonia em que para ele se revelavam as forças cósmicas.” (OSTROWER, 1983, p. 291).

Picasso e Braque iniciam o desenvolvimento do Cubismo, procurando uma representação que, simultaneamente, de diferentes ângulos, capturasse “o objeto na rede de seu contexto real; como Cézanne indicara, não havia linhas delimitadoras para a verdade, e sim, uma forma que surgia de todos os diferentes aspectos intuídos em conjunto” (BECKETT, 1997, p. 348).

O Cubismo surgiu não como fenômeno isolado, mas entre as indagações do século XX e “sem sermos físicos ou matemáticos (Picasso ou Braque tampouco tiveram tais conhecimentos) sentimos que o espaço tornou-se essencialmente dinâmico” (OSTROWER, 1983, p. 79).

Considerado o pai do Cubismo, Cézanne busca expressar a visão de um novo *espaço de profundidade*, livre das ilusões do sistema de perspectiva que imperava na arte desde a Renascença. Esclarece Merleau-Ponty (1989, p. 65) que, da profundidade assim compreendida, não se pode dizer que é a terceira dimensão, dada por uma distância mensurável, mas uma dimensão primeira que contém as outras. “Assim compreendida, a profundidade é mais propriamente a experiência da reversibilidade das dimensões, de uma localidade global onde tudo está a um só tempo”.

Cézanne investiga o que está entre as coisas, a ligação entre elas, seu envolvimento e mútua dependência. “Cézanne era tomado por uma percepção do mistério do mundo que nenhum outro artista expressou com a mesma intensidade. Compreendia que nada existia isoladamente [...]” (BECKETT, 1997, p. 311).

Cézanne pinta o bosque que rodeia o Château Noir, onde ainda se encontram grutas que, na pré-história teriam sido locais de iniciação a ritos religiosos, dando formas arredondadas “às rochas áridas; reúne as várias camadas, conferindo-lhes grandes ritmos sensuais. Não é necessária muita imaginação para descobrir, em alguns destes quadros, formas femininas e um antropomorfismo da natureza dirigido por Cézanne” (DÜCHTING, 1999, p. 196).

Desse modo, também a expressão artística, em diversos períodos, assume a concepção de natureza alinhada com a produção da ciência contemporânea, entendendo-a como uma totalidade, pois “não há corte decisivo entre a pedra e o animal, entre o animal e o homem [...] Nesse sentido, tudo é Natureza, tudo está unido à Natureza, ligado a ela, colocado nela” (MERLEAU-PONTY, 2000, p. 120). Essas investigações convergem com os resultados de pesquisas contemporâneas que revelam uma complexa rede de laços de realimentação, os quais “ligam conjuntamente sistemas vivos e não-vivos. Não podemos mais pensar nas rochas, nos animais e nas plantas como estando separados uns dos outros” (CAPRA, 1998, p. 93).

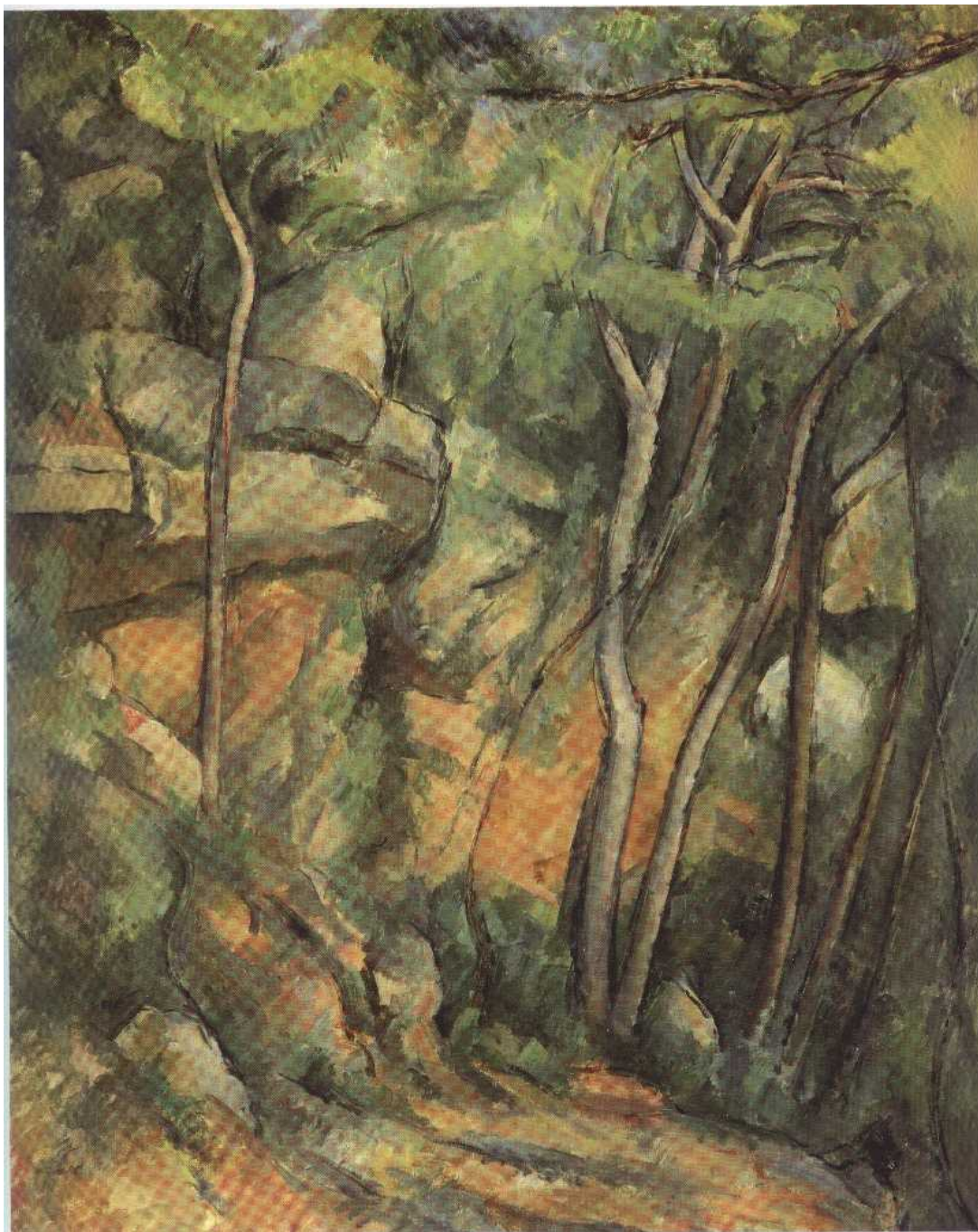


Figura 6: Cézanne. *No Parque de Château Noir*
Fonte: DÜCHTING, 1999, p. 192

5 A BUSCA PELA DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA CONCEPÇÃO SISTÊMICA DE MUNDO

Nas últimas décadas do século XX são construídas ferramentas matemáticas para lidar com padrões detectados na complexidade sistêmica. São embasadas em teorias que envolvem uma Matemática avançada. Dada a impossibilidade de trabalhá-la de modo rigoroso em sua abrangência, neste trabalho, algumas escolhas fizeram-se necessárias.

A pergunta norteadora desta pesquisa conduziu a escolha efetuada em relação aos conceitos matemáticos que correspondem aos temas abordados, no Brasil, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, passíveis de serem estudadas no Ensino Básico.

5.1 ENTRANDO NO TERRENO DA CONSTRUÇÃO DAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Na segunda década do século XX, o russo Bogdanov publica sua descrição pioneira dos modos de organização, não de uma área específica, mas abrangendo os assuntos de todas as áreas da ciência. Denomina sua teoria sistêmica de *tectologia*, a primeira investigação, na história da ciência, que procura

uma formulação sistemática dos princípios de organização que operam em sistemas vivos e não-vivos [...] e também inclui várias idéias importantes que foram formuladas quatro décadas mais tarde, numa linguagem diferente, como princípios fundamentais da cibernética, por Norbert Wiener e Ross Ashby (CAPRA, 1998, p. 51).

No ocidente, o biólogo Bertalanffy, cria uma *teoria geral dos sistemas*, a partir do entendimento de que os fenômenos biológicos exigem uma nova maneira de pensar. A *segunda lei da Termodinâmica* se refere aos sistemas físicos *fechados* ou *isolados* e Bertalanffy apresenta os organismos vivos como *sistemas abertos* que não podem ser descritos pela *Mecânica Clássica* e pela *Termodinâmica*. Ele utiliza o termo *aberto* porque organismos vivos se alimentam continuamente de um fluxo contínuo de matéria e energia, em constante interação com o meio onde estão imersos.

Em sistemas abertos, especulou Bertalanffy, a entropia (ou desordem) pode decrescer, e a segunda lei da termodinâmica pode não se aplicar. Ele postulou que a ciência clássica teria de ser complementada por uma nova termodinâmica de sistemas abertos. No entanto, na década de 40, as técnicas matemáticas requeridas para essa expansão da termodinâmica não estavam disponíveis para Bertalanffy. A formulação da nova termodinâmica teve de esperar até a década de 70. Foi a grande realização de Ilya Prigogine, que usou uma nova matemática para reavaliar

a segunda lei repensando radicalmente as visões científicas tradicionais de ordem e desordem, o que o capacitou a resolver sem ambigüidade as duas visões contraditórias da evolução que se tinha no século XIX (CAPRA, 1998, p. 54).

Durante a II Guerra Mundial tem início o movimento da *Cibernética*, que investiga os mecanismos neurais subjacentes aos fenômenos mentais, procurando expressá-los em uma linguagem matemática precisa. São procuradas analogias entre o computador e o cérebro, sendo o funcionamento do cérebro pesquisado por meio da lógica matemática. Neurocientistas, matemáticos, cientistas sociais e engenheiros pesquisam "padrões de comunicação, especialmente em laços fechados e em redes. Suas investigações os levaram às concepções de realimentação e de auto-regulação e, mais tarde, à de auto-organização" (CAPRA, 1998, p. 56).

Analisando a visão de mundo que norteia as pesquisas em *Cibernética*, Capra (1998, p. 59) considera:

Todas as principais realizações da cibernética originaram-se de comparações entre organismos e máquinas – em outras palavras, de modelos mecanicistas de sistemas vivos. No entanto, as máquinas cibernéticas são muito diferentes dos mecanismos de relojoaria de Descartes. A diferença fundamental está incorporada na concepção de Norbert Wiener de realimentação.

Nas pesquisas em *Cibernética*, neurônios idealizados são representados como elementos que comutam, ligando e desligando, acoplados entre si. Desse modo, o sistema nervoso é modelado como redes complexas desses elementos comutadores binários. Na década de 1950, cientistas constroem modelos concretos dessas redes, com pequeninas lâmpadas piscando nos nodos.

Para seu grande espanto, descobriram que, depois de um breve tempo de bruxeleio aleatório, alguns padrões ordenados passavam a emergir na maioria das redes. Eles viram ondas de cintilações percorrendo a rede, ou observavam ciclos repetidos. Mesmo que o estado inicial da rede fosse escolhido ao acaso, depois de um certo tempo esses padrões ordenados emergiam espontaneamente (CAPRA, 1998, p. 78).

A emergência espontânea de ordem em sistemas complexos, aparentemente aleatórios, é constatada em várias áreas da ciência, sendo que o conceito de auto-organização passa a ser amplamente utilizado entre os pensadores sistêmicos.

A partir do ponto de vista da história do pensamento sistêmico, um dos aspectos mais importantes dos extensos estudos dos ciberneticistas a respeito dos laços de realimentação é o reconhecimento de que eles retratam padrões de organização [...] Laços de realimentação são padrões abstratos de relações embutidos em estruturas físicas ou nas atividades de organismos vivos (CAPRA, 1998, p. 65).

As idéias iniciais da *Cibernética* são aprimoradas em pesquisas posteriores, durante as décadas de 1970 e 1980, que exploram o fenômeno da auto-organização. Tais modelos posteriores lidam com sistemas abertos que operam afastados do equilíbrio, onde o fluxo constante de energia e de matéria através do sistema possibilita a auto-organização, apresentando inter-conexidade não-linear dos componentes do sistema. Resumidamente, a auto-organização pode ser descrita como sendo

a emergência espontânea de novas estruturas e de novas formas de comportamento em sistemas abertos, afastados do equilíbrio, caracterizados por laços de realimentação internos e descritos matematicamente por meio de equações não-lineares (CAPRA, 1998, p.80).

Durante as últimas décadas do século XX se dissemina o entendimento de que, na natureza, proliferam os fenômenos não-lineares, os quais

dominam uma parcela muito maior do mundo inanimado do que tínhamos presumido, e constituem um aspecto essencial dos padrões de rede dos sistemas vivos. A teoria dos sistemas dinâmicos é a primeira matemática que permite aos cientistas lidar com a plena complexidade desses fenômenos não-lineares (CAPRA, 1998, p. 107).

Redes se estendem em todas as direções, ou seja, uma de suas características é a *não-linearidade*: as relações num padrão de redes são não-lineares. Padrões “não podem ser medidos nem pesados; eles devem ser mapeados. Para entender um padrão, temos de mapear uma configuração de relações. Em outras palavras [...] o padrão envolve qualidades” (CAPRA, 1998, p. 77).

O estudo qualitativo dos padrões acontece com os pitagóricos, mas não é priorizado durante a construção da ciência moderna, uma vez que a “maioria dos cientistas e engenheiros veio a acreditar que praticamente todos os fenômenos naturais poderiam ser descritos por equações lineares” (CAPRA, 1998, p. 106). O estudo de padrões, não sendo significativo na visão de mundo mecanicista, não é valorizado nos currículos escolares, porém, torna-se importante a partir do advento do pensamento sistêmico. Na atualidade, tornou-se essencial para a compreensão dos sistemas vivos.

“Matematicamente, um laço de realimentação corresponde a um tipo especial de processo não-linear conhecido como *iteração* (palavra que em latim significa *repetição*) na qual uma função opera continuamente sobre si mesma” (CAPRA, 1998, p. 107, grifos do autor). Iterar, em geral, significa repetir. Processos iterativos acontecem em diversas situações. Por exemplo, o processo de divisão celular é repetitivo; operações bancárias envolvendo juros são iterativas; os gregos usaram iteração para obter melhores aproximações para o valor de π , iterações geométricas produzem fractais. Iterar o botão de uma calculadora significa entrar com um número qualquer diferente de zero e apertar o botão referente a uma função matemática diversas vezes. Podem ser iteradas construções

geométricas ou expressões algébricas. Em outras palavras, o conceito de iteração está relacionado com o tópico *função composta*, que é tratado no Ensino Básico com ênfase menor, pois o processo iterativo é pouco utilizado durante a produção da ciência moderna, porém, assume um papel fundamental na construção da ciência contemporânea.

Os temas *iteração*, *mapeamentos* e *padrões* são conceitos matemáticos fundamentais para a construção da ciência alinhada com o pensamento sistêmico. Eles são alguns dos conceitos integrantes da linguagem matemática que descreve sistemas que se sustentam em processos não-lineares, envolvendo interconexões em redes. Desde meados do século XX, tem emergido “uma nova linguagem, voltada para o entendimento dos complexos e altamente integrativos sistemas de vida [...] Atratores caóticos, fractais, estruturas dissipativas, auto-organização e redes autopoieticas são algumas de suas concepções-chave” (CAPRA, 1998, p. 19).

Um esclarecimento dessas concepções, apontadas por Capra, pode ser buscado por meio de obras produzidas pelos pesquisadores que colocam suas teorias complexas em textos acessíveis aos leigos. Os temas *fractais* e *atratores caóticos*, também denominados *atratores estranhos* ou *atratores fractais*, são tratados, nesta pesquisa, por meio de um entrelaçamento da linguagem materna com a linguagem formal acessível no Ensino Básico.

O novo conjunto de conceitos e técnicas para se lidar com a complexidade não tem uma denominação definitiva, sendo adotada nessa pesquisa a denominação menos técnica e mais popular: *Matemática do caos*, também conhecida como

a nova matemática da complexidade e, tecnicamente, como *teoria dos sistemas dinâmicos*, *dinâmica dos sistemas*, *dinâmica complexa* ou *dinâmica não-linear* [...] Para evitar confusões, é útil ter sempre em mente o fato de que a teoria dos sistemas dinâmicos não é uma teoria dos fenômenos físicos, mas sim, uma teoria matemática cujos conceitos e técnicas são aplicados a uma ampla faixa de fenômenos. O mesmo é verdadeiro para a teoria do caos e para a teoria dos fractais, importantes ramos da teoria dos sistemas dinâmicos (CAPRA, 1998, p. 99, grifos do autor).

5.2 O AVANÇO DAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS

Nesse momento são focados os passos iniciais de alguns pesquisadores que fornecem contribuições decisivas para as teorias do caos e dos fractais. As primeiras investigações nessas áreas acontecem separadamente, pois, no início, não são percebidas as ligações entre elas.

Ao longo da década de 1970, quando ambos estavam na infância, o caos e os fractais pareciam não ter qualquer relação entre si. Mas eram primos matemáticos. Ambos enfrentam a estrutura da irregularidade. Em ambos, a imaginação geométrica é senhora. Mas, enquanto no caos a geometria presta vassalagem à dinâmica, nos fractais ela reina absoluta. Os fractais oferecem uma nova linguagem para descrever a forma do caos (STEWART, 1991, p. 233).

O trabalho pioneiro na teoria hoje conhecida como *caos* é realizado por Henri Poincaré (1860-1934), que investiga o problema dos *três* corpos, que permanecia sem solução desde a época de Newton, pois a proposta newtoniana oferece ferramentas para calcular situações envolvendo a atuação da força da gravidade entre *dois* corpos.

Poincaré se dedica ao problema dos três corpos, quando, em 1887, o rei Oscar II da Suécia oferece um prêmio para quem respondesse uma pergunta fundamental da Astronomia: *O Sistema Solar é estável?* Poincaré não consegue resolver completamente essa questão, mas recebe o prêmio pelos avanços que efetua.

Como outros antes, ele fracassou na solução das equações, mas, diferentemente de seus antecessores, ele resolveu o problema em um sentido bem real: provou que as equações não tinham solução. Na realidade as equações possuem uma solução geral, mas não uma solução que nos seja possível achar (LORENZ, 1996, p. 146).

A obra premiada de Poincaré intitula-se *Sobre o Problema dos Três Corpos e as Equações da Dinâmica*, onde apresenta propriedades das equações dinâmicas e aplica os resultados a corpos movendo-se sob a gravitação newtoniana. Poincaré oferece uma nova abordagem aos problemas da mecânica celeste, estabelecendo “os fundamentos de uma teoria de sistemas dinâmicos [...] e demonstrou que alguns sistemas se comportavam caoticamente, [...] ele procurava entender as órbitas dos corpos celestes e encontrou o caos” (LORENZ, 1996, p. 150).

Poincaré apresenta uma nova postura, buscando

substituir os métodos quantitativos, precisos, mas limitados, por métodos qualitativos, que levam mais longe, mas fornecem uma imagem menos distinta. A posição histórica de Poincaré é ter sido um mestre dos primeiros e um inventor dos segundos. Ele será o mais incisivo crítico dos métodos quantitativos e o grande precursor dos métodos qualitativos (EKELAND, 1993, p. 48).

Algumas investigações matemáticas valorizam representações visuais, em outras, é priorizado o raciocínio formal. Laplace, em sua *Mecânica Analítica*, não apresenta figuras, mas apenas *Análise Matemática*. Poincaré reconduz a *Geometria* à *Mecânica*, desfazendo o exagerado valor atribuído por Laplace aos métodos analíticos e ao cálculo.

Do século XVII em diante, o estilo europeu da matemática mudou gradualmente a partir da geometria, a matemática das formas visuais, para a álgebra, a matemática das fórmulas [...] Poincaré inverteu

essa tendência [...] voltando novamente para os padrões visuais. No entanto, a matemática visual de Poincaré não é a geometria de Euclides. É uma geometria de um novo tipo, uma matemática de padrões e relações conhecida como topologia (CAPRA, 1998, p. 109).

No despontar do século XX, Poincaré publica seu primeiro livro filosófico, *A Ciência e a Hipótese*, onde discorre sobre a *Geometria Qualitativa*, na sua época denominada *Analysis Situs* e hoje conhecida como *Topologia*. Ao considerar os instrumentos quantitativos que os matemáticos colocam nas mãos do pesquisador, analisa

uma noção fundamental, a da grandeza matemática. Nós a encontramos na natureza ou somos nós que aí a introduzimos? E, no último caso, não nos arriscamos a tudo falsear? Comparando os dados brutos de nossos sentidos e esse conceito extremamente complexo e sutil que os matemáticos chamam grandeza, somos forçados a reconhecer uma divergência; esse quadro em que queremos tudo introduzir, fomos, então, nós que o construímos (POINCARÉ, 1988, p. 17).

Um entendimento do conceito de *Geometria Qualitativa* de Poincaré pode ser buscado no exemplo que ele apresenta, relacionado com a lei de Fechner, segundo a qual a sensação é proporcional ao logaritmo da excitação. Poincaré (1988, p. 36) analisa as experiências que basearam a formulação dessa lei quantitativa, constatando que elas conduzem para uma conclusão contraditória. Ele considera os dados experimentais nos quais Fechner fundamenta sua lei:

um peso A de 10 gramas e um peso B de 11 gramas produzem sensações idênticas, e, também, que o peso B não podia ser distinguido de um peso C de 12 gramas, mas que se distinguia facilmente, o peso A do peso C. Os resultados brutos da experiência podem, pois, ser expressos pelas seguintes relações: $A = B$, $B = C$, $A < C$.

Poincaré mostra que os resultados das experiências de Fechner, quando resumidos nas fórmulas acima, encerram uma contradição. Para eliminá-la, Poincaré (1988, p. 41) considera que os dados podem ser apresentados como

dois conjuntos quaisquer de sensações. Ou bem poderemos distingui-los um do outro, ou bem não poderemos, do mesmo modo que, nas experiências de Fechner, um peso de 10 gramas podia ser distinguido de um peso de 12 gramas, mas não de um peso de 11 gramas. Não preciso de nada mais para construir o contínuo de várias dimensões.

Utilizando como ponto de partida os dados obtidos por Fechner, Poincaré (1988, p. 42) apresenta sua noção de contínuo físico de várias dimensões e deriva a noção de *contínuo matemático de r dimensões*, discorrendo sobre um novo ramo da Matemática

que somente se preocupa em saber, por exemplo, se numa curva ABC, o ponto B está entre os pontos A e C e não em saber se o arco AB é igual ao arco BC, ou se é duas vezes maior. É o que chamamos a *Analysis Situs*. É todo um corpo de doutrina que atraiu a atenção dos maiores geômetras e onde vemos saírem, uns dos outros, toda uma série de teoremas notáveis.

O que distingue esses teoremas dos da Geometria comum é que são puramente qualitativos.

A *Geometria Qualitativa* construída por Poincaré, hoje denominada *Topologia*, pode ser descrita simploriamente como a geometria das deformações. Por exemplo, tomando um pouco de massa de modelar, podemos modificá-la de modo contínuo, formando uma esfera, um cubo, um cilindro. Um triângulo pode ser deformado, continuamente, assumindo a forma de um quadrado, de um círculo.

A topologia já foi definida como a *geometria da folha de borracha*. Mais propriamente, é a matemática da continuidade [...] Um ceramista, ao moldar um bocado de argila em suas mãos, deforma-a de maneira contínua; quando arranca um fragmento, porém, a deformação se torna descontínua. A continuidade é uma das mais fundamentais de todas as propriedades matemáticas [...] Para o topólogo, todas as formas geométricas que nos ensinaram com tanta insistência quando éramos crianças, são uma só (STEWART, 1991, p. 71, grifos do autor).

Para um topólogo, não interessam as medidas dos objetos estudados, mas sim, as propriedades que não se alteram sob transformações contínuas. Buracos são objetos topológicos: um biscoito com um buraco no meio e uma xícara de café são, para o topólogo, a mesma coisa, uma vez que ambos possuem apenas um buraco. Considerando uma figura que é dobrada, contraída, torcida, esticada, sem efetuar rasgaduras, são denominadas propriedades topológicas aquelas que se mantêm após essas deformações.

Na investigação da pergunta do rei Oscar II, utilizando seu método topológico, "Poincaré foi capaz de determinar a forma geral de suas trajetórias [...] O que Poincaré representou em sua mente é hoje denominado *atrator estranho*" (CAPRA, 1998, p. 110, grifos do autor). Suas idéias inovadoras são seguidas por pesquisadores que criam novos conceitos matemáticos para trabalhar os sistemas dinâmicos, com o auxílio de computadores. "As técnicas matemáticas que permitiram, nas últimas três décadas, descobrir padrões ordenados em sistemas caóticos baseiam-se na abordagem topológica de Poincaré e estão estreitamente ligadas com o desenvolvimento de computadores" (CAPRA, 1998, p. 110).

Capra (1998, p. 110) transcreve a descrição, efetuada por Poincaré, de uma complexa figura gerada pelas trajetórias por ele estudadas, as quais

formam uma espécie de rede, de teia ou de malha infinitamente apertada; nenhuma das duas curvas pode jamais cruzar consigo mesma, mas deve dobrar de volta sobre si mesma de maneira bastante complexa a fim de cruzar infinitas vezes os elos da teia. Fica-se perplexo diante da complexidade dessa figura, que nem eu mesmo tento desenhar.

Na figura que segue, está representada uma curva relacionada com o movimento de uma partícula que se move na órbita de dois planetas fixos de massas iguais:

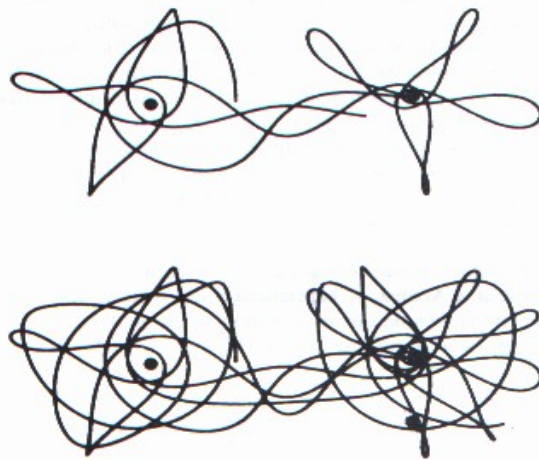


Figura 7: A complexidade do movimento de três corpos

Fonte: STEWART, 1991, p. 75

No final do século XIX, a construção de teorias científicas acontece por meio da utilização da *Análise Matemática* ou pela *Análise Estatística* de quantidades médias. As equações diferenciais da *Análise Matemática*, estabelecidas a partir de Newton, são usadas para modelos simples, deterministas, enquanto que a *Análise Estatística* é usada para sistemas complexos. Nessa época, para o mundo da ciência, um sistema ou é determinista ou é randômico, sendo entendido que simplicidade e complexidade nada têm em comum. “Uma lei para o ordenado, outra para o desordenado [...] Duas maneiras de ver o mundo [...] Pode um sistema determinístico simples comportar-se como um sistema randômico? É uma pergunta que contraria o senso comum” (STEWART, 1991, p. 63). No entanto, Poincaré responde de modo positivo, constatando situações com uma

complexidade absolutamente inesperada e demonstrou que as equações da dinâmica podem produzir movimentos extremamente irregulares, sendo estes mais a regra do que a exceção. Sob a regularidade aparente, macroscópica, de aproximação kepleriana, Poincaré pôs em evidência uma profusão de acidentes microscópicos [...] (EKELAND, 1993, p. 55).

As pesquisas de Poincaré revelam que modelos quantitativos, por mais precisos que sejam, não garantem o alcance de previsibilidade absoluta. Sistemas que obedecem a leis determinísticas nem sempre atuam de modo previsível e regular. Desse modo, a visão de mundo completamente determinista, no sentido laplaciano, sofre um abalo e a “descoberta do caos não aboliu o determinismo da física pré-quântica, mas forçou-nos a sermos um pouco mais cautelosos ao dizer o que é esse determinismo” (WEINBERG, 1996, p. 38).

Sete décadas após Poincaré, a missão *Voyager* revela o comportamento inusitado de Híperon, uma das luas de Saturno, cuja forma é irregular e cuja órbita precisa e regular é norteadas pelas leis de Newton. No entanto, seu comportamento nessa órbita não é o mesmo dos demais satélites e planetas. Híperon dá cambalhotas seguindo um padrão complexo e irregular. Trata-se de “um traço inerente às equações matemáticas em dinâmica. A capacidade das equações, mesmo simples, de gerar movimento tão complexo, tão sensível à mensuração que parece aleatório. Isto é chamado, com muita propriedade, de caos” (STEWART, 1991, p. 22, grifo do autor).

Nem todos os que investigam o caos concordam com tal denominação, em virtude de, no sentido comum da palavra, caos significar desordem completa. Muitos pesquisadores anexam o adjetivo *determinístico* para designar a teoria científica. Em 1986, durante uma conferência internacional patrocinada pela Royal Society de Londres, buscou-se uma definição precisa de caos, empregando a palavra *estocástico*, derivada do grego *stochastikos*, que significa *hábil na mira*. Caos é entendido como sendo “comportamento estocástico que ocorre num sistema determinístico” (STEWART, 1991, p. 23).

A construção da teoria do caos não acontece na época de Poincaré pela falta de tecnologia computacional e pelo desinteresse dos cientistas em fenômenos irregulares, pois que se buscavam, desde Galileu, leis científicas mecanicistas. O entendimento vigente, no mundo da ciência clássica, associava equações elementares com fenômenos simples e fenômenos complexos com modelos matemáticos complicados. “Foi preciso outra época, equipada com a teoria qualitativa das equações diferenciais criada pelo próprio Poincaré, além de computadores e outros auxílios tecnológicos, para lançar alguma luz sobre as profundezas caóticas e revelar sua beleza” (STEWART, 1991, p. 66).

Na natureza, por toda parte, acontecem fenômenos onde os efeitos não são proporcionais à grandeza das causas, donde a importância do estudo de sistemas não-lineares. Porém, de modo similar ao problema investigado por Poincaré, muitos sistemas de equações não possuem solução analítica. A abordagem qualitativa, que tem início com Poincaré, pode ser aplicada tanto para equações diferenciais lineares como também para as não-lineares. “O *estudo qualitativo* de equações diferenciais preocupa-se em identificar características importantes de suas soluções sem resolvê-las [...] é sobretudo para os sistemas não-lineares que o estudo qualitativo revela sua potencialidade” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 17, grifos dos autores). Com o desenvolvimento de computadores, as equações que não apresentam solução analítica podem ser resolvidas.

No entanto, as soluções são de um tipo muito diferente. O resultado não é uma fórmula, mas uma grande coleção de valores para as variáveis que satisfazem a equação, e o computador pode ser programado para desenhar a solução como uma curva, ou um conjunto de curvas, num gráfico. Essa técnica permitiu aos cientistas resolver as complexas

equações não-lineares associadas aos fenômenos caóticos e descobrir ordem sob o caos aparente. Para revelar esses padrões ordenados, as variáveis de um sistema complexo são exibidas num espaço matemático abstrato denominado *espaço de fase*. Essa é uma técnica bem conhecida, que foi desenvolvida na termodinâmica, na virada do século (CAPRA, 1998, p. 111, grifos do autor).

Para exemplificar o *espaço de fase*, pode ser considerado um pêndulo oscilando sem atrito, estudado no Ensino Médio, cujo movimento é descrito por meio de duas variáveis: o ângulo e a velocidade. Traçando-se um sistema de coordenadas, onde uma delas representa os ângulos e, a outra, as velocidades, todos os estados de movimento do pêndulo podem ser marcados nesse *espaço de fase bidimensional*. Marcando-se diversos pontos, obtém-se um laço fechado, que, dependendo das medidas envolvidas, pode ser uma elipse ou um círculo. Capra (1998, p. 113) alerta: “esse laço não é, em nenhum sentido, uma trajetória da bola do pêndulo. É uma curva num espaço geométrico abstrato, composta das duas variáveis do sistema”. À medida que o sistema muda, o ponto que representa o seu estado no espaço de fases se moverá, descrevendo uma trajetória. Desse modo, uma curva no *espaço de fase* não representa o conjunto de pontos que um móvel ocupa sucessivamente em um espaço euclidiano, mas sim, as *fases* do movimento em cada instante.

No caso de um pêndulo oscilando com atrito, o movimento é representado por uma curva que espirala em direção ao centro.

Essa trajetória é chamada de *atrator*, pois os matemáticos dizem, metaforicamente, que o ponto fixo no centro do sistema de coordenadas *atrai* a trajetória [...] Uma trajetória em laço fechado é chamada de *atrator periódico*, ao passo que a trajetória que espirala para dentro é chamada de *atrator puntiforme* (CAPRA, 1998, p. 113, grifos do autor).

De modo resumido:

No espaço de fases, cada ponto representa um estado particular de um sistema dinâmico. As coordenadas do ponto – distâncias em direções mutuamente perpendiculares a partir de algum ponto de referência, chamado de origem – são numericamente iguais aos valores que as variáveis assumem quando da ocorrência do estado (LORENZ, 1996, p. 59).

A técnica do *espaço de fases* tem sido utilizada na investigação de sistemas complexos descritos por equações não-lineares e, com o auxílio de computadores, são desenhadas as soluções como trajetórias no *espaço de fases*. Não sendo possível resolver analiticamente equações que descrevem algum sistema dinâmico, podem “identificar-se as principais características de suas soluções e compreender de modo qualitativo os possíveis movimentos deste sistema físico” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 17).

Uma propriedade importante de um sistema dinâmico é o seu comportamento a longo prazo, quando pode se estabilizar num *atrator*. Fiedler-Ferrara e Prado (1994, p. 85) relatam que ainda não existe uma definição única para *atrator*, que, de modo intuitivo, “é um conjunto invariante para o qual órbitas próximas convergem depois de um tempo suficientemente longo”. Para Lorenz (1999, p. 57), “os estados de qualquer sistema que freqüentemente se repitam, ou que freqüentemente sejam praticamente atingidos com precisão cada vez maior, pertencem então a um conjunto bastante restrito. Este conjunto é o de *atratores*”. Stewart (1991, p. 121) explica que “a essência de um atrator é ser uma porção do espaço de fase tal que qualquer ponto que se ponha em movimento nas suas proximidades se aproxima cada vez mais dele”.

Um atrator que evolui por um processo de alongamentos e dobras é chamado de *atrator estranho*, denominação introduzida por Ruelle e Takens. É também denominado *atrator caótico* ou *atrator fractal*. “Muitos livros de *Mecânica* se referem aos sistemas dinâmicos cujos atratores são pontos, aproximações de círculos ou outras formas de Euclides. Mas eles são raras exceções, e o comportamento da maioria dos sistemas dinâmicos é incomparavelmente mais complexo: seus atratores ou repulsores tendem a ser fractais” (MANDELBROT, 1977, p. 195, tradução nossa¹).

Segundo a definição de Ruelle e Takens, um atrator é chamado estranho quando as linhas de fluxo dependem *sensitivamente das condições iniciais*. Com efeito, num atrator estranho, pontos inicialmente arbitrariamente próximos estarão macroscopicamente (exponencialmente) separados depois de um intervalo de tempo suficientemente longo. Por outro lado, num sistema dinâmico dissipativo as soluções geram elementos de volume que se contraem de maneira que a dinâmica tende a uma região limitada do espaço de fases. A única maneira pela qual soluções únicas podem se contrair numa direção e se expandir em outra, permanecendo numa região finita, é por um processo de *dobra* ou *foliação* na direção da contração (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 88, grifos do autores).

Nas últimas décadas, muitas equações não-lineares são estudadas por meio da técnica do *espaço de fases* e os “pesquisadores descobriram que há um número muito limitado de atratores diferentes. Suas formas podem ser classificadas topologicamente e as propriedades dinâmicas gerais de um sistema podem ser deduzidas da forma de seu atrator” (CAPRA, 1998, p. 114).

A *Topologia*, que inicia como um ramo da *Geometria*, durante o século XX é generalizada e “hoje talvez, numa visão mais adequada, possa ser considerada, ao lado da geometria, da álgebra e da análise, como uma das partes fundamentais da matemática” (EVES, 1997, p. 666).

¹ Much of textbook mechanics concerns dynamical systems whose attractors are points, near-circles, or other shapes from Euclid. But these are rare exception, and the behavior of most dynamic systems is incomparably more complicated: their attractors or repellers tend to be fractals.

Entre a época de Poincaré e o início da investigação contemporânea sobre os fenômenos caóticos, a *Topologia* se torna a área da Matemática onde o pensamento abstrato predomina, se desligando das outras ciências e evoluindo sem a busca de aplicações nos fenômenos físicos. Caso recebessem a intimação “*Mostre-me a ocorrência disso na natureza [...] para os topologistas da década de 1970, era uma exigência excessiva. Mas essa ocorrência já tinha sido registrada, em 1963 – embora nem os topologistas nem os físicos soubessem disso*” (STEWART, 1991, p. 140, grifos do autor). Cada cientista procura conhecer as publicações relacionadas às suas áreas de pesquisa e o trabalho fundamental em teoria do caos, efetuado por Edward N. Lorenz, intitulado *Fluxo Não-Periódico Determinístico*, na época de sua divulgação, permanece desconhecido entre os matemáticos, pois é publicado como sendo um tema da meteorologia. Sendo um meteorologista, Lorenz publica seu trabalho no *Journal of Atmospheric Sciences*. “Os meteorologistas, não conhecendo matemática, ou conhecendo apenas a tradicional, de fato não sabiam o que fazer com aquilo [...] Lorenz sabia que estava às voltas com algo relevante, mas estava além do seu tempo” (STEWART, 1991, p. 147-148).

Em diferentes áreas do conhecimento, pesquisadores isolados em suas especialidades encontram pistas para lidar com fenômenos irregulares. Muitas investigações acontecem tendo como linha norteadora o entendimento de que, em alguns sistemas, na desordem emergem padrões ordenados: ordem e caos surgem simultaneamente.

Na vastidão das descobertas acontecidas no século XX, são focados, em seguida, nesta pesquisa, alguns resultados que podem ser trabalhados no Ensino Básico: a pesquisa sobre o clima atmosférico realizada por Lorenz, os objetos fractais estudados por Mandelbrot e a investigação do matemático ecologista May em dinâmica de populações. Serão destacados alguns fractais relacionados com tais pesquisas e buscar-se-á enfatizar seu vínculo com a visão de mundo sistêmica.

Na década de 1960, Edward N. Lorenz investiga as equações matemáticas para modelar o clima atmosférico, procurando desenvolver um modelo de simulação das condições atmosféricas com o objetivo de elaborar previsões meteorológicas adequadas. Lorenz escolhe equações que expressam relações entre pressão atmosférica, temperatura, velocidade do vento e de correntezas marítimas, enfim, coloca em prática as leis científicas tradicionais.

Aceitando o determinismo absoluto das leis físicas newtonianas, Lorenz fundamenta a sua pesquisa no entendimento de que, uma vez encontradas as equações que regem o clima, seria possível prever o tempo atmosférico com precisão. Os meteorologistas dessa época entendiam que, sendo possível, por exemplo, calcular trajetórias de planetas e satélites artificiais e prever eclipses e marés, então também seria possível modelar matematicamente o clima e efetuar previsões precisas.

No inverno de 1961, com as condições atmosféricas simuladas no seu primitivo computador, ao tentar repetir uma situação em seu programa computacional, ao invés de reiniciar desde o princípio, Lorenz digita números diretamente da impressão anterior. Prevalencia, na pesquisa científica, a idéia de que pequenas variações oferecem influências mínimas, que podem ser desconsideradas. Partindo do pressuposto de que uma pequena diferença nas condições iniciais produziria uma mínima variação no resultado final, digita 0,506 ao invés de 0,506127. Porém, ao examinar a nova seqüência, observa sua nova simulação computacional do clima atmosférico divergir rapidamente da anteriormente obtida. Percebe que seu modelo, apesar de ser construído com equações determinísticas, se tornava imprevisível. “Os erros iniciais de arredondamento eram os culpados, eles estavam regularmente se ampliando até que dominaram a solução. Na terminologia atual, produziu-se o caos” (LORENZ, 1996, p. 166). No sistema específico de equações que usava, pequenas diferenças transformavam-se rapidamente em resultados catastróficos.

Nos sistemas lineares, pequenas mudanças produzem pequenos efeitos, e grandes efeitos se devem a grandes mudanças ou a uma soma de muitas pequenas mudanças. Em sistemas não-lineares, ao contrário, pequenas mudanças podem ter efeitos dramáticos, pois podem ser amplificadas repetidamente por meio de realimentação de auto-reforço. Esses processos de realimentação não-lineares constituem a base das instabilidades e da súbita emergência de novas formas de ordem, tão típicas da auto-organização (CAPRA, 1998, p. 107).

Esse fenômeno, uma das principais características do que veio a ser chamada *teoria do caos*, é denominado no meio científico como *dependência sensível das condições iniciais* e popularmente conhecido como *efeito borboleta*.

A expressão tem uma história meio obscura. Parece ter surgido logo após a publicação de um artigo que apresentei em um encontro na cidade de Washington, em 1972, intitulado *O bater de asas de uma borboleta no Brasil desencadeia um tornado no Texas?* [...] O que tornou a origem da frase um pouco incerta foi a peculiaridade do primeiro sistema caótico que estudei de forma detalhada. Subseqüentemente, descobriu-se que uma representação gráfica resumida de uma coleção especial de estados conhecida como um *atrator estranho* assemelhava-se a uma borboleta (LORENZ, 1996, p. 28, grifos do autor).

O sistema de Lorenz é constituído por três equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dado por:

$$dx/dt = -10x + 10y$$

$$dy/dt = 28x - y - xz$$

$$dz/dt = -8/3z + xy$$

onde x, y e z são variáveis, t é o tempo e d/dt é a taxa de variação.

É possível encontrar sistemas físicos que podem ser modelados pelo sistema de equações de Lorenz sendo alterados “os números 10, 28 e 8/3. Um desses sistemas é uma

roda hidráulica; o outro é um dínamo; um terceiro, nas fronteiras da pesquisa física, é um *laser*” (STEWART, 1991, p. 158).

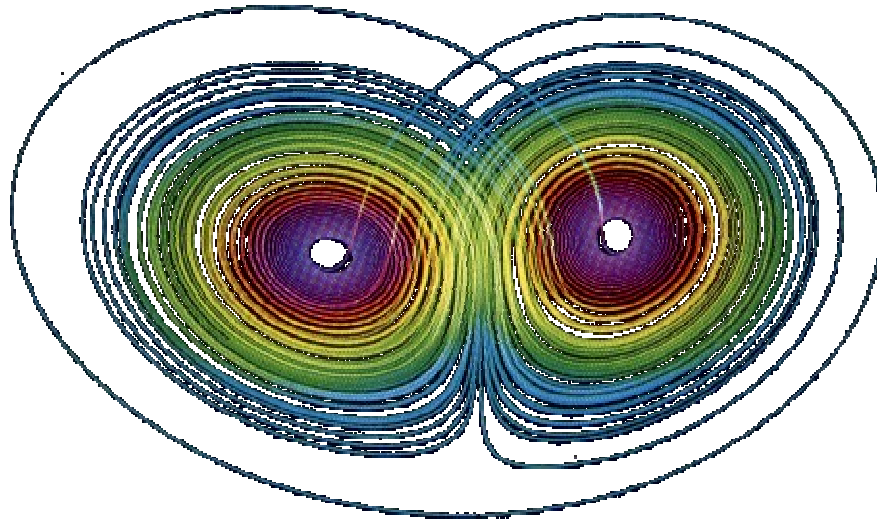


Figura 8: O atrator de Lorenz

Fonte: PEITGEN; JÜRGENS; SAUPE, 1991, [n. p.]

Pelo fato das equações da meteorologia serem sensíveis às condições iniciais, existe dificuldade para a obtenção de previsões de tempo atmosférico a longo prazo. Mínimas alterações nas condições iniciais, amplificando-se com o passar do tempo, produzem resultados diversos.

A impossibilidade de prever por que ponto do espaço de fase a trajetória do atrator de Lorenz passará num certo instante, mesmo que o sistema seja governado por equações deterministas, é uma característica comum a todos os sistemas caóticos. No entanto, isto não significa que a teoria do caos não é capaz de quaisquer previsões. Ainda podemos fazer previsões muito precisas, mas elas se referem às características qualitativas do comportamento do sistema e não aos valores precisos de suas variáveis num determinado instante. Assim, a nova matemática representa uma mudança da quantidade para a qualidade, o que é característico do pensamento sistêmico em geral. Enquanto a matemática convencional lida com quantidades e com fórmulas, a teoria dos sistemas dinâmicos lida com qualidades e com padrões. De fato, a análise de sistemas não-lineares, em termos das características topológicas de seus atratores, é conhecida como *análise qualitativa* (CAPRA, 1998, p. 116, grifos do autor).

Alguns objetos matemáticos são apontados por Ekeland como constituintes da paisagem onde se edifica a ciência contemporânea, *fotos extraídas do álbum de família da ciência dos nossos dias*. Considera que, do mesmo modo como as três leis de Kepler e as descobertas de Newton são referências constantes do pensamento moderno, “da mesma

maneira, podem resumir-se os progressos recentes em algumas imagens admiráveis, como o gato de Arnold, a ferradura de Smale, a dobra de Thom. Eles tiveram eco em todos os domínios da ciência” (EKELAND, 1993, p. 10).

Uma imagem importante da ciência contemporânea é o objeto matemático conhecido como *gato de Arnold*, relacionado com o *deslocamento de Bernoulli*, uma aplicação do intervalo $[0,1]$ nele mesmo dada por

$x_{n+1} = 2x_n(\text{mod}1)$ onde $\text{mod}1$ significa tomar a parte fracionária de $2x_n$. Existe dependência sensível às condições iniciais. Com efeito, na medida em que a cada iteração as distâncias são multiplicadas por dois, dadas duas distâncias infinitesimalmente próximas, a diferença entre elas cresce geometricamente com a aplicação de sucessivas iterações (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 124).

Nessa aplicação, as iterações constituem “um processo tão aleatório quanto o resultado de um jogo de cara ou coroa. É por isso que se fala de *afastamento de Bernoulli*, em memória de Jacob Bernoulli, o grande pioneiro, no século XVIII, da teoria dos jogos de azar” (PRIGOGINE, 1996, p. 94).

O deslocamento de Bernoulli é o ponto de partida para a *transformação do padeiro*, definida como a aplicação do quadrado $[0,1] \times [0,1]$ nele mesmo dada por

$$x_{n+1} = 2x_n(\text{mod}1),$$

$$y_{n+1} = \begin{cases} y_n/2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1/2 + y_n/2 & \text{se } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

O efeito da transformação do padeiro é cortar o quadrado em dois, com *contração* por um fator $1/2$ ao longo da direção y e *dilatação* por um fator 2 ao longo da direção x , o que conserva a área. Na figura [a seguir] representa-se a transformação do padeiro, ilustrando-a através da cabeça de um gato (*gato de Arnold*) num quadrado de lado 1 . A dilatação da abscissa reflete a dependência sensível às condições iniciais presente nesse mapa, bem como no deslocamento de Bernoulli, que lhe comunicou essa propriedade (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 127, grifos dos autores)

A denominação *transformação do padeiro* remete à idéia de um padeiro, que estica e corta um pedaço de massa. O modo de trabalhar a massa fica visível se, “tal como Arnold, desenharmos uma cabeça de gato no quadrado inicial e representarmos as suas sucessivas metamorfoses” (EKELAND, 1993, p. 67):

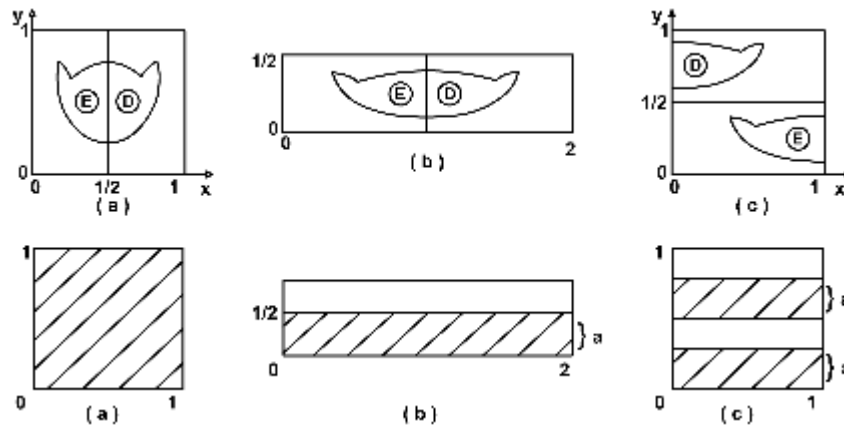


Figura 9: A transformação do padeiro – o gato de Arnold

Fonte: FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 128

Pode ser observado, nas figuras acima, que “o mecanismo da *transformação do padeiro* consiste em: (a) aplanar ao longo de y e esticar ao longo de x ; (b) cortar verticalmente em duas partes; e (c) colocar uma sobre a outra. Daí a denominação dada ao mapa” (FIEDLER-FERRARA, 1994, p. 128).

Quando ocorre o processo de alongamento e dobras, ao final de dez iterações existem 2^{10} camadas de massa, ou seja,

1024, e mais de um milhão ao fim de vinte. Todas estas folhas, bandas horizontais cada vez mais finas, são misturadas, baralhadas e rebaralhadas como um baralho de cartas. O gato de Arnold é esticado, retalhado, desintegrado, reduzido a *pâtée* [...] Porém, ele está lá sempre e pode-se fazê-lo reaparecer [ao repetirmos] o mesmo que antes, estender e sobrepôr, na condição de ter antes virado de lado o bocado de massa (EKELAND, 1993, p. 67).

Voltando, se passará da massa com 1024 camadas para a de 512, de modo que, após 10 iterações, aparecerá o gato de Arnold no quadrado original. “Estamos perante um fenômeno tipicamente determinista. O presente determina completamente o futuro, pela aplicação iterada de uma lei simples [...] No entanto, o efeito observado é tão irregular que chama a si irresistivelmente o qualificativo de aleatório” (EKELAND, 1993, p. 68)

Outra foto do álbum de família da ciência dos nossos dias, é a *ferradura de Smale*, criada pelo topologista Stephan Smale. No início da década de 1960, ele retoma a teoria qualitativa das equações diferenciais, que havia sido criada por Poincaré. Smale adota uma nova abordagem, utilizando a denominação “*sistema dinâmico* ao invés de *sistema de equações diferenciais*. E pensava os sistemas dinâmicos em termos de sua geometria – a topologia e do retrato de fase – em vez de lançar mão das fórmulas usadas para defini-los” (STEWART, 1991, p. 118, grifos do autor).

Smale pesquisa o *oscilador forçado de Van der Pol*, cujos estudos iniciais se relacionavam com válvulas de rádio, na área da eletrônica. A equação de Van der Pol é

usada para modelar várias oscilações elétricas e biológicas. Por toda a natureza são encontrados sistemas conhecidos tecnicamente como *osciladores forçados*, tais como o batimento cardíaco e o ciclo sono-vigília, onde o ritmo bioquímico é forçado pelo ciclo dia-noite. Um oscilador balança repetidamente, como um pêndulo que é forçado quando algum empurrão exterior, que varia com o tempo, é dado na sua dinâmica. Na interação entre os movimentos oscilatórios surgem efeitos não-lineares, instalando-se freqüentemente o caos.

Na década de 1940, Cartwright e Littlewood mostram que, sob certas condições, um oscilador forçado de Van der Pol exibe um complexo comportamento aperiódico. Smale investiga qual é a geometria subjacente a esse comportamento caótico e cria um modelo com geometria similar, hoje conhecido como *ferradura de Smale*.

A construção da *ferradura de Smale* tem início com um quadrado que é esticado até tornar-se um retângulo, o qual é dobrado e reintroduzido na sua moldura original. Na iteração seguinte, a ferradura é esticada e dobrada, obtendo-se três voltas em forma de U. O processo esticar-dobrar é repetido, sendo que na próxima etapa se obtém sete voltas em forma de U e, na iteração seguinte, quinze. Cada passo desse processo iterativo dobra o número de voltas e acrescenta uma, de modo que, no limite, será obtida uma curva infinitamente serpenteante. Considerando um ponto inicial qualquer do quadrado,

à medida que é iterado, deve ser *guiado* para a curva infinitamente serpenteante, porque o quadrado inteiro o faz! Assim, podemos também supor que ele está de fato *na* curva e, a cada iteração, saltita de um ponto da curva para outro. A curva é tão enroscada que o movimento nela é, para todos os efeitos, randômico (STEWART, 1991, p. 163, grifos do autor).

Para um entendimento da construção da *ferradura de Smale* podemos voltar para a imagem do padeiro trabalhando uma massa. Agora ele a comprime, diminuindo o seu volume. Em seguida a massa é esticada, comprimida, dobrada em forma de ferradura e recolocada, com folga, no quadrado original.

Considerando as iterações da ferradura e suas sucessivas imagens no quadrado original, observa-se que

elas estão contidas nas outras e que por sua vez, se desdobram. Na intersecção de todas as intersecções (é aí que a nossa intuição nos abandona) esconde-se um objeto estranho, composto por uma infinidade de bandas, mas conexo, comum a todas as metamorfoses da ferradura: é o atrator estranho. Ele escapa à nossa geometria intuitiva, construída a partir da nossa experiência corrente, mas existe: para o pôr em evidência basta seguir a trajetória dum ponto qualquer do quadrado. Vê-se desenhar um objeto híbrido, que não é curva nem superfície: trata-se do atrator estranho (EKELAND, 1993, p. 90).

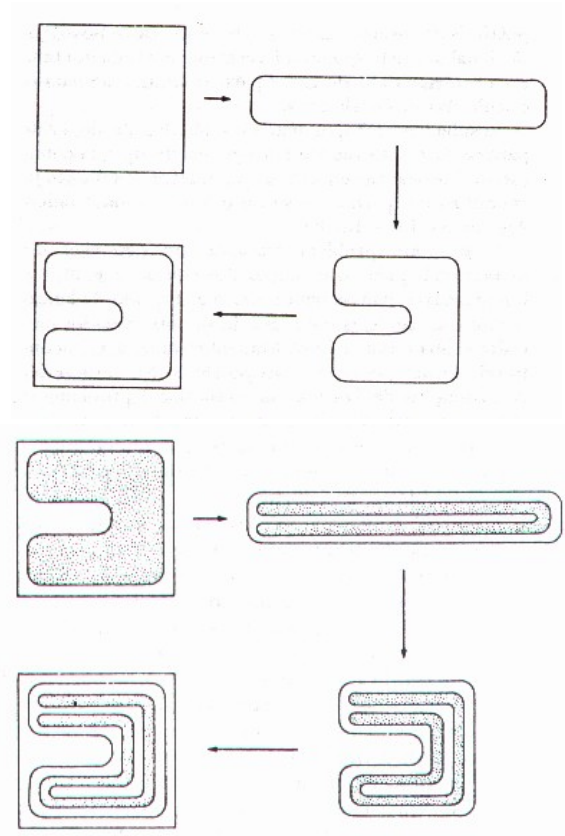


Figura 10: A ferradura de Smale

Fonte: EKELAND, 1993, p. 90-91

Analisando a *ferradura de Smale*, Stewart (1991, p. 163) avalia que apresenta

aquela mesma estrutura de infinitas camadas, que Lorenz deduziu que existia em seu atrator [...] O resultado é um emaranhado homoclínico – espaguete dinâmico – muito parecido com o que horrorizou Poincaré. A principal diferença é que o exemplo de Poincaré surgiu na dinâmica hamiltoniana – ausência de atrito. O sistema de Smale pode ocorrer também em sistemas dissipativos – em que o atrito está presente [...] Estudando a ferradura, Smale pôde avançar do ponto onde Poincaré desistira, o que deu lugar a uma explosão de idéias na teoria dos sistemas dinâmicos.

A propriedade da *dependência sensível das condições iniciais* também é encontrada nas variações das populações animais. Para os cientistas da *Ecologia*, os modelos matemáticos clássicos, relacionados aos fenômenos regulares, são longínquas aproximações dos complexos fenômenos da natureza. Pesquisadores dessa área investigam os movimentos de crescimento, decrescimento e extinção de populações, os modos como interagem presas e predadores, a maneira pela qual difunde-se uma doença epidêmica.

Na década de 1960, o ecologista matemático Robert May realiza as primeiras investigações em dinâmica de populações. Ele conduz suas pesquisas sob uma ótica diferenciada daquela assumida no estudo de populações segundo os pressupostos convencionados durante a construção da ciência moderna, estabelecidos por Galileu, Newton e seguidores.

A hipótese convencional é que, se a população é muito pequena, ela se multiplicará livremente, produzindo uma população bem maior, mas ainda bastante pequena, no próximo ano. Se ela é muito grande, ela irá se reproduzir ainda mais, mas não haverá alimento suficiente para mantê-la viva, e novamente no próximo ano a população será pequena. Então, um ano com população maior deverá ser sucedido por um ano com uma população de tamanho médio. May achava que, para uma taxa adequada de multiplicação e morte por inanição, o tamanho da população flutuaria caoticamente (LORENZ, 1996, p. 181).

Os ecologistas percebem que, na interação entre diferentes espécimes e na disseminação de epidemias, os dados fornecidos pelas observações mostram um comportamento complexo. Dificuldades surgem na busca de modelos matemáticos que descrevam tais situações, uma vez que as equações disponíveis, sustentadoras das teorias clássicas da Física, se revelam inadequadas para descrever a complexidade dos fenômenos da vida.

Conhecedores das limitações dos modelos matemáticos utilizados pelos físicos, os ecologistas reconhecem a possibilidade de utilização de idéias que, para os matemáticos clássicos são apenas abstrações excêntricas. No decorrer da criação da ciência moderna, coleções de dados irregulares haviam sido obtidas nas mais diversas circunstâncias, sendo explicadas, por exemplo, como consequência da pouca precisão de aparelhos, abandonando-se a pesquisa. Equações matemáticas envolvendo comportamento irregular despertam interesse entre os ecologistas, uma vez que possibilitam associações com a biologia populacional.

Em sua investigação sobre a dinâmica populacional de limântrias, May verifica que, de modo similar a outros insetos, o número de indivíduos de um determinado ano depende do seu número no ano anterior. Variações anuais são significativas uma vez que tais insetos limitam-se a uma única época do ano para reproduzirem-se, de modo que as gerações ficam diferenciadas, não acontecendo gerações que se sobrepõem.

Nas investigações efetuadas por May não prevalece a lógica que perpassa o pensamento científico clássico, a saber, que pequenos insumos produzem pequenas diferenças e grandes insumos produzem grandes modificações. Uma abordagem do modelo estudado por May possibilita um entendimento da *dependência sensível das condições iniciais*, denominação técnica do *efeito borboleta* detectado pelo trabalho pioneiro de Lorenz: uma propriedade essencial dos fenômenos caóticos.

Diversas funções podem ser utilizadas para descrever a dinâmica de uma população que sofre modificações significativas em tempos diferenciados, como por exemplo, limitando-se a um único período anual para reproduzir-se, de modo que suas gerações não se confundem. Modelos gerais discretos da dinâmica de populações cujo crescimento depende de condições ambientais inibidoras, tais como disponibilidade de alimentos e existência de predadores, podem ser formulados por meio de equações da forma $P_{n+1} = f(P_n)$. Por exemplo, se acontecem nascimentos na primavera e mortes no inverno, a contagem do número de indivíduos pode ser efetuada em um *tempo discreto*, anualmente, em uma data fixa. Pode ser estabelecida uma relação entre a população de um certo ano n e a do próximo ano $n+1$, por meio de uma função matemática, pois a população P_{n+1} depende da população P_n , existente no ano anterior.

A lei mais simples possível é criada por Thomas Malthus, no final do século XVII, a partir da conclusão de que a população cresce mais rápido do que a produção de alimentos. Considerando uma taxa de crescimento t :

$$P_{n+1} = t \cdot P_n$$

Se $t > 0$ ocorre crescimento populacional sem oscilação, levando à absurda conclusão de que, após determinado número de anos, camadas de indivíduos cobririam totalmente a região observada. Para $t < 0$ a tendência da população é diminuir até a extinção. Se $t = 0$ a população se estabiliza, o que é improvável que ocorra na natureza.

Pierre-François Verhulst, na segunda metade do século XIX, considera a existência de fatores inibidores no crescimento populacional, sugerindo que a taxa de crescimento de uma população não é constante, mas sim, proporcional ao valor máximo que a população pode alcançar no meio ambiente considerado. Nessas condições, t não é constante, sendo substituída por $r(M - P_n)$, onde M representa o número máximo de indivíduos que pode viver na região considerada. A expressão $(M - P_n)$ é o número de indivíduos que a região teria a possibilidade de suportar, é um número maior do que a população P_n e menor do que M . Desse modo, obtém-se a equação:

$$P_{n+1} = r (M - P_n) P_n$$

Para efetuar cálculos, é conveniente trabalhar com o conceito de *população relativa*, representada por x_n , que é a razão entre a população atual e o número máximo de indivíduos que a região considerada comporta. Ou seja, $x_n = P_n/M$.

Dividindo toda a equação por M e substituindo P_n / M por x_n e P_{n+1} / M por x_{n+1} obtém-se:

$$x_{n+1} = r (M - P_n) x_n$$

$$x_{n+1} = r M x_n - r P_n x_n$$

como $x_n = P_n / M \Rightarrow P_n = M x_n$

substituindo tem-se:

$$x_{n+1} = r M x_n - r M x_n x_n$$

$$x_{n+1} = r M x_n (1 - x_n)$$

Como a expressão $r M$ é uma constante, essa equação é simplificada fazendo $k = r M$, onde k é uma constante positiva que depende das condições ambientais da região considerada. Substituindo, obtemos

$$x_{n+1} = k x_n (1 - x_n)$$

Nesse modelo, conhecido como *modelo logístico discreto*, a população é expressa por um número decimal entre zero e um, sendo que zero representa a extinção de todos os indivíduos e 1 a maior população possível que sobrevive na região considerada. A expressão $(1 - x_n)$ modera o aumento do número de indivíduos.

Na década de 1960, o matemático ecologista May investiga o *modelo logístico discreto*, que apresenta *sensibilidade às condições iniciais* e

exemplifica não só as ocorrências do caos, mas como ele pode ser criado [...] O que o mapeamento logístico mostra é que mudanças drásticas não têm necessariamente causas drásticas [...] O mapeamento logístico é importante também porque foi nele que a teoria do caos teve seus contatos efetivos com experimentos (STEWART, 1991, p. 169).

Para mostrar como o caos acontece no *mapeamento logístico*, é utilizado o processo de *iteração*. Investigar uma população que varia com o passar dos anos, por meio de um processo iterativo, equivale a aplicar uma mesma função repetidamente: a população do segundo ano é calculada a partir da população do primeiro ano considerado; a população do terceiro ano é obtida a partir do número de indivíduos encontrados no segundo ano e assim sucessivamente. Matematicamente, esse processo é denominado *iteração funcional*, um processo de realimentação em que uma função matemática é aplicada repetidamente. Iterar uma função significa efetuar a composição de uma função com ela mesma.

No modelo logístico discreto, conhecendo-se o parâmetro k e a população x_n em certo ano, pode-se calcular a população x_{n+1} nos anos seguintes, iterando-se sucessivamente, para investigar a variação da população ao longo do tempo. Para evidenciar que a equação é iterada, utiliza-se a notação:

$$x_{n+1} \rightarrow k x_n (1 - x_n)$$

Essa notação, é mais adequada, uma seta para representar o processo iterativo, do que aquela tradicionalmente usada para representar funções compostas. A representação $f(f(f(f(f \dots f(x))))))$ é inadequada para significar que o processo será repetido muitas vezes.

Para o entendimento de uma propriedade fundamental da *teoria do caos*, a *sensibilidade às condições iniciais*, além da *iteração*, são importantes os conceitos de *órbita* e de *valor semente ou valor inicial*, abordados inicialmente por meio de funções lineares.

Para um valor inicial c , o processo de iteração gera uma seqüência de números: $f(c)$, $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$, $f(f(f(f(c))))$ e assim por diante.

Por exemplo, considerando o modelo de crescimento malthusiano onde a taxa de crescimento é igual a 2, a operação “multiplique por 2”, tradicionalmente representada por $f(x) = 2x$, pode ser iterada, sendo representada por $x_{n+1} \rightarrow 2x_n$. Tomando como valor inicial $x_0 = 4$ e efetuando cinco iterações obtém-se:

$$x_0 = 4$$

$$x_1 = 2(4) = 8$$

$$x_2 = 2(8) = 16$$

$$x_3 = 2(16) = 32$$

$$x_4 = 2(32) = 64$$

$$x_5 = 2(64) = 128$$

A lista de números gerados por um processo iterativo é denominada *órbita*. No exemplo acima, a órbita do ponto $x_0 = 4$ pode ser representada por:

$$8 \rightarrow 16 \rightarrow 32 \rightarrow 64 \rightarrow 128 \rightarrow \dots$$

Generalizando, as órbitas podem ser representadas como:

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow \dots$$

Considerando a regra de iteração $x_{n+1} \rightarrow -x_n$ e o valor inicial -2 obtém-se uma órbita que é um *ciclo de período 2*, que se repete a cada segunda iteração:

$$2 \rightarrow -2 \rightarrow 2 \rightarrow -2 \rightarrow \dots$$

Processos iterativos são usados em matemática financeira. Por exemplo, considerando uma certa instituição financeira que paga 10% de juros ao ano, ao ser aplicada a quantia de R\$1000,00, ao final de um ano recebe-se R\$100,00 de juros, totalizando R\$1100,00. Ao final do segundo ano tem-se R\$ 1210,00 ($1100 + 110$), ao final do terceiro ano tem-se R\$1321,00 ($1210 + 121$) e assim por diante. De modo geral, o processo pode ser representado como $x \rightarrow x + 0,10x$, equivalente a $x \rightarrow 1,10x$. Os sucessivos valores obtidos para o valor inicial $x_0=1000$ podem ser apresentados como sendo a órbita:

$$1000 \rightarrow 1100 \rightarrow 1231 \rightarrow \dots$$

“Para a regra de iteração $x \rightarrow x^2 - 2$, o que observamos é denominado *dependência sensível das condições iniciais* [...] Apenas uma pequena mudança na semente produz uma órbita muito diferente. Isto acontece para qualquer semente entre -2 e 2 ”. (CHOATE;

DEVANEY; FOSTER, 1999, p. 116, tradução nossa²). Sendo efetuadas vinte iterações, inicialmente para o valor inicial $x_0=0,123$ e, em seguida, para $x_0=0,1234$, obtém-se a seguinte tabela de valores:

Tabela 1: As vinte primeiras iterações de $x \rightarrow x^2 - 2$

ITERAÇÃO	Valor inicial $x_0=0,123$	Valor inicial $x_0=0,1234$
0	0,123	0,1234
1	-1,9849	-1,9848
2	1,9397	1,9393
3	1,7625	1,7610
4	1,1064	1,1010
5	-0,7760	-0,7878
6	-1,3979	-1,3794
7	-0,0460	-0,0972
8	-1,9979	-1,9905
9	1,9916	1,9623
10	1,9663	1,8505
11	1,8662	1,4244
12	1,4828	0,0288
13	0,1987	-1,9992
14	-1,9605	1,9967
15	1,8437	1,9868
16	1,3992	1,9473
17	-0,0421	1,7918
18	-1,9982	1,2106
19	1,9929	-0,5344
20	1,9717	-1,7144

Fonte: CHOATE; DEVANEY, FOSTER, 1999, p. 116

Com o auxílio do Excel, representando no eixo horizontal as iterações e no eixo vertical o valor numérico calculado, obtemos:

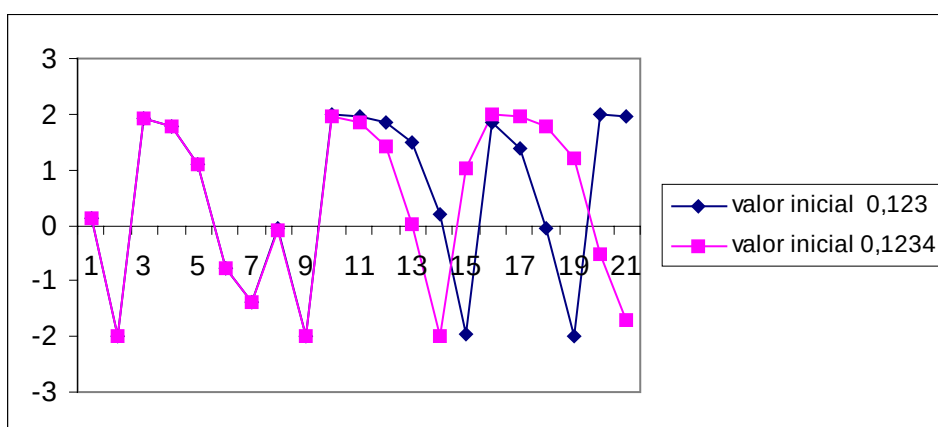


Figura 11: Gráfico das vinte primeiras iterações de $x \rightarrow x^2 - 2$

² For the iteration rule $x \rightarrow x^2 - 2$, what we have observed is called *sensitive dependence on initial conditions* [...] Just a small change in the seed produces a very different orbit. This happens for any seed between -2 e 2 .

Para uma melhor visualização do padrão que surge, são traçados segmentos de reta unindo os sucessivos resultados obtidos em cada iteração.

Observa-se que os números obtidos nas iterações iniciais são muito próximos, de modo que as linhas correspondentes às duas órbitas estão sobrepostas. Após nove iterações, os números das órbitas se afastam completamente. Nesse exemplo pode ser observado o fenômeno conhecido como *dependência sensível das condições iniciais*, pois uma mínima variação no valor inicial, de 0,123 para 0,1234 produz órbitas que, a partir de algumas iterações, divergem, completamente.

O processo de iteração também pode ser representado geometricamente por meio da construção de um *diagrama de rede*, também denominado *diagrama de teia de aranha*.

Tomando como exemplo a iteração $x \rightarrow 2x + 1$ é traçado o gráfico da função $y = 2x + 1$ e o gráfico da diagonal $y = x$, no mesmo sistema de eixos. Para o valor inicial $x_0=1$, teremos $x_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, o próximo ponto da órbita, representado por $x_1=3$. Determinando $x_0=1$ sobre o eixo horizontal, o ponto (1,1) é marcado sobre a diagonal $y = x$. Traçando um segmento vertical até a reta que representa $y = 2x + 1$ obtém-se o ponto (1,3). Em seguida traça-se uma reta horizontal, correspondente a $y = 3$, até encontrar a diagonal no ponto (3,3). Podemos observar que a ordenada é o ponto x_1 da órbita. Do mesmo modo, como $x_2 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, é traçado um segmento vertical até encontrar a reta $y = 2x + 1$ e um segmento horizontal até encontrar a diagonal, ficando determinado sobre a diagonal o ponto da órbita $x_2 = 7$.

Continuando o processo iterativo, a órbita $1 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow \dots$ tende para o infinito e pode ser visualizada ao longo da diagonal $y = x$, conforme o *diagrama da teia de aranha* abaixo:

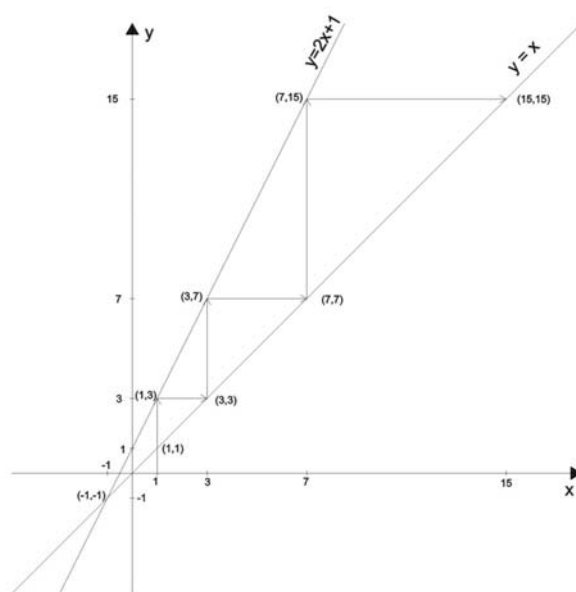


Figura 12: Diagrama da teia de aranha de $x \rightarrow 2x + 1$

Tomando como exemplo a iteração $y \rightarrow -1/2 x$, com valor inicial $x_0 = -2$, obtém-se a órbita $-2 \rightarrow 1 \rightarrow -1/2 \rightarrow 1/4 \rightarrow -1/8 \rightarrow 1/16 \rightarrow \dots$ que converge para 0.

Por meio de segmentos verticais e horizontais é traçado o *diagrama de rede* correspondente:

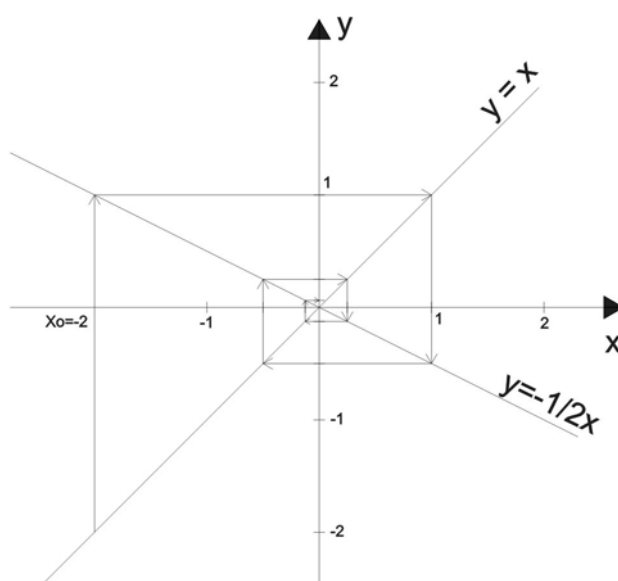


Figura 13: Diagrama da teia de aranha de $x \rightarrow -1/2x$

Voltando ao modelo logístico discreto, algumas iterações numéricas, representadas a seguir, em diagramas de rede, possibilitam o entendimento do *efeito borboleta*, a *dependência sensível das condições iniciais*, no contexto da complexidade dos fenômenos da vida.

A complexidade do mapa logístico $x_{n+1} \rightarrow k x_n (1 - x_n)$ pode ser percebida com a atribuição de diferentes valores para o parâmetro k , que depende das condições ambientais da região estudada. Seguindo as hipóteses convencionais, assumidas na ciência clássica, um parâmetro inferior produziria uma população composta por um pequeno número de indivíduos e um parâmetro maior levaria a um número maior. Uma exaustiva investigação numérica revela que tal lógica é correta para muitos parâmetros, porém, não para todos os valores. Efetuando iterações sucessivas, pode ser observada a evolução de uma população durante longos períodos. Com lápis e papel a exploração numérica é limitada e com o

auxílio de uma calculadora obtém-se números que não convergem para um limite, fato que levava pesquisadores a desistirem do modelo. A realização de um imenso número de cálculos, efetuados com o auxílio de computador, revela a emergência de padrões inusitados.

Efetuada a iteração de $x_{n+1} \rightarrow k x_n (1 - x_n)$ e aumentando progressivamente os valores do parâmetro k , para $0 < k < 1$ pode ser observado que todas as órbitas convergem para 0, sendo que esses resultados mostram que a população tende para a extinção. Aumentando o parâmetro k , como a população tem condições favoráveis para crescer, observa-se que as sucessivas iterações convergem para um estado de equilíbrio. Por exemplo, tomando como valor inicial $x_0 = 0,1$ e $k = 2,8$:

para $x_0=0,1$ obtém-se $x_1 = (2,8)(0,1)(1-0,1) = 0,252$

para $x_1=0,252$ obtém-se $x_2 = (2,8)(0,252)(1-0,252) = 0,528$

Para nove iterações, usando três algarismos após a vírgula, a órbita para $x_0=0,1$ é:
 $0,1 \rightarrow 0,252 \rightarrow 0,528 \rightarrow 0,698 \rightarrow 0,591 \rightarrow 0,677 \rightarrow 0,612 \rightarrow 0,665 \rightarrow 0,624 \rightarrow 0,666 \rightarrow \dots$

Representando a órbita obtida em um *diagrama de rede*:

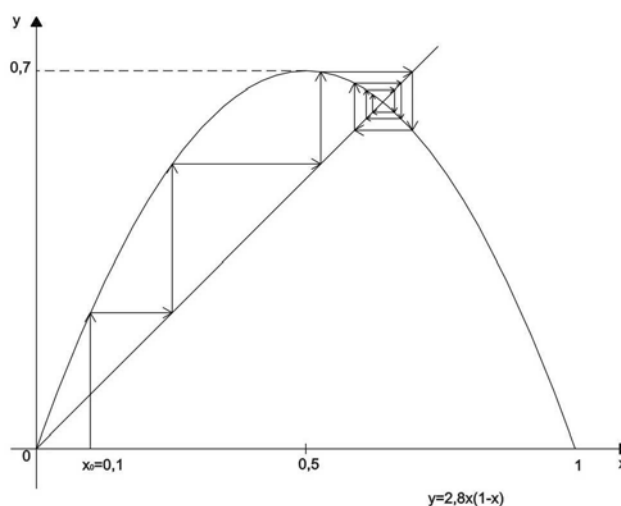


Figura 14: Diagrama da teia de aranha de $x_{n+1} \rightarrow 2,8 x_n (1 - x_n)$

Observa-se que “a teia de aranha vagueia diagonal acima e depois espirala para o ponto em que a parábola atinge a diagonal. Esse é o ponto fixo; e o resultado é estabilidade

porque a teia espirala *para dentro*” (STEWART, 1991, p. 172, grifos do autor). Assumindo $k < 3$, as sucessivas iterações convergem para um ponto de equilíbrio, ou seja, a população evolui para o equilíbrio, se estabilizando após um certo tempo.

“Quando k é exatamente 3, o ponto fixo é *marginalmente estável*: a convergência para ele é *extremamente* lenta. Isto é sinal de que estamos no limiar de algo dramático. De fato, para $k > 3$, o ponto fixo se torna instável, e a teia espirala *para fora*” (STEWART, 1991, p. 172, grifos do autor). Acontece uma mudança, de um regime de um único estado de equilíbrio para outro em que existem dois, uma duplicação do período que é chamada de *bifurcação*. Por exemplo, para $k=3,2$ acontecem dois pontos de equilíbrio, ou seja, a população oscila entre dois valores que se repetem sucessivamente, voltando à mesma situação a cada dois anos. Observa-se, no diagrama apresentado a seguir, que a *teia de aranha* espirala para *fora*. “O valor de x_n salta alternadamente entre dois valores distintos. Isto é um *ciclo de período dobrado*, ou *de período dois*. Assim, o estado estacionário perde a estabilidade e se torna periódico. Em outras palavras, o sistema começa a oscilar” (STEWART, 1991, p. 172, grifos do autor).

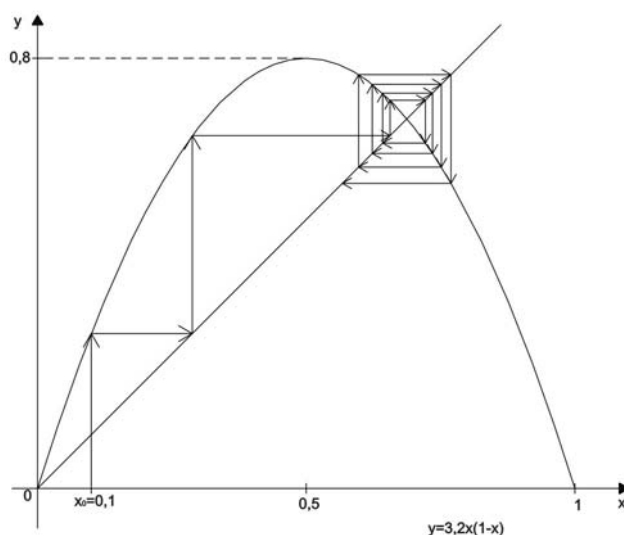


Figura 15: Diagrama da teia de aranha de $x_{n+1} \rightarrow 3,2 x_n (1 - x_n)$

Para um valor de k próximo a 3,45 o regime muda novamente, quando não mais dois estados de equilíbrio se alternam, mas sim, quatro. No caso da observação de uma população, nesse estágio, o número de indivíduos se repete a cada quatro anos. Novas

duplicações de período ocorrem na medida em que é aumentado o valor de k , resultando numa seqüência ou *cascata de bifurcações*, também denominada *cascata de duplicação de período*. “Uma bifurcação é qualquer mudança qualitativa do atrator de um sistema dinâmico; o mapeamento logístico está simplesmente repleto de bifurcações [...]” (STEWART, 1991, p. 176).

Para o valor $k = 4$ obtém-se o seguinte *diagrama da teia de aranha*:

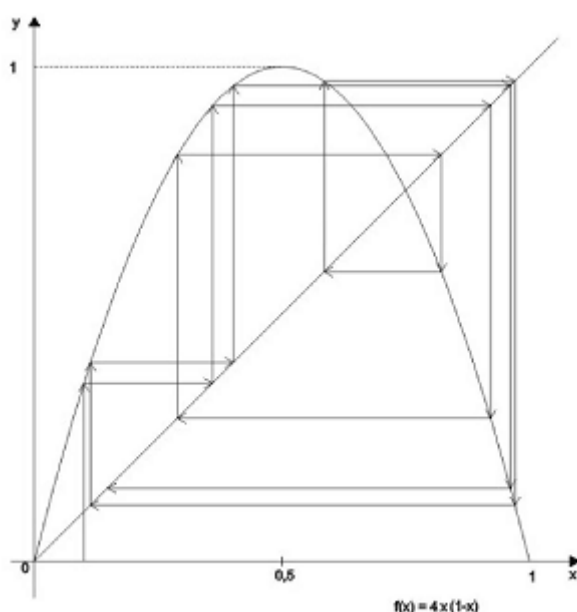
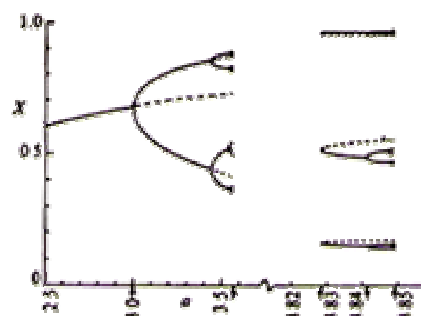


Figura 16: Diagrama da teia de aranha de $x_{n+1} \rightarrow 4 x_n (1 - x_n)$

Para facilitar a visualização, os resultados obtidos por meio do cálculo de um grande número de órbitas podem ser representados em um diagrama onde o nível do parâmetro k é representado sobre uma linha horizontal, aumentando da esquerda para a direita, sendo a população plotada sobre o eixo vertical.

Figura 17: O primeiro diagrama de bifurcação construído por May
Fonte: GLEICK, 1990, p. 74



Com a utilização de computadores mais desenvolvidos, pode-se observar que, a partir de 3,5699456... o mapa logístico apresenta um comportamento bastante complexo, sucedendo-se regiões caóticas e periódicas. As regiões caóticas, onde existe dependência sensível às condições iniciais, se encontram entremeadas por janelas de periodicidade, que podem ser vistas como regiões mais claras.

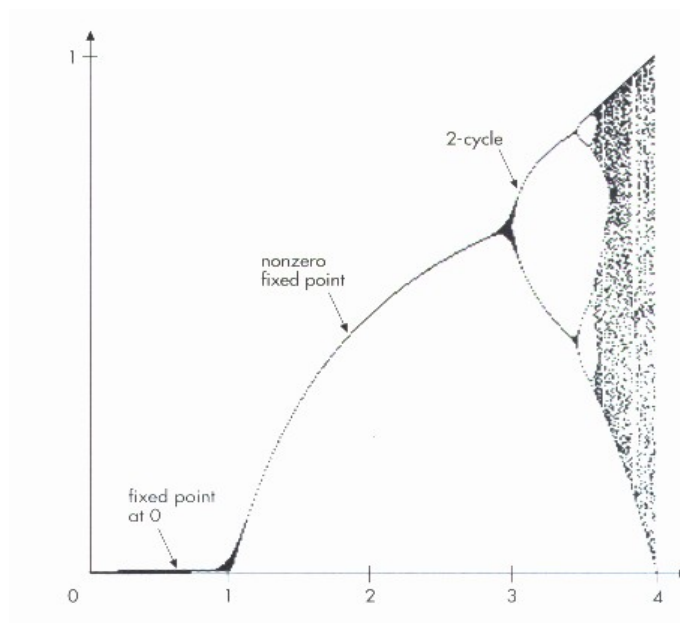


Figura 18: Mapa logístico com valores de k entre 0 e 4
 Fonte: DEVANEY; CHOATE, 2000, p. 176

À esquerda desse diagrama, onde o parâmetro é muito baixo, a população se extingue. Para parâmetros entre 0 e 3, a iteração se estabiliza em um número, quando o sistema atinge o equilíbrio, sendo o valor obtido representado sobre o eixo vertical.

Em determinado ponto crítico, quando acontece uma *bifurcação*, a linha se divide em duas, assumindo a forma de um garfo com dois dentes. Essa divisão corresponde a uma oscilação na população, que varia em um período de um ano e passa para um ciclo de dois anos. Para esse valor de k ocorre uma oscilação entre dois valores, x' e x'' , ou seja, para uma população de x' pode-se esperar x'' no ano seguinte. O progressivo aumento no valor do parâmetro provoca o aparecimento de oscilações entre quatro valores, e o ciclo, que havia dobrado de anual para dois anos e de dois para quatro anos, torna a dobrar-se, ocorrendo oscilações a cada oito anos, e assim sucessivamente, sendo que o aparecimento de *bifurcações* torna-se cada vez mais rápido. Subitamente são interrompidas, surgindo no diagrama regiões obscurecidas, como se a população sofresse mudanças aleatórias: à direita do diagrama o sistema torna-se caótico e a população passa por um número infinito

de valores diferentes. Dentro dessa região, sucessivamente, caos e ordem vão se alternando.

Assim, o estudo do mapa logístico, possibilita a discussão da propriedade da *dependência sensível às condições iniciais*, o *efeito borboleta*, um importante conceito da teoria do caos. A civilização ocidental “chegou a conceber o universo como uma engrenagem dotada da precisão de um relógio e a embarcar na ilusão de que equações determinísticas sempre conduzem a comportamentos regulares [...] Os matemáticos estão começando a ver a ordem e o caos como duas manifestações distintas de um determinismo subjacente” (STEWART, 1991, p. 28). O estudo do mapeamento logístico, que revela a fragilidade do equilíbrio da vida, possibilita trazer para o ensino as inquietações relacionadas às questões ecológicas, que emergem no mundo onde vivemos.

Nos dizeres de Robert May (1992, p. 95, tradução nossa³):

não apenas na pesquisa [biológica], mas também no mundo cotidiano da política e da economia, nós todos estaríamos em melhor situação se um número maior de pessoas percebesse que sistemas não-lineares simples não possuem necessariamente propriedades dinâmicas simples.

Períodos de ordem e situações caóticas também se encontram em outros sistemas biológicos, tais como as populações de vírus, provocadoras de doenças epidêmicas. A continuidade das pesquisas de May mostra resultados que vão de encontro à intuição clássica dos cientistas. Em epidemiologia, por exemplo, a intuição clássica conduz à hipótese de que, um programa de vacinação contra uma doença epidêmica levaria, gradativamente, à extinção da doença. Porém, é conhecido o fato de que epidemias tendem a ocorrer em ciclos, tanto regulares como irregulares, com uma frequência que aumenta e diminui. Uma gradual tendência para o declínio do número de pessoas infectadas é interrompida por acentuados aumentos a curto prazo.

Mesmo que a tendência a longo prazo viesse a decrescer, com firmeza, o caminho para um novo equilíbrio seria interrompido por picos surpreendentes. De fato, nos dados dos programas reais, como uma campanha para acabar com a rubéola na Grã-Bretanha, os médicos tinham visto oscilações exatamente como as previstas pelo modelo de May (GLEICK, 1990, p. 74)

Pode ser observado no *mapa logístico* um comportamento extremamente complexo que apresenta um padrão regular. Com a utilização de recurso computacional podem ser ampliadas as regiões próximas às bifurcações:

³ not only in [biological] research, but also in the everyday world of politics and economics, we would all be better off if more people realized that simple nonlinear systems do not necessarily possess simple dynamical properties.

Figura 19: Mapa logístico com valores de k variando entre 3 e 4

Fonte: DEVANEY; CHOATE, 2000, p. 177

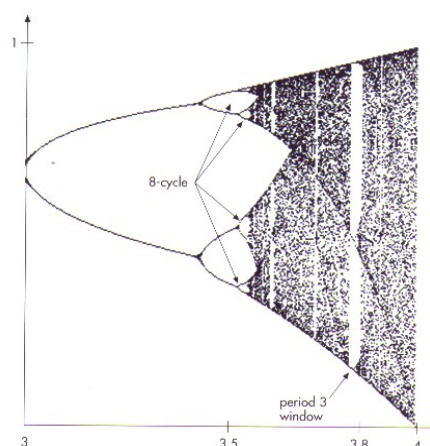
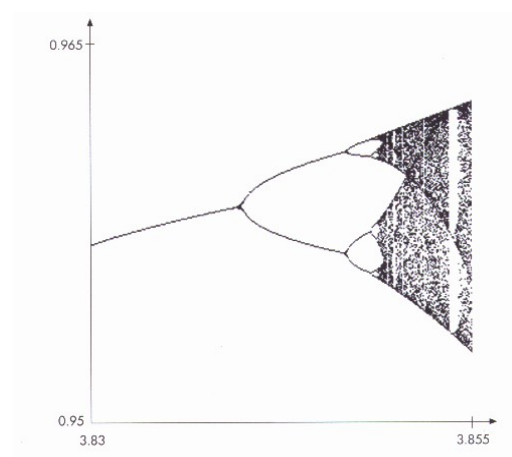


Figura 20: Mapa logístico com valores de k variando entre 3,83 e 3,855

Fonte: DEVANEY; CHOATE, 2000, p. 179



As novas regiões obtidas revelam-se semelhantes a todo o diagrama. Podemos dizer, recorrendo à *teoria dos fractais*, que a estrutura é *auto-similar*, pois a estrutura repete-se em escalas cada vez mais finas. No mapa logístico comparece um atrator estranho, sendo que “atratores estranhos encontrados em sistemas dinâmicos contínuos apresentam estrutura *tipo-Cantor*, *auto-similaridade* e *dimensão fractal*” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 89).

Aspectos da teoria dos fractais, a *dimensão fractal*, a *auto-similaridade* e o *conjunto de Cantor* são destacados, a seguir, nesta investigação, por serem importantes conceitos da ciência contemporânea.

5.3 EXPLICITANDO A LINGUAGEM DOS FRACTAIS

A palavra *fractal* é cunhada por Benoit Mandelbrot, a partir do adjetivo latino *fractus* e designa objetos matemáticos utilizados para descrever as formas irregulares relacionadas

com os fenômenos da natureza. Trata-se de objetos matemáticos que são construídos sendo acrescentadas ou retiradas muitas partes, indefinidamente. São modelos simplificados de litorais geográficos, cristais, flocos de neve, enfim, representações do que existe na natureza, onde a irregularidade marca constante presença. Nos dizeres de Mandelbrot (1977, p. 4, tradução nossa⁴):

Eu cunhei a palavra *fractal* do adjetivo latino *fractus*. O verbo latino correspondente *frangere* significa *quebrar*: criar fragmentos irregulares. Portanto, é considerável – e quão apropriado para as nossas necessidades! – que, além de significar *fragmentado* (como em *fração* ou *refração*), *fractus* pode também significar *irregular*, estando ambos os significados preservados em *fragmento* (grifos do autor).

A propriedade da *auto-similaridade*, presente no *mapeamento logístico*, é observada com frequência na natureza. Por exemplo, se forem retirados sucessivamente pedaços de uma couve-flor, cada pequena parte tem a mesma forma do vegetal original.

Os padrões característicos dos objetos fractais são repetidamente observados em escala descendente, ou seja, suas partes, em todas as escalas, são, na forma, semelhantes ao todo. A propriedade da *auto-similaridade* também comparece na teoria do caos, onde

os atratores estranhos são exemplos extraordinários de fractais. Se partes da sua estrutura são ampliadas, elas revelam uma subestrutura em muitas camadas nas quais os mesmos padrões são repetidos muitas e muitas vezes. Por isso, tornou-se comum definir atratores estranhos como trajetórias no espaço de fase que exibem geometria fractal (CAPRA, 1998, p. 119).

Mandelbrot (1997, p.1, tradução nossa⁵) indaga:

Porque a geometria é freqüentemente descrita como *fria* e *seca*? Uma das razões está em sua incapacidade para descrever a forma de uma nuvem, de uma montanha, de um litoral, ou de uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, litorais não são círculos, cascas de árvore não são lisas, nem o relâmpago viaja em linha reta.

Analisando de modo geral os seus trabalhos, Mandelbrot relata que, no início, propunha-se a imitar imagens da natureza por meio de fórmulas. Tal aspecto da *Geometria Fractal* atualmente é utilizada na elaboração de cenários de jogos de computador e na indústria cinematográfica. A figura seguinte mostra uma paisagem construída com a utilização de fractais:

⁴ I coined *fractal* from the Latin adjective *fractus*. The corresponding Latin verb *frangere* means *to break*: to create irregular fragments. It is therefore sensible – and how appropriate for our needs! – that in addition to *fragmented* (as in *fraction* or *refraction*) *fractus* should also means *irregular*, both meanings being preserve in *fragment*.

⁵ Why is geometry often described as *cold* and *dry*? One reason lies in its inability to describe the shape of a cloud, a mountain, a coastline, or a tree. Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line.



Figura 21: Paisagem criada via computacional utilizando *Geometria Fractal*

Fonte: HALL, 1992, [n. p.]

Avançando em suas pesquisas, Mandelbrot constata, ao estudar os textos de Poincaré, que as mesmas técnicas podem ser utilizadas nas investigações sobre os sistemas dinâmicos. Segue um fragmento de sua obra onde efetua uma avaliação de sua pesquisa, relatando que, no início,

a geometria fractal era uma geometria da natureza, que fazia um apelo constante ao caos estatístico. Mas, com a sua utilização, o seu papel alargou-se enormemente. É uma *geometria da natureza* e é uma *geometria do caos*, sob duas formas: estatística e determinista. Para ser mais preciso, os *Objetos Fractais*, de 1975, propunham-se não só a descrever as montanhas, as nuvens, as árvores e os amontoados de galáxias, mas também descrevê-los de uma forma suficientemente perfeita para permitir *imitar* imagens do real por meio de fórmulas. Essas imitações baseavam-se em modelos estatísticos. Pouco depois, no entanto, no meu livro inglês, Mandelbrot 1977f, pp. 255-259, verificava (lendo Poincaré) que as mesmas técnicas podiam se aplicadas em dinâmica (MANDELBROT, 1991, p. 208, grifos do autor).

Alguns objetos matemáticos, hoje denominados *fractais*, são construídos no final do século XIX, porém, apoiado na visão de mundo que norteia a construção da ciência moderna, o mundo da ciência os rejeita. A *poeira de Cantor*, a *curva de Koch*, o *tapete de Sierpinski* e a *esponja de Menger*, são recebidos com estranheza pelos matemáticos da

época. Esses objetos divergem da linha de pensamento predominante, sendo entendidos, na época de sua criação, como sendo curvas *monstruosas e patológicas*.

Mandelbrot (1977) inicia a apresentação de sua *galeria dos monstros matemáticos* considerando um dos fractais mais simples, o movimento browniano, a agitação que é observada quando minúsculas partículas são postas em suspensão sobre um líquido. Trata-se de um tipo de movimento caótico detectado pelo botânico Robert Brown, em 1827, ao observar no microscópio grãos de pólen flutuando sobre gotas de água. Einstein publica um trabalho, mostrando que o movimento em forma de ziguezague das partículas é causado por colisões com as moléculas do líquido, que possibilita a aceitação, no meio científico, da existência dos átomos. A curva que representa a trajetória de partícula em movimento browniano é desprovida de derivada em todos os seus pontos.

Nada mais chocante para a intuição do que essa proposição que nos é imposta pela lógica. Nossos antepassados não teriam deixado de dizer: *É evidente que toda função contínua tem uma derivada, já que toda curva tem uma tangente*. Como pode a intuição nos enganar a tal ponto? É que quando procuramos imaginar uma curva, não podemos representá-la sem espessura; do mesmo modo, quando representamos uma reta, vêmo-la sob a forma de uma faixa retilínea dotada de certa largura. Sabemos bem que essas linhas não têm espessura; esforçamo-nos para imaginá-las cada vez mais finas, e por nos aproximar assim do limite; conseguimos isso numa certa medida, mas jamais atingiremos esse limite. Então é claro que poderemos sempre representar essas duas faixas estreitas – uma retilínea e a outra curvilínea –, numa posição tal que as duas se invadam ligeiramente, sem se cruzar. Assim, a menos que sejamos advertidos por uma análise rigorosa, seremos levados a concluir que uma curva tem sempre uma tangente (POINCARÉ, 1995, p. 16, grifos do autor).

Além de curvas desprovidas de derivada em todos os seus pontos, outras questões apresentavam dificuldade, no início do século XX, por não permitirem a abordagem por meio da Matemática clássica, como o conceito de *dimensão*,

uma noção que remonta a um estado arcaico da geometria grega, mas que merece ser retomada, elaborada e de novo respeitada. Refere-se às relações entre *figuras* e *objetos*, designando o primeiro termo idealizações matemáticas e o segundo dados da realidade. Nesta perspectiva, um véu, um fio ou uma pequena bola – por muito finos que sejam – deverão ser representados por figuras tridimensionais, da mesma maneira que uma bola grande (MANDELBROT, 1991, p. 21, grifos do autor).

Assim, o conceito de *dimensão fractal* (D) não torna a dimensão euclidiana obsoleta, e sim, mais abrangente. A dimensão fractal se relaciona com um grau de resolução e, para exemplificar esse entendimento, Mandelbrot considera um novelo com 10 cm de diâmetro feito com um fio de 1 mm de diâmetro. Se for utilizado um grau de resolução 10 m, o novelo é visto como sendo um ponto, ou seja, uma figura com dimensão zero. Caso for assumido um grau de resolução de 10 cm, o novelo é considerado uma bola tridimensional. Para uma resolução de 10 mm, o fio enrolado é considerado como tendo

dimensão 1. Sob um grau de resolução de 0,1 mm, o fio é visto como sendo uma coluna tridimensional. Para um grau de resolução bem menor, o novelo é visto como um número finito de partículas atômicas com dimensão zero.

E assim por diante: o valor da dimensão não pára de variar! A dependência de um resultado numérico das relações entre o objeto e o observador está bem no espírito da física deste século, de que é mesmo uma ilustração particularmente exemplar. Com efeito, no mesmo sítio onde um observador vê uma zona bem separada das suas vizinhas, com um certo D característico, um segundo observador não verá mais do que uma zona de transição gradual (MANDELBROT, 1991, p. 22).

Desse modo, a teoria dos fractais se alinha com a visão de mundo que permeia a produção da ciência contemporânea. De modo similar às descobertas dos físicos que criaram a teoria quântica, mostra-se um universo sem fronteiras delimitadas entre as coisas que o constituem. Dependendo de quem observa, o observado muda. Assim, a visão de mundo subjacente à teoria dos fractais converge com aquela que se instaura na ciência contemporânea desde as primeiras décadas do século XX: o pensamento sistêmico, alinhado com a postura fenomenológica no que se refere à concepção das íntimas ligações homem-natureza.

Pela herança euclidiana, no cotidiano, admite-se, com naturalidade, que vivemos em um mundo com três dimensões, sendo assumido que o ponto não possui dimensão, à reta é atribuída a dimensão um, é associada a dimensão dois para o plano e o espaço é tridimensional. A dimensão fractal se relaciona com o grau de irregularidade de um objeto.

Podemos entender intuitivamente essa idéia compreendendo que uma linha dentada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais dentada for a linha, mais perto de 2 estará a sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará a sua dimensão fractal (CAPRA, 1998, p. 119).

Ao divulgar sua teoria para um público não especializado, Mandelbrot (1991, p. 14) apresenta uma série de objetos matemáticos, focando uma das suas principais características, sua *dimensão fractal*, que é

uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação [...] É conveniente dizer, a respeito de certas curvas planas muito irregulares, que a sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, definir conjuntos de pontos sobre uma linha cuja dimensão fractal está entre 0 e 1.

A geometria euclidiana apresenta limitações para descrever a dimensão de objetos que não são linhas unidimensionais, nem superfícies bidimensionais e nem volumes

tridimensionais. Por exemplo, o *atrator de Lorenz*, a figura com dois setores em forma de lobos, lembrando as duas asas de uma borboleta, apresenta uma dimensão intermediária entre 2 e 3, uma vez que

não é exatamente uma superfície, mas também não constitui um volume. De fato as folhas não tem extensão transversal e são separadas por espaço vazio. A dimensão fractal desse atrator é 2,06, ou seja, ela é bastante próxima daquela de uma superfície, mas ligeiramente superior (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 107).

Como exemplo de um *atrator estranho* com dimensão fractal situada entre 1 e 2 é gerado pelo mapa “bidimensional de Hénon

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = bx_n$$

para, por exemplo, $a=1,4$ e $b=0,3$ [...] O mapa de Henón, dada a sua estrutura foliada, guarda relação com o mapa de Smale da ferradura” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 92). O atrator de Hénon é mostrado na figura a seguir, onde os pequenos quadrados delimitam as regiões que são, sucessivamente, ampliadas: (a) 5×10^3 iterações; (b) 10^5 iterações; (c) 2×10^6 iterações e (d) 4×10^7 iterações. Observa-se-se, na figura abaixo, “uma seqüência de ampliações mostrando as camadas fractais típicas a atratores estranhos. A dimensão fractal associada é 1,265, sendo evidente o seu caráter auto-similar (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 93).

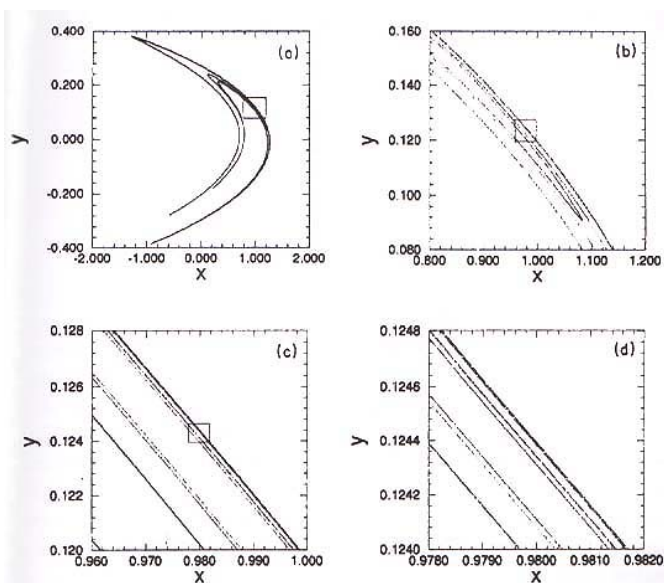


Figura 22: O atrator de Hénon

Fonte: STEWART, 1991, p. 167

Um exemplo de fractal com dimensão compreendida entre 0 e 1 é *conjunto de Cantor*, também conhecido como *poeira triádica de Cantor*. Esse fractal é construído a partir de um segmento de reta que é dividido em três partes de mesma medida, sendo eliminada a central. Repetindo esse processo indefinidamente, a supressão repetida das terças partes intermediárias tem como resultado um objeto geométrico que pode ser simploriamente descrito como sendo um segmento de reta esburacado, ou, como pontos alinhados.

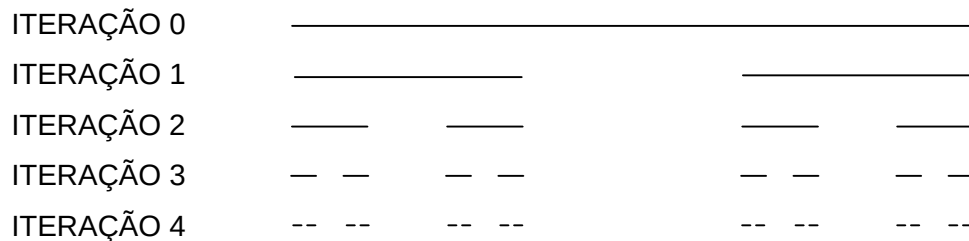


Figura 23: O conjunto de Cantor

“O conjunto de Cantor tem uma *dimensão não-inteira*. Com efeito, apesar de parecer constituir uma série de pontos (portanto de dimensão zero), existe uma estrutura subjacente. Sua estrutura está entre a reta e o ponto [...] tem uma dimensão fractal 0,6309” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 91, grifos dos autores). Mandelbrot (1991) esclarece que, variando a *regra de dissecção* são construídos diferentes conjuntos de Cantor e pode-se encontrar dimensões diferentes entre 0 e 1.

O *conjunto de Cantor* comparece, por exemplo, na *ferradura de Smale*, onde, inicialmente, a intersecção da reta $00'$ com S é um segmento; “depois da primeira iteração essa intersecção resulta em dois segmentos, quatro para a segunda iteração; 2^n segmentos para a n -ésima iteração. Identifica-se, portanto,[...] o aparecimento de uma estrutura do tipo Cantor” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 91).

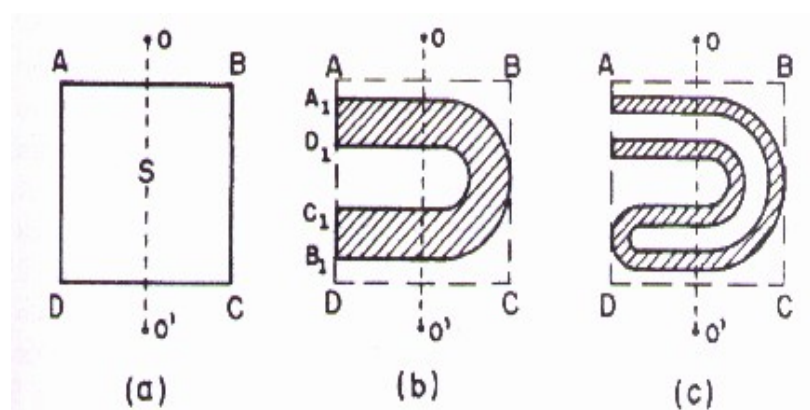


Figura 24: O conjunto de Cantor no mapa de Smale da ferradura

Fonte: FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 87

Na época em que trabalha na divisão de pesquisa pura da IBM (International Business Machines Corporation), Mandelbrot investiga o surgimento de flutuações espontâneas, denominadas *ruído*, na transmissão de informação por meio de linhas telefônicas. Foca seu interesse nas linhas destinadas à transmissão de dados entre computadores, isto é, aquelas que transmitem sinais que podem assumir apenas dois valores: 0 ou 1. “Uma função com diversos valores possíveis (o ruído) é substituída por uma função com dois valores: é igual a 0 se não houver erro e igual a 1 se houver” (MANDELBROT, 1991, p. 62). Percebia-se que o *ruído* surgia espontaneamente e que seu aparecimento, apagando sinais e gerando erro, era aleatório e acontecia de uma maneira denominada *cluster* na língua inglesa (Mandelbrot, 1977), traduzida por *amontoamento* para a língua portuguesa (Mandelbrot, 1991).

Mandelbrot apresenta um modo de descrever a distribuição desses erros, efetuando separações entre os períodos de transmissão bem sucedidos e aqueles que apresentavam rajadas de erros. Por exemplo, uma hora de transmissão perfeita poderia suceder uma hora de erros e Mandelbrot investiga a distribuição dos erros em intervalos de tempo cada vez menores. Constata que, dentro de qualquer seqüência de erros, por menores que fossem os períodos de tempo, sempre surgiam períodos sem erro, não acontecendo um período no qual os erros estivessem dispersos continuamente. Desse modo, identifica um padrão geométrico entre as seqüências de erros e os períodos de transmissão perfeita, em todas as escalas de tempo, de horas a segundos, apontando como sendo “o mais notável é que as distribuições de cada ordem de rajadas, quando comparadas com a ordem imediatamente superior, se revelaram idênticas do ponto de vista estatístico” (MANDELBROT, 1991, p. 63).

Mandelbrot (1997) aponta a semelhança de sua descrição do amontoamento de erros com a construção matemática denominada *conjunto de Cantor*, avaliando ser esse o primeiro problema concreto cuja abordagem demanda a utilização de fractais.

Para Mandelbrot (1991, p. 64-66), apenas a *poeira de Cantor aleatorizada* é útil para descrever a distribuição de erros em transmissões, uma vez que a *poeira de Cantor* original é um modelo simplificado das rajadas de erros, podendo-se

obter uma idéia grosseira da seqüência de erros que nos interessa executando a iteração cantoriana um número finito de vezes, [...] momento em que ela atinge segmentos iguais a uma pequena escala interna η correspondente à duração de um símbolo de comunicação [...] As insuficiências da poeira de Cantor, do ponto de vista prático, prendem-se com a sua excessiva regularidade.

Um exemplo da ocorrência do caos na área da Química, relacionado com o *conjunto de Cantor*, é “uma particular classe de reação química, as *reações de Belusov-Zhabotinsky* (B.Z.) [...] Interessantes e surpreendentes efeitos não-lineares são verificados

quando os reagentes da reação B.Z. são postos em contacto” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 206). Nessa reação acontece uma emergência de cores, alternando-se azul e vermelho: bilhões de moléculas, espontaneamente, em certo momento crítico, atuam como um todo, produzindo um alto grau de ordem. “Aparecem estruturas espaciais da forma de *anéis*, *espirais* ou de *ondas circulares concêntricas* (ondas químicas); observam-se também oscilações temporais com padrões mais ou menos complexos e, em determinadas condições, padrões caóticos” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 207, grifos dos autores).

Prigogine (1996, p. 70) considera que “hoje, muitas outras reações oscilantes são conhecidas, mas a reação de Belousov-Zhabotinski continua tendo uma importância histórica. Ela foi a prova de que a matéria longe do equilíbrio adquire realmente novas propriedades”.

Prigogine, Prêmio Nobel de Química, um dos pioneiros no estudo dos sistemas químicos auto-organizadores, investiga a estabilidade afastada do equilíbrio no fenômeno na convecção do calor conhecido como *instabilidade de Bénard*, um caso clássico de auto-organização espontânea. No início do século XX, Henri Bénard aquece uma fina camada de líquido e, com o aquecimento, o não-equilíbrio acontece pelo fluxo contínuo de calor através do sistema. Em certo momento crítico, milhões de moléculas se movem coerentemente, emergindo um padrão ordenado de formas hexagonais, semelhantes a favos de mel. As *células de Bénard* também ocorrem na natureza, quando o fluxo de ar quente da terra em direção ao espaço pode gerar vórtices de circulação hexagonais, que deixam seu padrão auto-organizador impresso nas dunas dos desertos e nos campos de neve árticos.

Prigogine desenvolve uma nova termodinâmica não-linear, em sistemas abertos afastados do equilíbrio, para descrever fenômenos onde, em certos pontos críticos, ocorre a emergência de padrões de auto-organização. Estruturas como as *células de Bénard* são de uma natureza diferente, sendo denominadas por Prigogine de *estruturas dissipativas*. “Prigogine cunhou o termo *estruturas dissipativas* para sublinhar a íntima interação que existe entre a estrutura, de um lado, e o fluxo e a mudança (ou dissipação), de outro” (CAPRA, 2002, p. 31, grifos do autor). Na sua teoria, as estruturas dissipativas se mantêm em um estado estável afastado do equilíbrio, mas também podem sofrer novas instabilidades e se transformar em novas estruturas mais complexas, uma vez que

a dinâmica dessas estruturas dissipativas caracteriza-se, em específico, pelo surgimento espontâneo de novas formas de ordem. Quando o fluxo de energia aumenta, o sistema pode chegar a um ponto de instabilidade, chamado de *ponto de bifurcação*, no qual tem a possibilidade de derivar para um estado totalmente novo, em que podem surgir novas estruturas e novas formas de ordem (CAPRA, 2002, p. 30, grifos do autor).

Se a amplificação da realimentação era vista como destrutiva na *Cibernética*, em Prigogine é fonte de nova ordem e complexidade. Se, na *Termodinâmica* clássica, a dissipação de energia era entendida como desperdício, a “concepção de Prigogine de uma estrutura dissipativa introduziu uma mudança radical nessa concepção ao mostrar que, em sistemas abertos, a dissipação torna-se uma fonte de ordem” (CAPRA, 1998, p. 82).

Nos escoamentos hidrodinâmicos, o fenômeno da *convecção de Rayleigh-Bénard* comparece nos experimentos em laboratório onde turbilhões de fluido são gerados entre dois cilindros coaxiais, por meio de aumento de temperatura, sendo que existe rotação no cilindro interno. Com o aumento da velocidade de rotação, observam-se diferentes estados: turbilhões estacionários, ondulação periódica de ondulações se propagando e comportamento caótico.

A esses fenômenos está associada uma estrutura fractal conhecida como *escada do diabo*, assim denominada porque existe um número infinito de degraus entre cada dois degraus. “Escadas do diabo são encontradas numa grande variedade de sistemas como: reações químicas de Belousov-Zabotinsky [...] sistemas hidrodinâmicos convectivos de Rayleigh-Bénard [...]” (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994, p. 169).

Na figura que segue encontra-se representada a *escada do diabo*, sendo que “o termo matemático oficial para designar a função $y=f(x)$ ilustrada nesta figura é *função de Lebesgue da poeira de Cantor*” (MANDELBROT, 1991, p. 72).

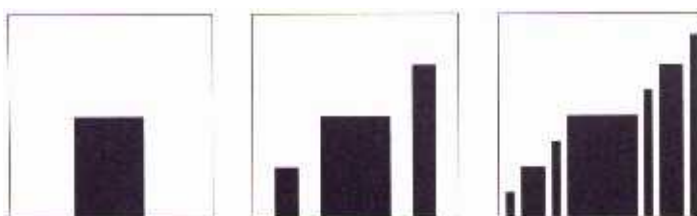


Figura 25: Iterações iniciais das colunas da escada do diabo

Fonte: PEITGEN; JÜRGENS; SAUPE, 1991, p. 245

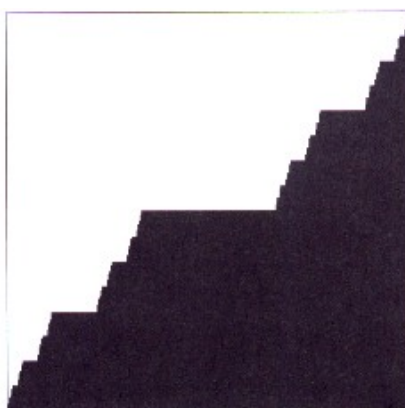


Figura 26: A escada do diabo (função de Lebesgue)

Fonte: PEITGEN; JÜRGENS; SAUPE, 1991, p. 245

Na categoria dos objetos matemáticos com dimensão entre 1 e 2 estão as *curvas de Peano*, assim denominadas porque a primeira é construída, em 1890, por Giuseppe Peano (1852-1943). Trata-se de uma curva que passa por todos os pontos de um quadrado. Um ano após, David Hilbert (1862-1943) constrói uma curva similar que, além de encontrar todos os pontos de um quadrado, não apresenta pontos de intersecção. Tais curvas são denominadas *patológicas* pelos matemáticos da época de sua criação, visto que, sendo linhas com dimensão euclidiana igual a 1 preenchem planos com dimensão 2.

Curvas que preenchem planos passam a integrar a *galeria dos monstros matemáticos*, exercendo forte impacto por serem contra-exemplos da matemática vigente e, após Mandelbrot, são entendidas como sendo *fractais*. Esclarece Mandelbrot (1991, p. 51) que “a expressão curva de Peano aplica-se genericamente a toda uma família de curvas patológicas que, entre 1890 e 1925, desempenharam um papel decisivo na elaboração do conceito de dimensão topológica”.

A construção da *curva original de Peano* tem início com um segmento de reta de comprimento l , a diagonal do quadrado que a curva preencherá. Essa etapa inicial é denominada *iteração 0*.

Na etapa seguinte, a *iteração 1*, o segmento inicial l é substituído por uma curva constituída por nove segmentos de reta consecutivos, cada um deles medindo a terça parte do segmento original. Na figura ao lado, os segmentos que compõem a curva foram enumerados de 1 até 9.

Objetivando evidenciar o padrão de construção da curva, setas indicam as rotações efetuadas. Os pequenos quadrados, enumerados de 1 a 9, sofrem as seguintes rotações: o segundo e o oitavo são girados 90° no sentido anti-horário, o quarto e o sexto sofrem rotação de 90° no sentido horário e o quinto pequeno quadrado sofre rotação de 180° .

Na *iteração 1*, obtém-se o comprimento total da *curva de Peano* multiplicando-se por nove a terça parte do segmento original, isto é, o comprimento total na *iteração 1* é $9 \cdot 1/3 \cdot l$, ou seja, $3 \cdot l$.

Na *iteração 2*, cada um dos nove segmentos de reta é substituído pelo padrão geométrico. Nessa etapa, cada um deles mede a nona parte do segmento inicial l . Na *iteração 2*, o comprimento total da *curva de Peano* é obtido multiplicando a nona parte do comprimento do segmento original l por 81.

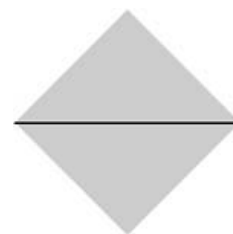


Figura 27: A curva de Peano – Iteração 0

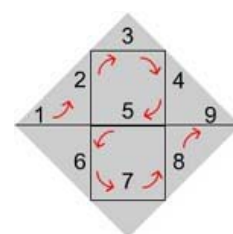


Figura 28: A curva de Peano – Iteração 1

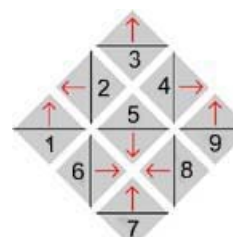
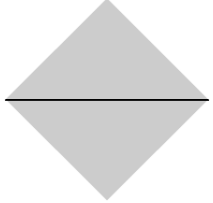
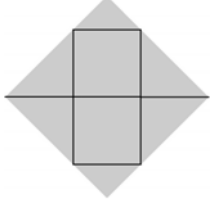
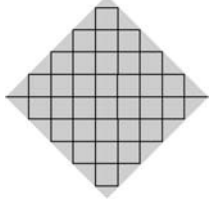
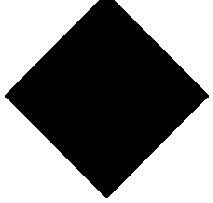


Figura 29: O padrão da curva de Peano

O quadro abaixo apresenta as primeiras iterações do processo de construção da curva de Peano:

Tabela 2: Primeiras iterações da *curva de Peano*

ITERAÇÃO	FIGURA	NÚMERO DE SEGMENTOS	COMPRIMENTO DE CADA SEGMENTO	COMPRIMENTO TOTAL DA CURVA	PROGRESSÃO GEOMÉTRICA
0		1	l	l	$3^0 l$
1		9	$1/3 \cdot l$	$9 \cdot 1/3 \cdot l$	$3^1 l$
2		81	$1/9 \cdot l$	$81 \cdot 1/9 \cdot l$	$3^2 l$
N		3^{2n}	$1/3^n \cdot l$	$3^{2n} \cdot 1/3^n \cdot l$	$3^n \cdot l$

Continuando o processo de iteração, a curva vai preenchendo um quadrado, cuja diagonal é o segmento inicial de comprimento l . À medida que aumenta a ordem da iteração o comprimento da curva aumenta indefinidamente, tendendo para o infinito. Na *iteração* n , o comprimento total da *curva de Peano* é dado por $3^n l$.

A construção da *curva de Hilbert* tem início com um quadrado que é dividido em quatro quadrados de mesma área, sendo determinados os seus respectivos pontos centrais. Nessa etapa, denominada *iteração 0*, a curva é constituída por três segmentos consecutivos cujos pontos extremos são os pontos centrais dos quadrados.

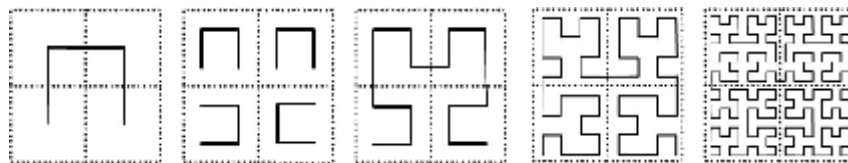


Figura 30: A curva de Hilbert

Na *iteração 1* cada um dos quadrados pequenos é substituído por quatro quadrados, sendo conectados os seus pontos centrais, conforme figura abaixo. Continuando o processo indefinidamente, a *curva de Hilbert* vai preenchendo a superfície de um quadrado sem que ocorram intersecções.

De modo similar, podem ser construídas curvas que preenchem cubos.

Na natureza encontramos estruturas que apresentam ramificações, tais como o sistema de artérias que proporciona a irrigação sangüínea dos órgãos humanos. Todos os pontos dos órgãos são alcançados pelo sistema arterial, de modo que cada célula é suprida com nutrientes e elimina resíduos através de redes capilares que preenchem volumes. Pesquisadores dessas áreas têm utilizado fractais, em suas descrições científicas.

Prusinkiewicz aponta a semelhança entre uma construção geométrica da família das *curvas de Peano* criada, em 1912, pelo matemático Waclaw Sierpinski e o *kolam* denominado *Serpente*. Ambas estão apresentadas abaixo:

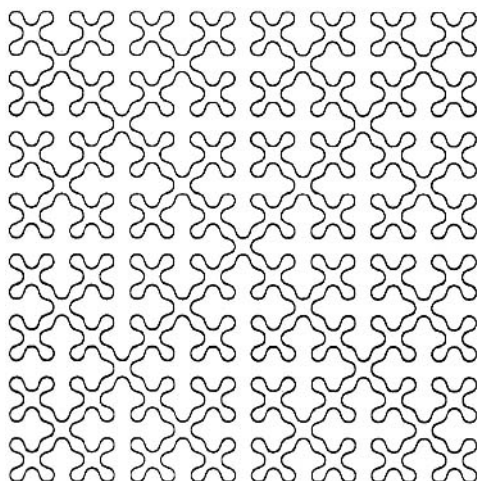


Figura 31: O kolam Serpente

Fonte: PRUSINKIEWICZ, 1989, p. 72

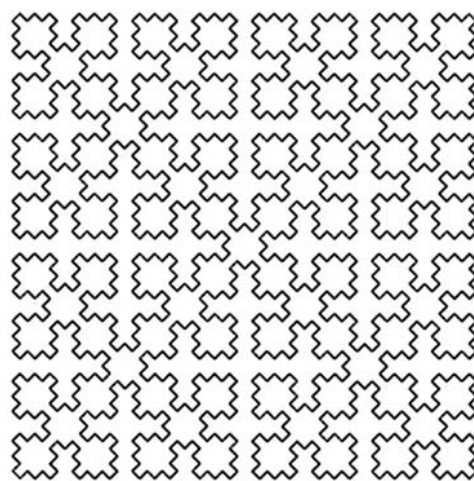


Figura 32: A curva de Sierpinski

Fonte: PRUSINKIEWICZ, 1989, p. 18

Kolam designa o trabalho artístico que decora os pátios em frente às casas na região de Tamil Nadu, localizada no sul da Índia. Ao raiar do dia, meninas e mulheres limpam a área com água e aplicam sobre o chão de barro umedecido uma pasta preparada com esterco de vacas, formando uma base escurecida sobre a qual é desenhado o *kolam*,

que embeleza a entrada da casa, tornando-a acolhedora e simbolizando boa sorte. Esta arte possui um profundo significado espiritual, uma vez que, pela tradição hindu, todas as substâncias da vaca são consideradas sagradas e purificadoras. A arte *kolam* tem origem remota, tendo sido desenvolvida há cerca de cinco mil anos. Nas famílias tradicionais, sucessivas gerações de meninas têm aprendido a arte *kolam* com suas mães, tias e avós. Desde a infância, as meninas são instruídas nesta arte, independente de sua casta e, um importante critério para a escolha de uma noiva, nas regiões rurais, consiste na sua habilidade em dominar esta arte. Tradicionalmente, um *kolam* é confeccionado com arroz em pó, servindo, do decorrer do dia, de alimento para pequenas aves e insetos.

A construção é iniciada com a elaboração de um padrão geométrico pontilhado, para então serem desenhadas retas e linhas onduladas. Originariamente, os padrões eram exclusivamente geométricos e progressivamente foram sendo criadas representações específicas para os dias festivos. Possuem diversos comprimentos, podendo ser encontradas linhas medindo centenas de metros, que apresentam diferentes níveis de complexidade. Um dos modos, raramente adotado, de cobrir uma grande área com motivos geométricos consiste em repetir um pequeno padrão muitas vezes. Sofisticadas estruturas são valorizadas, construídas pela conexão de pequenos elementos, sendo que o *kolam* ideal consiste em uma única linha ininterrupta.

Em termos matemáticos, construir um *kolam* equivale a utilizar estruturas recursivas, amplamente utilizadas nos processos computacionais relacionados com a ciência ocidental contemporânea. Na milenar arte *kolam* se revelam curvas fractais, pois “padrões *kolam* com crescimento exponencial estão intimamente relacionados com curvas que preenchem todos os pontos do espaço” (PRUSINKIEWICZ, 1992, p. 75, tradução nossa⁶).

Um litoral pode ser considerado como exemplo de fractal encontrado na natureza, com dimensão entre 1 e 2, onde pode ser observada uma mesma estrutura se repetindo em todas as escalas. Cada parte de um litoral, ampliada ou reduzida, revela uma similaridade estatística. Mandelbrot (1977) analisa as pesquisas efetuadas por Richardson, em diferentes enciclopédias, sobre medidas dos comprimentos da fronteira entre países. São constatadas diferenças relativas à extensão entre Espanha e Portugal (987km versus 1214km) e também entre Holanda e Bélgica (380km versus 449km). Mandelbrot atribui tais diferenças ao fato das medidas terem sido efetuadas por meio da escolha de escalas diferentes, uma vez que essas modificações fornecem resultados diferentes.

Se forem consideradas as várias reentrâncias e saliências realmente existentes em uma costa litorânea, uma medida pode ser efetuada com sucessivos segmentos de reta.

⁶ *kolam* patterns with exponential growth are closely related to space-filling curves

Sendo diminuídos os comprimentos desses segmentos, o comprimento do litoral tende para o infinito. A escolha de um valor numérico ε não oferece a possibilidade de comparação entre o grau de irregularidade das diversas costas litorâneas, não informando se um certo litoral é menos irregular que outro.

Por outro lado, Mandelbrot (1977, p. 27, tradução nossa⁷) não aceita a escolha de um número fixo ε , por entender que a “Natureza não existe separada do Homem [...] O conceito de comprimento geográfico [...] não é completamente objetivo. O observador inevitavelmente intervém na sua definição”.

A reflexão de Merleau-Ponty (2000, p. 160⁸) analisando o *conceito de escala*, que se instala na ciência a partir da introdução da *constante de Planck*, converge com a visão de mundo relacionada com a teoria dos fractais, pois a noção de *escala* demanda a concepção de um *sujeito encarnado*.

Para Mandelbrot, a curva proposta por Niels von Koch é um modelo muito rudimentar de litoral, ou seja, um modelo matemático preliminar para modelar costas litorâneas, que se torna mais adequado quando é construído com técnicas envolvendo aleatoriedade.

O *fractal de Koch*, ou *ilha de Koch*, também é conhecido como *floco de Neve*, pois sua construção se assemelha ao processo que forma um floco de neve na natureza. No interior surge um conjunto simétrico de seis cristais de gelo e de cada um deles emergem novos cristais. A construção da *ilha de Koch* inicia com um triângulo equilátero de lado l . Cada um dos seus lados é dividido em três segmentos de mesma medida, são retirados os segmentos centrais e acrescentados triângulos equiláteros de lado $l/3$. Novamente toma-se o terço médio de cada segmento de reta da figura resultante e sobre estes são construídos novos triângulos, de lado $l/9$. E assim, indefinidamente.

À medida que o processo iterativo continua, a *ilha de Koch* assume um aspecto cada vez mais denteado. É uma curva infinitamente longa que contém uma área finita, inscrita em um hexágono regular.

Quando partes do objeto são exatamente semelhantes ao todo, diz-se que o objeto apresenta auto-similaridade linear. No entanto, os fractais mais importantes divergem da auto-similaridade linear. Alguns destes fractais são gerados por um processo randômico, enquanto que outros são fractais que podem descrever sistemas caóticos, ou não-lineares [...] (MANDELBROT, 1992, p. 125, tradução nossa⁹).

⁷ Nature does exist apart from Man [...] The concept of geographic length [...] is not entirely *objective*. The observer inevitably intervenes in its definition.

⁸ Ver p. 40 desta tese

⁹ When parts of the object are exactly like the whole, the object is said to be linearly self-similar. However, the most important fractals deviate from linear self-similarity. Some of these fractals are generated by a random process, while others are fractals that can describe chaotic, or nonlinear systems

Nos dizeres de Mandelbrot (1977, p. 40, tradução nossa¹⁰), “a curva de Koch lembra um mapa, mas apresenta os maiores defeitos encontrados em quase todos os primeiros modelos [...] Suas partes são idênticas umas às outras [...] Assim, a curva de Koch é um modelo muito preliminar de litoral costeiro”.

Entre os fractais com dimensão compreendida entre 1 e 2 encontra-se o *triângulo de Sierpinski*, cujo perímetro é constante e cuja área tende para zero.

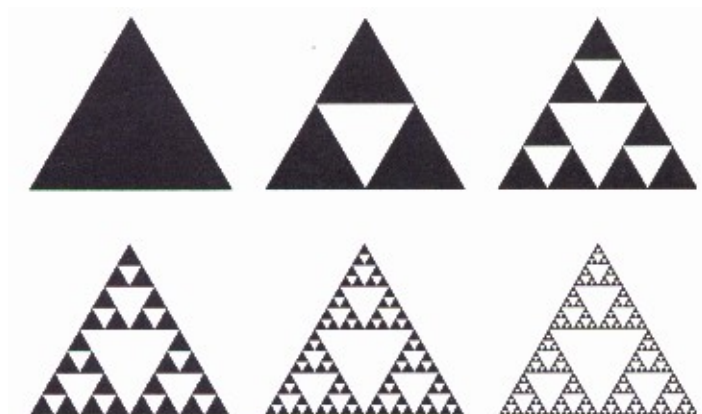


Figura 33: Iterações iniciais do *triângulo de Sierpinski*

Fonte: PEITGEN; JÜRGENS; SAUPE, 1991, p. 92

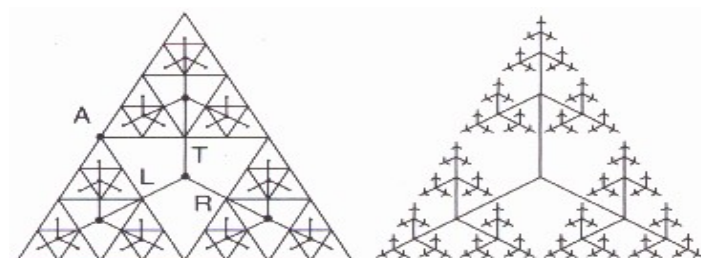


Figura 34: A estrutura do *triângulo de Sierpinski*

Fonte: PEITGEN; JÜRGENS; SAUPE, 1991, p. 94

Estruturas fractais também são utilizadas em obras arquitetônicas. Mandelbrot (1977, p. 131, tradução nossa¹¹) considera que “(bem antes de Koch, Peano e Sierpinski) a torre que Gustave Eiffel construiu em Paris deliberadamente incorpora a idéia de uma curva fractal cheia de pontos ramificados”. A Torre Eiffel é constituída por quatro estruturas em forma de A. Eiffel teria escolhido a letra A para expressar o amor pelo seu trabalho. Uma seqüência ascendente de estruturas interconectadas é formada por elementos auto-

¹⁰ The Koch curve reminds us of real maps, but has major defects one encounters almost unchanged in the early models [...] Its parts are identical to each other [...] Thus, a Koch curve is a very preliminary model of coastline.

¹¹ (well before Koch, Peano, and Sierpinski) the tower that Gustave Eiffel built in Paris deliberately incorporates the idea of a fractal curve full of branch points

similares, que se repetem em escalas cada vez menores. Assim construído, o monumento é mais leve e resistente.

Pode ser observado que o princípio utilizado na construção da torre Eiffel é similar às idéias de Sierpinski. Analisando a obra de Cézanne, Düchting (1999, p. 106) constata convergências entre o projeto arquitetônico de Eiffel e o estilo do artista, que cria

uma composição ordenada de forma compreensível e refletida, a qual, em vez de ocultar a sua construção, antes a revela, à semelhança das construções de ferro e vidro que se pode admirar em Paris, ou ainda da maravilha da técnica da época: a Torre Eiffel, um símbolo da era moderna.

Trata-se de concepções que emergem, no início do século XX, na Matemática, na Arquitetura, na Arte, relacionadas com a busca pelo modo como tudo se mantém imbricado numa totalidade integradora.

No estudo dos fractais, a utilização de novos instrumentos é salientada por Mandelbrot (1991, p. 215), que trata da

importância dos *novos* instrumentos que são o olho e o computador [...] *Visual* é aqui uma palavra-chave, pois a expressão *geometria fractal* utiliza o termo *geometria* num sentido arcaico, que implica imagens concretas e reais. Frequentemente [...] a utilização de cores vivas é um precioso auxílio (grifos do autor).

Considerando a *História das Ciências*, Mandelbrot (1991, p. 216) lembra Lagrange e Laplace, que

se vangloriavam da ausência de imagens nas suas obras [...] os iconoclastas persistiram, até o ponto de dominarem a matemática e mesmo muitas das ciências [...] Hoje, a geometria fractal é um dos motores de uma renovação viva contra essa corrente [...] A nova tendência geométrica resulta da eclosão de um novo instrumento, que é, evidentemente, o computador, e do regresso em força de um instrumento muito antigo que se encontrava subaproveitado, que é o olho humano.

Uma dos mais belos objetos matemáticos é criado por Mandelbrot a partir dos trabalhos elaborados por Gaston Julia e Pierre Fatou sobre análise complexa. Ambos investigaram a *iteração* de funções complexas entre 1918 e 1920. Mandelbrot (1991, p. 222) registra o seu

privilegio de enriquecer a teoria de Fatou-Julia com uma nova janela, propondo [o] Conjunto de Mandelbrot [...] procedi de uma forma afastado da do teórico, mais próxima da do explorador e do naturalista, inebriados pela visão de um mundo prestes a ser descoberto. Percorri-o, contemplei-o e dissequei-o, graças ao espantoso equivalente do microscópio, que é um computador programado para se observar um domínio cada vez menor de uma forma cada vez mais pormenorizada. [...] A intuição forma-se pouco a pouco, a imaginação inspira-se, o olho torna-se um guia cada vez mais seguro. Realizei esse trabalho em 1979-1980, quando já usufruía de dez anos de prática quotidiana da interação entre o pensamento e o instrumento através do olho.

Retomando a teoria de Fatou-Julia por meio de recursos computacionais, Mandelbrot itera a equação $x_{n+1} = x_n^2 + c$ utilizando números complexos. Desse modo, obtém o denominado *conjunto de Mandelbrot*, apresentado nas figuras que seguem.

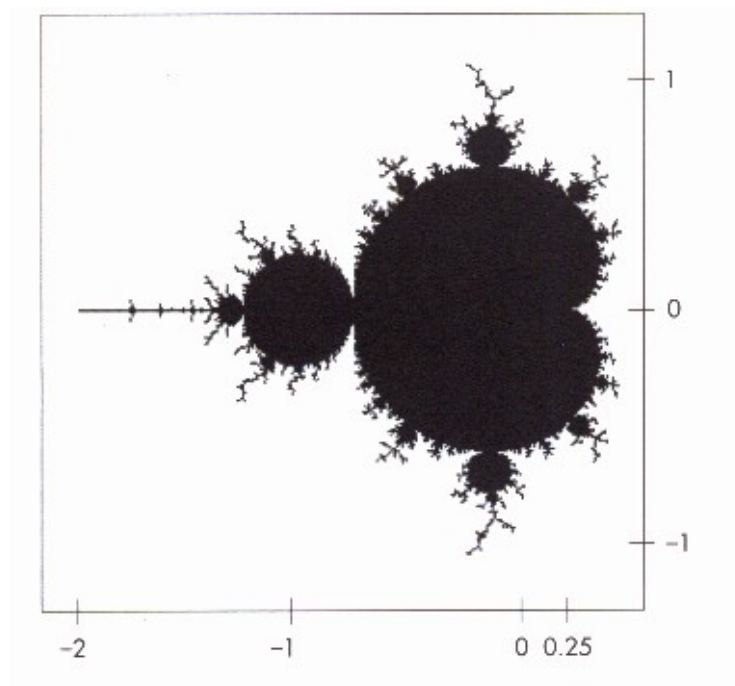


Figura 35: O conjunto de Mandelbrot

Fonte: DEVANEY, 2000, p. 97



Figura 36: O conjunto de Mandelbrot ampliado

Fonte: HALL, 1992, [n. p.]

Mandelbrot atribui um novo título para uma ilustração da *Bible Moralisée*, escrita entre de 1220 e 1250: “Aqui Deus cria círculos, ondas e fractais”, explicitando o objetivo de seu trabalho:

Nós percebemos três tipos diferentes de formas neste mundo recentemente criado: círculos, ondas e ondulações. Os estudos de círculos e ondas se beneficiaram de investimentos colossais do esforço do homem, e eles formam o próprio fundamento da ciência. Em comparação, as *ondulações* foram deixadas quase que totalmente intactas. O objetivo do presente Estudo é encarar o desafio de se construir uma Geometria Natural de certas *ondulações* denominadas fractais (MANDELBROT, 1977, p. 277-C2, grifos do autor, tradução nossa¹²).



Figura 37: Aqui Deus cria círculos, ondas e fractais
 Fonte: MANDELBROT, 1977, p. 277

¹² We perceive three different kinds of form in this newly created world: circles, waves, and *wiggles*. The studies of circles and waves benefited from colossal investments of effort by man, and they form the very foundation of science. In comparison, *wiggles* have been left almost totally untouched. The goal of the present Essay is to face the challenge of building a Natural Geometry of certain *wiggles* to be called *fractals*.

6 COMPREENDENDO O PENSAMENTO SISTÊMICO E A EDUCAÇÃO COMO POÍESIS

6.1 EM BUSCA DE UMA SÍNTESE, AINDA QUE DE TRANSIÇÃO

Um amplo olhar, abrangendo os conteúdos matemáticos usados desde os primórdios da ciência moderna até a ciência contemporânea, norteia a construção de dois textos, em forma de esquema, apresentados a seguir.

O primeiro é elaborado pelo matemático Stewart (1991, p. 161), enfocando a mudança na sustentação geométrica da produção da ciência: da euclidiana, fundamento da ciência moderna, para a topológica, ligada com a ciência contemporânea norteadas pelo pensamento sistêmico:

Dinâmica tradicional:

- Ficar quieto
- Girar indefinidamente

A ciência destilada, ao longo de cinco séculos, até sua essência geométrica. Qual é a essência geométrica do caos?

- Estique e dobre

O segundo esquema, construído por Merleau-Ponty (2000, p. 333), registrado apenas como uma nota encontrada na sua mesa de trabalho, revela suas intenções de refletir sobre a Matemática, não efetivadas em função de sua morte trágica:

O ser euclidiano = por oposição ao ser topológico ou de envolvimento, é o ser projetivo - projetivo - causal = por oposição ao ser individuado na série temporal e no espaço de exterioridade mútua, é o Ser estatístico, coletivo.

O modo de *ser euclidiano* permeia a produção da ciência moderna, enquadrado nas três dimensões rígidas da *Geometria Euclidiana*, entendida como sendo a única existente. Esse modo de ser comparece, como expressão artística no Renascimento, na técnica da perspectiva, onde o homem se encontra aquém da natureza, dela desligado por meio de linhas *projetivas* que marcam as posições dos corpos, afirmando a separação entre o homem e as coisas que observa. Nessas linhas de projeção, cada ponto ocupado pelos corpos existe em um tempo fixo, separado dos próximos tempos, marcados nos planos que se sucedem. Nesse contexto, a natureza é entendida como um bloco tridimensional, constituído pelo somatório de todos os objetos que nela estão dispostos, em seus lugares bem determinados e com fronteiras bem definidas. É um modo de *ser causal*, pois cada

objeto está conectado com outras peças, como uma máquina, onde tudo o que acontece possui uma única causa que desencadeia um efeito matematicamente previsível.

Nos dizeres de Merleau-Ponty (2000, p. 344), em seu estudo da natureza por meio do movimento da ciência:

a superação do pensamento euclidiano do espaço tem uma significação ontológica: um espaço diante de nós (projetivo) cede lugar a um espaço onde estamos, posto que é tão somente métrica do mundo físico. A superação da causalidade como produção de ser, do ser corpuscular como núcleo absolutamente duro, a favor do ser estatístico (sem processos de causalidade individualizados) e coletivo, também tem uma significação ontológica: recusa do puro objeto.

Com a produção da ciência contemporânea, comparece o modo de ser *topológico*, de *envolvimento*, sendo o homem entendido como *um ser estatístico sem processos de causalidade individualizados*. No pensamento sistêmico, que permeia a construção da ciência contemporânea, a ligação homem/mundo não é entendida como sendo linear com relações do tipo causa/efeito previsível, mas sim, não-linear, onde feixes de possibilidades emergem nas redes. A ciência contemporânea vai além da mensuração e da quantificação de objetos, entendidos como puras coisas, para procurar padrões e relações estabelecidas em complexas redes de possibilidades. O espaço deixa de ser entendido como soma de partículas materiais duras, segundo a concepção newtoniana, para ser compreendido como o mundo onde vivemos, onde a aleatoriedade é presença, onde possibilidades acontecem e escolhas são feitas.

Vários artistas, filósofos e cientistas criticam a tendência de reduzir o homem a um objeto completamente separado de outros objetos, apontando as deficiências da visão de mundo mecanicista impregnada no mundo ocidental. Martins (1992, p. 22) analisa as reflexões de Kierkegaard e Nietzsche, os quais consideram o “afastamento do homem de uma relação mais significativa com o mundo, que falar do homem contemporâneo é falar de um ser alienado, anônimo, vivendo num universo sem significados, de um homem que está em desespero”.

É procurado, por diversos pensadores, um entendimento mais abrangente do homem e do mundo e nessa busca por um clarear emerge um “clima novo que *recupera a subjetividade* do homem através da fenomenologia [...] Rompe-se, então, a dicotomia cartesiana sujeito/objeto” (MARTINS, 1992, p. 5). Recuperando a subjetividade humana, a fenomenologia considera o *outro* na constituição da própria subjetividade, estabelecendo-se uma ligação por meio do diálogo. No mundo da escola, a possibilidade do estabelecimento de tal ligação demanda que o professor se disponha a *ser-com* o aluno e com os conteúdos trabalhados.

Considerando que a consciência sempre se dirige para algo ou alguém, no caso em tela o aluno, o trabalho principal do professor deverá ser o de propiciar essa correlação [...] do que resultará um ato de compreensão, condição fundamental para que se dê a produção do conhecimento (MARTINS, 1992, p. 71).

Analisando os modos básicos de ser e de existir no mundo, Heidegger

situa a compreensão (*verstehen*) como sendo uma condição humana para a existência. Coloca-a *equiprimordialmente* à afetividade (representada pelos sentimentos, o sentir) e à expressão ou articulação do discurso. É, portanto, essencial à existência do homem que ele esteja sempre atribuindo significados, descobrindo, analisando, pensando (MARTINS, 1992, p. 78, grifos do autor).

Educar, assumindo a postura fenomenológica, implica em procurar o estabelecimento da intersubjetividade, por meio do diálogo, buscando pela compreensão dos significados individualmente atribuídos pelos indivíduos para uma dada situação. Nessa postura, no mundo da Educação, é importante privilegiar a atribuição de significados às teorias, às expressões artísticas, literárias, históricas, enfim, ao mundo onde vivemos. É importante que as atividades sejam dirigidas de modo que o sentido se faça para o aluno, gerando compreensão, interpretação e comunicação de maneira que significados sejam atribuídos. “Ao trabalhar fenomenologicamente no âmbito da educação escolar, a postura é a de buscar pelo sentido e pelo significado do que se faz e do que se escolhe” (BICUDO, 1999, p. 13).

O *lebenswelt*, termo empregado por Husserl, traduzido por *mundo-da-vida* ou *mundo-vida*, quando considerado na ação educativa, conduz ao entendimento de que o aluno possui um mundo que lhe é próprio. Não se trata de um mundo teorizado, mas sim, daquele onde vivemos com os *outros*, o mundo histórico-cultural. Um dos modos de estabelecer tal movimento “está na descrição para os outros indivíduos da percepção que cada um tem do mundo que o cerca, na descrição que os alunos fazem dos seus mundos, os quais precisam, necessariamente, ser lidos e conhecidos pelos professores” (MARTINS, 1992, p. 74).

No movimento fenomenológico, a essência humana em sua plenitude reside em *estar-no-mundo-com-os-outros*, expressão que é uma das possíveis traduções da palavra alemã *Dasein*, empregada por Heidegger. Adotar essa postura na Educação, não significa abandonar a realização de planejamento pedagógico, mas sim, assumir a impossibilidade de previsão e controle absolutos, pois

ao se pensar o currículo como algo a ser planejado, é preciso ter em vista que educação é o resultado de estar-no-mundo com os outros e com as entidades e nesta situação não há possibilidade de realizar-se um planejamento para o aqui e agora. O próprio cotidiano de sala de aula não se restringe àquilo que o professor ensina ou pensa. Há na sala de aula,

juntamente com o ensino do professor, operando no crescimento total dos alunos que aí estão, o mundo ao redor (MARTINS, 1992, p. 46).

Educar, segundo a postura fenomenológica, é possibilitar ao aluno a atribuição de significados, sendo que

a idéia de currículo abarca o entendimento de que é necessário abandonar a busca da causalidade das coisas e recuperar uma idéia de consciência subjetiva capaz de atribuir significados. Que significados? Os significados do mundo das crianças que estão sendo educadas (MARTINS, 1992, p. 80).

Enquanto que, na postura mecanicista, o mundo é descrito por leis que relacionam causas e efeitos, na postura fenomenológica, “o mundo-vida de cada um de nós, ou o *lebenswelt*, tem uma estrutura de significados que lhe é própria e que precisa ser focalizada de diferentes formas, para que não seja radicalmente reduzida, distorcida e proposta em termos de causalidade” (MARTINS, 1992, p. 67).

Na atualidade, quando se dissemina a compreensão de que nosso planeta está agonizante e se reconhece que o ser humano, ao deixar de ser *cuidado*, está ameaçado, a postura fenomenológica apresenta-se como outra possibilidade de ver o homem e o mundo. Com as descobertas da ciência moderna e o conseqüente desenvolvimento de tecnologia, instaura-se o objetivo do máximo controle de tudo. Para a pergunta fundamental “O que é o homem?” a resposta predominante é “estar no controle da natureza”. Apontando a ameaça que paira sobre o homem, frente às suas práticas predatórias, reflexo da crença na existência de recursos naturais ilimitados, Heidegger afirma que a essência do homem é *cuidado*. Na fenomenologia, educar envolve o

cuidado (sorge), que significa zelo em não permitir que os talentos permaneçam emperrados, de forma oxidada, ou seja, que não venham a se expressar [...] que a partir do conhecimento e dos sentimentos sejam formadas atitudes, que como um todo deverão fluir harmoniosamente para a abertura do Ser em sua plenitude (MARTINS, 1992, p. 75).

No enfoque fenomenológico,

considerando-se educar como *cuidado* para que o ser possa viver na plenitude de sua existência [...] o Currículo deverá ser enfatizado como construção cultural, pois toda cultura se caracteriza por ter acumulado, no processo de seu desenvolvimento histórico, um acervo de conhecimento (MARTINS, 1992, p. 76, grifo do autor).

Assim, neste modo de ver, o currículo é entendido como um caminho a ser percorrido, onde possibilidades são percebidas e escolhas são feitas. Joel Martins propõe uma nova abordagem do Currículo, visto como *poíesis*, um recriar interminável e sempre inacabado, uma vez que o ser humano, entendido como um “ser de possibilidades, necessita construir-se em sua humanidade, o que se realiza através do ato de educar propriamente dito” (MARTINS, 1992, p.76).

Cada ser humano está sempre engajado no processo de educação e no prosseguir para além do seu estado natural, pois o mundo no qual cresce e se desenvolve é um mundo constituído de linguagem, de costumes e de corpo de conhecimentos. É nesse mundo que os indivíduos assumem a sua existência. A educação, nessa perspectiva, não é apenas um processo de elevação histórica da mente, do natural para o universal, mas é a condição na qual o homem se humaniza (MARTINS, 1992, p. 77).

Entendendo-se como um *ser-no-mundo-com-os-outros*, o professor

usará de todos os recursos que os alunos possuem, partindo de uma leitura do mundo deles, projetando possibilidades. É esse poder de produzir instrumentos, imaginar situações que se constitui na premissa básica de Currículo numa visão fenomenológica (MARTINS, 1992, p. 80).

Empenhando-se continuamente em projetos, "emerge uma relação do *eu posso* com as maravilhas que tem o poder de suscitar. É preciso que meu próprio corpo esteja engrenado no mundo visível" (MERLEAU-PONTY, 1989, p. 194, grifo do autor). Ao sentir o mundo, o ser humano constrói e reconstrói seu plano, realiza ações, escolhe, reflete, sendo que o

pro-jeto humano é o que lança à frente as possibilidades do humano atualizar-se na dimensão do tempo vivido [...] Pro-jeto que se estende no fazer e no transfazer de cada um individualmente e de todos em conjunto, onde o individual e o coletivo não encontram limites divisórios, mas se interpenetram, formando redes interconectadas (BICUDO, 1996, p. 2).

Para Joel Martins, educação é poesia, palavra que, no seu sentido original, significa *ato de poder e de fazer*. Para os gregos, o fazer e o habitar o que foi construído, constitui a *poíesis*, que envolve uma criação, um pensar, um construir. É esse o sentido que Heidegger adota quando "põe em evidência que *habitamos aquilo que construímos* [...] Este habitar é a maneira pela qual os seres mortais estão na terra, desdobrando-se num construir que cultiva as coisas que crescem [...] Resgatar na educação o sentido de *poíesis* exige que a subjetividade humana se torne visível e que as instituições estejam aí auxiliando na possibilidade de transformação deste ser-aí" (MARTINS, 1992, p. 88, grifos do autor).

Green e Bigum (2003) constataam a emergência de um novo tipo de subjetividade humana, explorando a tese de que está surgindo uma nova geração, com uma constituição radicalmente diferente. Sua pesquisa se orienta pela pergunta *Estão as escolas lidando com estudantes fundamentalmente diferentes dos/as de épocas anteriores?* Constatam a emergência do sujeito-estudante pós-moderno com novas necessidades e novas capacidades. De forma provocativa utilizam termos da ficção científica, se aproximando das palavras que estão no mundo-vivido pelos jovens. A partir da interrogação *Existem alienígenas em nossas salas de aula?*, conjecturam que os estudantes podem estar vendo seus professores como alienígenas. Por outro lado, consideram que pais e professores entendem os jovens como alienígenas. Constatam, em diversos países, uma crescente

onda de pânico relacionado com a incerteza de acontecer a tradicional passagem da adolescência para uma ordeira vida adulta, sendo considerada a possibilidade de que “eles/elas não estão apenas nos visitando, indo embora, em seguida. Eles/elas estão aqui para ficar e estão assumindo o comando” (GREEN; BIGUM, 1995, p. 212). Para esses investigadores, cabe aos educadores levar em consideração que, nas salas de aula, “os/as alienígenas entram e tomam seus assentos, esperando (im)pacientemente suas instruções sobre como herdar a terra” (idem, 1995, p. 218).

Na visão desses pesquisadores, o novo tipo de subjetividade humana que está se formando, se encontra imersa em novas tecnologias de texto, de imagem e de som. Pela mídia, pela televisão e pela internet o jovem vive intervalos curtos de atenção, momentos desconectados que não formam uma progressão contínua. Poderíamos acrescentar a esse raciocínio, que o jovem vive não em tempo linear, mas em tempo fractal. Para Green e Bigum a juventude vive em muitos lugares e em diversos contextos, acessando virtualmente a distribuição de imagens e informações e conectada aos jogos computacionais. Por outro lado,

aqueles de nós que fomos condicionados toda a nossa vida a *pensar como um livro* usualmente ignoramos, desprezamos, ou simplesmente não podemos compreender aqueles que podem aprender a pensar e a expressar seus pensamentos através de imagens holográficas em movimento (DATOR apud GREEN; BIGUM, 1995, p. 230, grifos dos autores).

Trazendo da ficção científica a concepção de organismo cibernético, misto de máquina e humano, Green e Bigum entendem que termos como *cyborg* emergem para dar conta das íntimas ligações que os humanos têm com suas tecnologias.

Numa era na qual a tecnologização da natureza e a naturalização da tecnologia apagaram antigas e confortadoras fronteiras, têm emergido novos descritores para dar conta das íntimas associações que os humanos têm com suas tecnologias. [...] Termos como *cyborg* ou *alienígena*, bem como novos quadros discursivos, são necessários para se começar a lidar com as complexas interações que localizam a educação no contexto de uma ecologia digital (GREEN; BIGUM, 1995, p. 229, grifos dos autores).

Cada geração *cyborg* possui características próprias, inerentes ao mundo digital onde se encontram imersas e existem mundos

que estão aparentemente fora do alcance de *cyborgs* mais velhos, mas no interior dos quais os/as jovens *cyborgs* estão ocupados, nesse exato momento, na tarefa de moldar e fabricar suas identidades. As escolas podem perfeitamente se tornar locais singulares, como mundos próprios nos quais *cyborgs* geracionalmente diferentes se encontram e trocam narrativas sobre suas viagens na tecno-realidade desde que nós nos permitamos reimaginá-los e reconstruí-los de uma forma inteiramente nova, em negociação com aqueles que um dia tomarão nosso lugar (GREEN; BIGUM, 1995, p. 240).

O mundo onde vivemos, hoje, é um mundo de imagens, sons e movimento, marcado pela virtualidade. É uma imbricação de mundo da natureza, mundo da informática e mundo das relações humanas e de suas organizações. Não são mundos separados e a sua totalidade é sentida no cotidiano, onde diferentes modos de ser chegam a se chocar, dado o estranhamento. Tal contexto demanda diferentes compreensões das ligações entre “tecnologias e pedagogias, escolarização e cultura da mídia. Apenas agora estamos começando a registrar a importância educacional e cultural da *imagem* como um novo princípio organizacional para as relações sociais e as subjetividades” (GREEN; BIGUM, 1995, p. 221, grifo nosso). Onde a importância de valorizar, nos conteúdos escolares, os aspectos qualitativos da Matemática, relacionados com *padrões visuais* e ligados com a Arte.

A visão de mundo mecanicista conduziu à fragmentação das disciplinas escolares, estabelecendo-se contornos bem definidos entre as diversas áreas do conhecimento. O estudo de objetos fractais possibilita o apagamento dessas fronteiras, uma vez que se situam numa zona de transição entre a investigação científica e a artística, também possibilitando ligações entre os conteúdos da Matemática e os demais temas do currículo do Ensino Básico.

As imagens virtuais aparecem em diversos contextos. Para os jovens, elas comparecem no cotidiano com muita intensidade, nos jogos de vídeo game, nas diversões eletrônicas, nos filmes de ficção científica. Em contraposição, esses jovens encontram, na escola, as fórmulas matemáticas e a *Geometria*, tanto a *Euclidiana* como a *Analítica*, destituídas de cor e movimento.

Existe, portanto, um descompasso entre o que é trabalhado na escola e a realidade vivida pelo aluno e os conceitos da ciência contemporânea. Isto porque a abordagem dos conteúdos matemáticos, na escola, é aquela alinhada com o movimento da construção da Matemática, a partir do século XVII, quando gradativamente são abandonadas as imagens, substituídas pelas fórmulas, sendo priorizado o aspecto quantitativo da Matemática. Com Poincaré, inverte-se esta tendência, quando, ao buscar na Matemática qualitativa ferramentas para trabalhar suas indagações, se defronta com o que hoje conhecemos como caos. Tais ferramentas matemáticas são complexas, o que torna difícil a abordagem das concepções da ciência contemporânea no Ensino Básico. Uma possibilidade reside no estudo de conceitos básicos da teoria dos fractais e suas ligações com a teoria do caos.

A abordagem dos fractais possibilita a valorização das imagens, permitindo que se articule o currículo da Matemática tanto com o mundo dos alunos, como também com o mundo da ciência. Com o primeiro, por serem os fractais utilizados na elaboração de cenários virtuais de jogos computacionais e de filmes de ficção científica e, com o segundo por constituírem a Geometria do Caos, sendo utilizados na descrição qualitativa dos

sistemas dinâmicos caóticos. Desde o primeiro contato dos alunos com a Geometria, no Ensino Básico, pode ser estabelecido o *nexo* Geometria Fractal – produção da ciência contemporânea.

A palavra *nexo* é aqui utilizada como sinônimo de “ligação, vínculo, união” (FERREIRA, 1997). É o termo empregado por Merleau-Ponty (2000, p. 332¹) quando reflete sobre a Natureza por meio do movimento da construção da ciência: “O que buscamos é o *nexus* [...] Não se trata mais de ordenar as nossas razões mas de ver como tudo isso se *mantém junto*”. Trazendo esses dizeres para o mundo da Educação Matemática: com a adoção de uma atitude pedagógica alinhada com a Fenomenologia e com a concepção sistêmica busca-se pelo *nexo*, pela *ligação* dos conteúdos matemáticos com o mundo dos alunos, com o mundo da ciência contemporânea e com as demais disciplinas do currículo escolar.

6.2 POSSIBILIDADE E URGÊNCIA DE TRABALHAR A GEOMETRIA FRACTAL COMO NÚCLEO DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

No contexto desta investigação, a postura mecanicista com ênfase no aspecto quantitativo da Matemática, que norteou a construção da ciência moderna, é entendida como *ameaça* pela visão estreita que foi instaurada, pelo fato de suas teorias terem sido aceitas como únicas e pelos riscos ecológicos que a postura decorrente da lógica cartesiana, que subjaz a esta ciência, representa.

Não é possível nem esperado que se rejeite a ciência moderna, quer seja na região do pensamento científico, quer seja no currículo escolar. Não podem ser negados os recursos que esta ciência trouxe para a compreensão de aspectos da realidade, para a concepção de rigor nas investigações, para a precisão e exatidão dos processos de produção industriais e para o tratamento de questões do próprio cotidiano. Nas relações político-econômicas sua presença embasa as decisões e sustenta explicações e previsões. No entanto, também é uma ameaça.

No mundo onde vivemos, sentimos a ameaça inerente nas instabilidades contínuas e constantes. Percebemos que mínimas variações em nossos movimentos podem levar a consequências imprevistas. Com a emergência do pensamento sistêmico, pesquisadores de várias áreas da ciência se dão conta de que a concepção de mundo mecanicista é inadequada para o entendimento de problemas que não podem ser entendidos

¹ Ver p. 63 desta tese

isoladamente, que estão ligados e interdependentes. As pesquisas científicas contemporâneas têm revelado que alguns sistemas exibem *sensibilidade às condições iniciais*, sendo que pequenas variações podem produzir efeitos catastróficos.

No entanto, na escola, os conteúdos matemáticos são trabalhados de um modo que apresenta o mundo como sendo regular e completamente previsível. Tal postura se alinha com a visão de mundo que permeia a construção da ciência moderna, quando dissemina-se o entendimento de que tudo no universo poderia ser previsto, que toda causa produziria um efeito previsível por meio de leis. Desse modo, impregna-se a aceitação da existência de relações lineares da causa ao efeito entre todos os fenômenos da natureza. Na atualidade, frente à ameaça que a postura mecanicista representa, torna-se urgente a incorporação nos currículos da Matemática do pensamento não-linear e a abordagem de questões ecológicas. Essa ligação pode acontecer, por exemplo, com o estudo da dinâmica populacional, por meio do modelo logístico de May, relacionado com os temas fractais, função composta e função quadrática, que revela a fragilidade do equilíbrio ecológico, pois é *sensivelmente dependente das condições iniciais*. Não se trata de rejeitar os avanços tecnológicos, mas de reconhecer a capacidade limitada do meio ambiente de sobreviver equilibradamente no turbilhão de ações predatórias.

Na contemporaneidade, a proposta de reduzir os fenômenos da natureza às leis matemáticas deterministas não é mais a única linha norteadora de todas as pesquisas científicas. As descobertas da ciência contemporânea têm mostrado que modelos deterministas, que parecem ser completamente precisos, não garantem previsibilidade completa, acontecendo a emergência de caos e ordem. Com a abordagem de conceitos elementares da teoria dos fractais, sendo focadas suas ligações com a teoria do caos, apresenta-se a possibilidade de abarcar, na escola, a incerteza e as instabilidades que predominam no mundo onde vivemos, onde coexistem caos e ordem, intimamente ligados. Desse modo, torna-se possível incorporar no currículo da Matemática a visão de mundo norteadora das investigações no mundo da ciência contemporânea, onde emerge o interesse pelo estudo dos fenômenos onde a aleatoriedade é presença.

Propostas curriculares são fundamentadas em alguma visão de homem e de mundo, nem sempre explicitada. No mundo da Educação, a postura cartesiana é assumida quando busca-se previsibilidade e controle das práticas pedagógicas, valoriza-se o pesquisar objetivo, entendendo-se o investigador como sendo neutro, colocando-o afastado do objeto estudado. Nessa atitude, o professor estabelece previamente objetivos bem determinados, seleciona métodos de apresentar os conteúdos em sala de aula. O conhecimento é tratado como *coisa* a ser colocada nas mentes dos alunos e, por meio de instrumentos quantitativos de avaliação, o professor busca mensurar o que foi retido pelos estudantes. Na área da Matemática, é priorizado o aspecto quantitativo, sendo entendido

que os objetivos são alcançados quando o aluno encontra o número correto, resposta da questão proposta. Nesta postura, a Matemática é apresentada ao aluno como ciência pronta, estando excluídos os temas em construção na contemporaneidade, uma vez que as pesquisas não estão finalizadas e são de complexidade difícil de ser compreendida de modo simples. Nas repetições sistemáticas de cálculos repetitivos, destituídos de significado, instala-se o desânimo e arrasta-se o tempo, entendido em um sentido reduzido, como momentos representados por números marcados em um relógio.

Apesar da mudança na visão de mundo derivada das descobertas da ciência contemporânea, no mundo da Educação continuam sendo usados os modelos newtonianos anteriores às reformulações decorrentes das teorias científicas criadas durante o século XX. No material didático ainda se encontram modelos de átomos e de sistema solar constituídos de bolinhas deslizando em arames elípticos, desenhos de células com fronteiras bem delineadas. No primeiro contato do aluno com a *Geometria* é estudada apenas a euclidiana, como se fosse a única possibilidade de concepção de espaço, sendo priorizadas as figuras com contornos definidos. Deste modo, é afirmado continuamente um modo de ver o sistema do universo como completamente previsível, constituído de partes separadas e funcionando como um mecanismo bem ajustado.

Na escola, é importante a aquisição de algum automatismo com cálculos repetitivos. Porém, tais atividades mecânicas não podem constituir-se no único modo de trabalhar a Matemática, reduzindo o aluno a uma máquina de calcular. Na atualidade, dispomos de calculadoras e de computadores para realizar com êxito tais tarefas, o que possibilita uma mudança nas práticas pedagógicas. Mas isto demanda uma mudança de atitude com relação ao aluno e à ciência. Ao dar-nos conta de que o mundo não é mais descrito pela *metáfora da máquina*, mas sim pela da *rede*, vemos que, no mundo da Educação temos que adentrar nessa totalidade. Assumindo uma atitude pedagógica alinhada com a visão de mundo que emerge com a produção da ciência contemporânea

é possível trabalhar tempo/espaço/movimento à luz do movimento da construção da realidade e da do conhecimento. Desse modo, podemos trazer à discussão questões postas pela ciência contemporânea, como as concernentes ao caos, à organização do mundo (BICUDO, 2000, p. 66).

Ao dar-nos conta da *rede* em que vivemos, vemos que, no mundo da Educação Matemática precisamos abandonar a idéia de priorizar apenas o aspecto quantitativo da Matemática e valorizar a abordagem qualitativa. Para que a concepção de mundo que norteia a produção da ciência contemporânea seja contemplada nas atividades pedagógicas, é importante a valorização do aspecto qualitativo da Matemática por meio do estudo de padrões que emergem em situações aparentemente aleatórias, com a abordagem

de modelos matemáticos determinísticos que produzem aleatoriedade. O estudo dos particularmente nos aspectos em que se articulam com a teoria do caos.

É importante observar que os fractais construídos no final do século XIX são construções determinísticas onde o uso do processo de iteração revela, em, todas as escalas, exatamente a mesma estrutura auto-similar. Estes fractais clássicos estão difundidos pela internet, em revistas populares e em materiais didáticos. Pela sua aproximação com a postura mecanicista, são confortavelmente aceitos, pois seu processo de construção é regular. No entanto, é o estudo dos fractais randômicos que pode contribuir para o entendimento da concepção de mundo instaurada desde a criação da teoria quântica, onde a aleatoriedade é presença.

No mundo da Educação, deve ser superada a concepção de mundo fundamentada no pressuposto do deslizamento linear de acontecimentos previsíveis e perfeitamente controláveis. Ao tentar executar uma atividade pedagógica planejada, pensando atingir objetivos pré-determinados, o professor pode se defrontar com o desafio do surgimento de algo imprevisto. Assumindo a atitude cartesiana, tal fato é considerado angustiante e desconfortável, enquanto que, na concepção de mundo contemporânea, desordem e instabilidade não são entendidas como maléficas e destrutivas, mas sim, como fonte de novos modos de organização.

O abandono da obsessão por controle e previsão, substituída pelo entendimento contemporâneo de ordem e caos como estando presentes, de modo inseparável, no movimento da natureza, demanda uma mudança de atitude. Entendo que devamos abandonar a visão mecanicista de Educação e assumir uma postura em que professores e alunos são parte da construção do conhecimento e da construção da realidade. Vejo que uma concepção filosófica que se alinha com esse entendimento de Educação é a Fenomenologia. Precisamos deixar de entender o aluno como um ser a ser formatado, para assumi-lo como um *ser de possibilidades* mediante o *cuidado* educador. Nesta nova atitude está implícito o entendimento de que o aluno tem um mundo que lhe é próprio e que com ele está presente na sala de aula, trazendo instabilidades e possibilidades inesperadas, fontes de inspiração para a realização de atividades pedagógicas inovadoras. Neste contexto, é importante que o professor procure o estabelecimento do diálogo, entendendo-se *na-escola-com-os-outros*, assumindo o modo de ser *cuidado*.

No *modo de ser cuidadoso*, a abordagem dos conteúdos matemáticos vem relacionada com as questões ecológicas. Isto envolve ampliar as aplicações da Matemática para além das questões da Física, em busca de ligações com a Biologia.

Para que as concepções da ciência contemporânea sejam assumidas no Ensino Básico, não é necessária a substituição de conteúdos matemáticos que constituem a grade curricular, mas sim, a mudança no modo de abordá-los, o que significa assumir outra

Filosofia do Currículo. Por exemplo, nos itens dos temas matemáticos elencados como importantes para serem trabalhados no currículo do Ensino Básico, faz sentido articulá-los com a teoria dos fractais. Assim, *dimensão fractal* se relaciona com o tema *logaritmos*, *iteração geométrica* se liga ao tema *progressões geométricas*, o *mapeamento logístico* envolve o conceito de *função quadrática*, o *conjunto de Mandelbrot* é construído com a utilização de números complexos, *iteração* se relaciona com *composição de funções*.

As investigações no mundo subatômico mostram a impossibilidade do estabelecimento de fronteiras bem delimitadas entre o observador e o observado. Tais pesquisas envolvem complexas ferramentas matemáticas e tecnologia sofisticada. Mas o estudo do conceito da *dimensão fractal* também possibilita o entendimento da imbricação observador/observado, mostrando as limitações do princípio da objetividade, pois a *dimensão fractal* se relaciona com a noção de *escala*. A noção de *escala*, seja relacionada com a *constante de Planck* ou com a medida de litorais geográficos, demanda a concepção de um sujeito encarnado que se perceba no fluxo dos acontecimentos como integrante do processo de medida e de produção.

Coexistência de ordem e caos, emergência de padrões ordenados em situações aparentemente aleatórias, sistemas determinísticos que geram comportamento aleatório constituem o mundo-vida da ciência contemporânea e do conhecimento do senso-comum. É na tensão caos/ordem que o movimento da vida ocorre e onde a percepção de si e do mundo é dada. Tanto no âmbito do pensamento como no da ação educacional é possível efetuar a superação da dicotomia cartesiana homem/mundo. Na ciência, trabalhando-se concepções sistêmicas; e, na Educação, incorporando-se nos currículos escolares conteúdos da ciência contemporânea e privilegiando-se a atitude fenomenológica de perceber-se no mundo *com os outros*, de modo *cuidadoso*. Desse modo, o nexo “Geometria Fractal – produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico, somente pode acontecer mediante uma mudança na visão de homem e de mundo alinhada com a concepção de ciência que emerge na atualidade.

BIBLIOGRAFIA

1. ANASTÁCIO, Maria Queiroga Amoroso. *Três Ensaios numa Articulação sobre a Racionalidade, o Corpo e a Educação na Matemática*. 1999. Universidade Estadual Paulista, IGCE – Rio Claro. Tese de Doutorado.
2. BECKETT, Wendy. *História da Pintura*. São Paulo: Ática, 1997.
3. BARDONNÈCHE, Dominique de. Espécies de Espaços. In: DOMINGUES, Diana (Org.) *A Arte no Século XX: a Humanização das Tecnologias*. São Paulo: Ed. da UNESP, 1997.
4. BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. O Papel do Educador. *Nuances – Revista do Curso de Pedagogia*. Presidente Prudente, SP, vol. IV, p. 20-24, set. 1998.
5. _____. *Fenomenologia: Confrontos e Avanços*. São Paulo: Cortez, 2000.
6. _____. *Tempo, tempo vivido e história*. Bauru: EDUSC, 2003.
7. _____. A Contribuição da Fenomenologia à Educação. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; CAPPELLETTI, Isabel Franchi (Orgs.) *A Contribuição da Fenomenologia à Educação*. São Paulo: Olho d' Água, 1999.
8. BOFF, Leonardo. *Saber cuidar: Ética do Humano – Compaixão pela Terra*. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 2002.
9. BORN, Max, et al. *Problemas da Física Moderna*. 2. ed. São Paulo: Perspectiva, 2000.
10. BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
11. BRANDÃO, Junito de Souza. *Dicionário Mítico-etimológico da Mitologia Grega*. Petrópolis: Vozes, 1991.
12. CAPRA, Fritjof. *A Teia da Vida: Uma Nova Compreensão Científica dos Sistemas Vivos*. 3. ed. São Paulo: Cultrix, 1998.

13. _____. *As Conexões Ocultas: Ciência para uma Vida Sustentável*. São Paulo: Cultrix, 2002.
14. _____. *O Ponto de Mutação: a Ciência, a Sociedade e a Cultura emergente*. 21. ed. São Paulo: Cultrix, 2000.
15. CHOATE, Jonathan; DEVANEY, Robert L.; FOSTER, Alice. *Iteration: A Tool Kit of Dynamics Activities*. Emeryville: Key Curriculum Press, 1999.
16. _____. *Fractals: A Tool Kit of Dynamics Activities*. Emeryville: Key Curriculum Press, 1999.
17. COPPLESTONE, Trewin. *Leonardo*. New York: Random House Value Publishing, 1998.
18. D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
19. _____. *Educação matemática: da Teoria à Prática*. 4. ed. Campinas: Papirus, 1996.
20. _____. Teoria da Relatividade, o Princípio da Incerteza. In: GUINSBURG, J. (Org.) *O Expressionismo*. São Paulo: Perspectiva, 2002.
21. DEVANEY, Robert L.; CHOATE, Jonathan. *Chaos: A Tool Kit of Dynamics Activities*. Emeryville: Key Curriculum Press, 1999.
22. _____. *The Mandelbrot and Julia Sets: A Tool Kit of Dynamics Activities*. Emeryville: Key Curriculum Press, 1999.
23. DÜCHTING, Hajo. *Cézanne*. Köln: Taschen, 1999.
24. EKELAND, Ivar. *A Matemática e o Imprevisto*. Lisboa: Gradiva, 1993.
25. EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Ed. da UNICAMP, 1995.

26. FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. 2. ed. *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*. São Paulo: Nova Fronteira, 1997.
27. FIEDLER-ERRARA, Nelson; PRADO, Carmen P. Cintra do. *Caos, uma Introdução*. São Paulo: Edgard Blücher, 1994.
28. GALILEI, Galileu. O Ensaíador. In: *Os Pensadores*. São Paulo: Nova Cultural, 1999.
29. GÅRDING, Lars. *Encontro com a Matemática*. Brasília: Editora da UnB, 1981.
30. GILMORE, Robert. *O Mágico dos Quarks: a Física de Partículas ao Alcance de Todos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002.
31. GLEICK, James. *Caos: a Criação de uma Nova Ciência*. 3. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1990.
32. GREEN, Bill; BIGUM, Chris. Alienígenas na Sala de Aula. In: SILVA, Tomaz Tadeu da (Org.). *Alienígenas na Sala de Aula: uma Introdução aos Estudos Culturais em Educação*. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 2003. p. 208-243.
33. HAWKING, Stephen. *Breve História do Tempo Ilustrada*. Curitiba: Albert Einstein, 1997.
34. HEIDEGGER, Martin. *Ser e Tempo - parte I*. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 1988.
35. _____. *Ensaio e Conferências*. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2001.
36. HEISENBERG, Werner. *Física e Filosofia*. 4. ed. Brasília: Ed. Da UnB - Edições Humanidades, 1999.
37. KLUTH, Verilda Speridião. *O que acontece no encontro sujeito-Matemática*. 1997. Universidade Estadual Paulista, IGCE – Rio Claro. Dissertação de Mestrado.
38. LORENZ, Edward N. *A Essência do Caos*. Brasília: Ed. da UnB, 1996.
39. MAY, Robert. The Chaotic Rhythms of Life. In: HALL, Nina (Org.). *The New Scientist Guide to Chaos*. London: Penguin Books, 1992.

40. MANDELBROT, Benoit B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman and Company, 1977.
41. _____. *Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*. Lisboa: Gradiva, 1991.
42. _____. Fractals – a Geometry of Nature. In: HALL, Nina (Org.). *The New Scientist Guide to Chaos*. London: Penguin Books, 1992.
43. MARTINS, Joel. *Um Enfoque Fenomenológico do Currículo: Educação como Poíesis*. São Paulo: Cortez, 1992.
44. MERLEAU-PONTY, Maurice. *A Natureza*. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
45. _____. *Fenomenologia da Percepção*. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.
46. _____. Textos selecionados. In: *Os Pensadores*. São Paulo: Nova Cultural, 1989.
47. OMNÈS, Roland. *Filosofia da Ciência Contemporânea*. São Paulo: Ed. da UNESP, 1996.
48. OSTROWER, Fayga. *Criatividade e Processos de Criação*. 10. ed. Petrópolis: Vozes, 1987.
49. _____. *Universos da Arte*. 16. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1983.
50. _____. *Acaso e Criação Artística*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1995.
51. PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. *Fractals for the Classroom – Part One: Introduction to Fractals and Chaos*. New York: Springer-Verlag, 1992.
52. _____. *Fractals for the Classroom – Part Two: Complex Systems and Mandelbrot Set*. New York: Springer-Verlag, 1992.
53. PESSIS-PASTERNAK, Guitta. *Do Caos à Inteligência Artificial: quando os cientistas se interrogam*. São Paulo: Ed. da UNESP, 1993.

54. POINCARÉ, Henri. *O valor da ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.
55. _____. *A ciência e a hipótes*. 2. ed. Brasília: Ed. da UnB, 1988.
56. PRIGOGINE, Ilya. *O fim das certezas: tempo, caos e as leis da natureza*. 2. ed. São Paulo: Ed. da UNESP, 1996.
57. _____. STENGERS, Isabelle. *A Nova Aliança: Metamorfose da Ciência*. Brasília: Ed. da UnB, 1991.
58. PROENÇA, Graça. *História da Arte*. 11. ed. São Paulo: Ática, 1998.
59. PRUSINKIEWICZ; Przemyslaw; HANAN, James. *Lindenmeyer Systems, Fractals and Plants*. 2. ed. Germany: Springer-Verlag, 1989.
60. STEWART, Ian. *Será que Deus joga dados? A Nova Matemática do Caos*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991.
61. UNIVERSITY OF KOLOGNE. Kolam: a mirror of Tamil culture. Disponível em <http://www.uni-koeln.de/philfak/indologie/kolam/frame.html>>. Acessado em 10/01/2004.
62. WEINBERG, Steven. *Sonhos de uma Teoria Final: a Busca das Leis Fundamentais da Natureza*. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.