RESSALVA

Alertamos para ausência das páginas pré-textuais não incluídas pela autora no arquivo original.

ÍNDICE

C a p í t u l o **0**: Apresentação da pesquisa ... 1
0.1. Trajetória de vida: a trajetória da pesquisa ... 1
0.2 Organização da apresentação do trabalho ... 7
C a p í t u l o **1**: Introdução ... 8
1.1 O pano de fundo da pesquisa ... 8
1.2 Situando a pesquisa ... 11
1.3 Procedimentos da Pesquisa ... 13
C a p í t u l o **2**: Sobre os instrumentos ... 17
2.1 Os espelhos ... 17
2.2 Instrumentos construídos com espelhos utilizados no ensino de geometria ... 20
2.21 O espelho mágico ... 21
2.22 O espelho simples ... 29
2.23 Dois espelhos planos verticais e paralelos ... 33
2.24 Os caleidoscópios ... 34
2. 241 Notas e curiosidades sobre o caleidoscópio ... 34
2.242 O caleidoscópio com dois espelhos ... 39
2.243 Caleidoscópios com três espelhos ... 49
2.2431 Caleidoscópio educacional individual com três espelhos ... 49
2.2432 Caleidoscópio educacional modificado com três espelhos ... 59
2.244 Caleidoscópios generalizados (esféricos) ... 68
2.245 Caleidoscópio plano com quatro espelhos ... 71
2.46 Espelhos articulados especiais ... 74
2.3 Curiosidades a respeito de instrumentos de espelho ... 77
C a p í t u l o **3:** Dos dados ... 79
3.1 Análise dos dados ... 79
E1-Espelho mágico ou “mira” ... 81
E2–O espelho simples ... 83
E2–O espelho simples ... 84
E2–O espelho simples ... 85
E3-Dois espelhos planos verticais e paralelos ... 86
E4-Caleidoscópio com dois espelhos ... 87
E4-Caleidoscópio com dois espelhos ... 88
E4-Caleidoscópio com dois espelhos ... 89
E5-O caleidoscópio educacional individual com três espelhos ... 90
E5-Caleidoscópio educacional individual com três espelhos ... 91
E6-Caleidoscópio educacional modificado com três espelhos ... 92
E7-Caleidoscópio educacional modificado com quatro espelhos ... 93
E8-Caleidoscópios generalizados ... 94
E9-Espelhos articulados especiais ... 94
3.2 Sobre o movimento de análise ... 95
C a p í t u l o **4**: O kit de espelhos ... 98
4.1 A construção do kit ... 98
4.2 Construindo o kit ... 102
C a p í t u l o **5**: Apresentando o construído ... 108
5.1 Apresentando ... 108
- Construção da base para visualização do sólido (4,6,8), com o software Cabri-géomètre II ... 111
- Construção da base para o sólido (4,6,8), usando régua e compasso ... 114
- Construção da base para o sólido (3,4,5,4), com o software Cabri-géomètre II . 115
- Construção com régua e compasso da base para o sólido (3,4,5,4) ... 118
- O produzido ... 122

Considerações finais ... 125
Referências ... 128
Bibliografia consultada ... 132

Índice de Figuras

Figura 1: A Mira 22
Figura 2: "O espelho mágico", de Escher. 25
Figura 3: Cartões de WALTER (1972) 29
Figura 4: Reflexões sucessivas em espelhos paralelos 33
Figura 5: Arranjo de espelhos em um caleidoscópio popular 35
Figura 6: Caleidoscópio popular 36
Figura 7: Caleidoscópio com dois espelhos 40
Figura 8: Padrão produzido pelo caleidoscópio com dois espelhos 42
Figura 9: Reflexão em caleidoscópio com dois espelhos 46
Figura 10: Caleidoscópio com dois espelhos 47
Figura 11: Espelhos articulados dispostos em posições diferentes 48
Figura 12: Estrutura do caleidoscópio individual com três espelhos 49
Figura 13: Caleidoscópios com três espelhos 50
Figura 14: Caleidoscópio com três espelhos 51
Figura 15: Tesselação do plano e base para visualização desta tesselação 52
Figura 16: Seqüência de bases 53
Figura 17: Diagramas com os ângulos formados entre os espelhos 54
Figura 18: Caleidoscópio individual 54
Figura 19: Figuras dos caleidoscópios individuais 55
Figura 20: Caleidoscópio eqüilátero modificado com três espelhos 60
Figura 21: Estrutura dos ângulos dos caleidoscópios modificados 61
Figura 22: Caleidoscópio modificado 62
Figura 23: Aplicação do método III 64
Figura 24: Poliedros com faces pavimentadas 66
Figura 25: Bases para a configuração (3,4,6,4) 67
Figura 26: Visual obtido pela reflexão nos espelhos 70
Figura 27: Caleidoscópio com quatro espelhos e base substituível 72
Figura 28: Ornamentos: Pentagonal e de Escher 73
Figura 29: Visual do octaedro e do icosaedro. 76
Figura 30: Fotos da exposição em Portugal 77
Figura 31: Caleidoscópio modificado "Gigante" 78
Figura 32: Foto da reflexão de um poliedro 104
Figura 33: Caleidoscópio especial refletindo o icosaedro 106
Figura 34: Caleidoscópio especial refletindo o octaedro 107
Figura 35: Base para visualização do poliedro (4,6,8) 108
Figura 36: Base para visualização do sólido (4,6,8) 112
Figura 37: Base para o poliedro (4,6,8) 113
Figura 38: Visual do poliedro (4,6,8) 113
Figura 39: Sólido (4,6,8) 113
Figura 40: Base para o poliedro (4,6,8), feita com régua e compasso 115
Figura 41: Base para o poliedro (3,4,5,4) construída com o software 116
Figura 42: Base recortada e dobrada 117
Figura 43: Visual do poliedro 117
Figura 44: Poliedro (3,4,5,4) 117
Figura 45: Base para o poliedro (3,4,5,4) 119
Figura 46: Base para visualização do poliedro (4,6,10) 120
Figura 47: Base para visualização do poliedro (5,6,6) 120
Figura 48: Base para visualização do poliedro (4,6,6) 120
Figura 49: Base para visualização do poliedro (3,10,10) 121
Figura 50: O kit de espelhos planos 124

C a p í t u l o **0**: Apresentação da pesquisa

0.1. Trajetória de vida: a trajetória da pesquisa

Neste capítulo, apresentamos nosso envolvimento com a Educação Matemática, vinculado às nossas inquietações com relação ao ensino de geometria, desembocando na questão que norteou a nossa pesquisa, e expomos, brevemente, os procedimentos adotados para a realização da mesma.

Em 1998, ingressamos no curso de Matemática na Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro/SP. Em 1999, quando cursávamos o segundo ano, fomos selecionadas para integrar-nos ao Grupo PET[1] - Matemática desta Universidade, e tivemos a oportunidade de iniciar, por conta disso, uma pesquisa de Iniciação Científica. Naquele momento, optamos pelo campo da Educação Matemática, voltada para o ensino de geometria através de caleidoscópios e espelhos, sob a orientação do professor doutor Claudemir Murari, o qual foi nosso orientador, desde então, e até o término da graduação (1999 - 2001), sendo que ainda o é no mestrado.

Na Iniciação Científica, estudando a literatura a respeito do ensino da Geometria, na qual se encontram apresentadas as causas que determinam o abandono do ensino deste ramo da Matemática no Brasil, encontramos uma explicação para o fato do pouco conhecimento sobre os conteúdos de geometria que tivemos no ensino fundamental e médio.

Durante o ano de 2002, obtida a licenciatura em Matemática, exercemos a profissão na rede pública de ensino em Rio Claro/SP, quando, então, pudemos averiguar o que fora denunciado em PEREZ (1991), PAVANELLO (1993) e LORENZATO (1995): durante muitos anos, na maioria das escolas brasileiras, foi ensinada a geometria

[1] PET - Abreviação para **P**rograma **E**special de **T**reinamento, projeto financiado pela Capes, que oferece bolsas de estudo a alunos da graduação, para atividades de pesquisa.

euclidiana, cujos conceitos constituem um grande obstáculo epistemológico, para professores e alunos, referente à organização do raciocínio e à construção do conhecimento. Essa falta de renovação dos conceitos ensinados causou a perda do vigor.

Algumas causas determinam a situação frágil em que se encontra o ensino da geometria. Podemos citar que: apoiando-se nos livros didáticos, as aulas não exigiam mais do que cópia direta do livro ou da lousa; a deficiência na formação dos professores resultava numa ineficácia da prática pedagógica; o acompanhamento rigoroso do livro didático, nos quais a geometria, relegada, consta nos últimos capítulos, causava defasagem no ensino desta em relação aos outros ramos da Matemática, sendo pouco estudada devido à falta de tempo ou de entusiasmo no final do ano letivo.

Por essas vivências e constatações, ainda que por pouco tempo no exercício da docência, a cada experiência em sala de aula aumentava nosso interesse em compartilhar com os alunos o trabalho com caleidoscópios desenvolvido durante os anos de Iniciação Científica[2], quando, como já dissemos, pesquisamos sobre o ensino de geometria através de espelhos e caleidoscópios e pudemos observar a "beleza" que há por trás dos visuais obtidos nos espelhos e, principalmente, a possibilidade de participação ativa dos alunos quando se trabalha com estes instrumentos.

Ao nos dedicarmos ao ensino da Matemática, especialmente ao da Geometria, surgiram inquietações quanto aos modos de apresentação dos conteúdos desse ramo da Matemática. Tais inquietações se expressaram na seguinte questão: é possível "ensinar" geometria de modo que os alunos tenham uma participação ativa no processo de ensino-aprendizagem desta disciplina? Essa participação ativa a que nos referimos acima se caracteriza pela busca do aluno em compreender, resolver, fazer diferente e assim construir seu próprio conhecimento, tendo o professor como mediador do processo ensino-aprendizagem.

---

[2] Em 1999, o título do projeto de Iniciação Científica foi "Ensino-aprendizagem de geometria no 1º grau via caleidoscópios"; em 2000 e 2001 foram, respectivamente, "Um estudo sobre tesselações planas e espaciais usando padrões caleidoscópicos" e "Um estudo sobre tesselações do plano e do espaço usando padrões caleidoscópicos".

Assim, quando dos preparativos para a inscrição no processo de seleção para o mestrado, no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEM) da UNESP de Rio Claro/SP, deparamo-nos com a oportunidade de elaborar um projeto de pesquisa que contemplasse nossas preocupações frente à situação do ensino de geometria, época em que já cursávamos disciplinas como aluna especial nesse Programa de Pós-graduação.

Desse modo, preparamos um projeto de pesquisa, no qual objetivávamos elaborar uma estratégia de ensino utilizando espelhos e caleidoscópios para o ensino de geometria plana e espacial, oportunizando uma participação ativa do aluno no processo de ensino-aprendizagem. Com o título "Um kit de espelhos como estratégia de ensino em geometria", esse projeto tinha um propósito delimitado por intermédio da seguinte questão: "é possível elaborar uma estratégia de ensino utilizando um kit de espelhos para o estudo de geometria plana e espacial, de modo a despertar interesse e curiosidade nos alunos?".

A fase como "aluna especial" proporcionou-nos, entre outras coisas, o acesso a idéias, a autores, a teorias, a concepções e a metodologias de outras pesquisas. Com isso, nosso conhecimento se ampliava e se intensificava pelo diálogo com os docentes e discentes deste Programa de Pós-graduação, desembocando em relações estabelecidas e compartilhadas com profissionais e colegas que acrescentavam lucidez ao desenvolvimento do projeto de pesquisa.

Assim, percebíamos que nosso campo de conhecimento se alargava permitindo-nos compreensões sobre o mundo da pesquisa e sobre o referencial metodológico pertinente à investigação da questão que procurávamos responder. Essas e outras contribuições nos levaram a concluir que o projeto norteado pela questão acima expressa se inseria na linha de investigação denominada Psicologia da Educação Matemática, uma vez que aquilo que, de fato, se constituía no objeto de investigação, eram as possibilidades efetivas de envolvimento e de aprendizagem significativa por parte dos sujeitos da pesquisa. Desse modo, compreendemos que nossas questões iniciais pertenciam a um universo de conhecimentos impossíveis de serem trabalhados no formato acadêmico no qual nos inserimos, exigindo um foco mais apurado, e uma outra pergunta diretriz. Abandonamos essa pergunta diretora e partimos em busca de outra.

Feita essa opção, ocupamo-nos em aprofundar os estudos do material bibliográfico referente à temática da utilização de espelhos e caleidoscópios no ensino de geometria. Dirigimos nossa atenção para os relatos de autores como KINGSTON (1957); AUSPAUGH (1970); JACOBS (1974); DAFFER & CLEMENS (1977); LOTT & DAYOUB (1977), WOODWARD (1977); MARTIN (1979); WALTER (1981); ROBERTSON (1986); BALL & COXETER (1987); BARBOSA (1993); MURARI (1999); GRAF & HODGSON (2000); MARTINS (2003); ALMEIDA (2003), entre outros, os quais contribuíram para delinear o foco de nossa pesquisa.

No nosso caso, a vivência em um processo de muitas reflexões, que cada dia se transformava e atingia um estado de clareamento, remeteu-nos à possibilidade de investigação que se manifestou e foi expressa na seguinte pergunta: "**O que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria?**".

Uma vez encontrada e delimitada essa nova questão norteadora de nossa pesquisa, buscamos colocar de forma estabelecida o assunto sobre o qual discursamos, analisando a importância "do que já foi feito", "quem fez" e "o que poderíamos fazer para superar o que já foi feito". Para isso, fizemos um estudo da literatura que encontramos, e que se refere aos instrumentos construídos com espelho destinados ao ensino de geometria, a fim de compreendermos melhor o que os autores dizem a respeito de tais materiais, e a questão para a qual aponta a pergunta diretriz acima expressa.

Para levar-nos a visualizar o fenômeno - a construção, com espelhos de um kit de instrumentos – foi importante um levantamento bibliográfico identificando na literatura a que tivemos acesso, os instrumentos construídos com espelhos utilizados para o ensino de conceitos, objetos e temas geométricos, e descrevendo-os a partir de obras a eles referentes.

O objetivo deste trabalho é elaborar um conjunto de material didático, com espelhos, para o ensino de geometria, a partir da literatura existente, considerando as características comuns de construção e de utilização, quando os instrumentos são empregados no processo de ensino. Pretendemos apresentar a construção de cada instrumento e as possibilidades de utilização dos mesmos, para que esse conjunto de instrumentos didáticos, ora em foco, possa ser acrescentado aos demais materiais didáticos disponíveis que têm a possibilidade de serem adotados pelas escolas para aulas de geometria.

Considerando a intenção da pesquisa, optamos pela metodologia de investigação qualitativa, que privilegia a interpretação, que julgamos ser a mais apropriada para investigação da presente pesquisa. Nesta, entramos em contato direto com a literatura específica a respeito de instrumentos construídos com espelhos, bem como com os próprios espelhos para, posteriormente, passarmos à análise, momento em que buscamos as convergências entre os trabalhos estudados e entre os próprios instrumentos e suas possibilidades de utilização. Esse contato do pesquisador com o ambiente e/ou situação a ser investigada, tem sido apontado na literatura como procedimentos da pesquisa qualitativa, conforme GOLDEMBERG (1999) e ALVES-MAZZOTTI & GEWANSZNAJDER (2001). Além disso, a análise interpretativa é uma característica marcante desse tipo de abordagem, segundo GOLDENBERG (1999).

Os dados foram analisados com recursos de procedimento da pesquisa fenomenológica. O momento da análise procede ao momento em que o fenômeno foi situado e à coleta bibliográfica representada pelas descrições dos instrumentos. A análise acontece em dois momentos, o primeiro é o que se denomina *ideográfico,* que busca tornar visível o sistema das idéias presentes nas descrições; é nessa fase da análise que o pesquisador procura por unidades de significado (u.s.). Estas são discriminações prontas no texto espontaneamente percebidas nas descrições e intencionalmente recortadas do texto; apresentam vínculo com a perspectiva do pesquisador e expressam divergências e convergências observadas nos dados disponíveis. O segundo momento é o da análise *nomotética*, na qual o pesquisador vale-se de unidades de significado e, ligado ao movimento de análise, pode obter categorias de convergências que iluminam uma perspectiva do fenômeno e permitem uma compreensão/interpretação para/da a pergunta diretriz da pesquisa BICUDO (1994).

Finalmente, fundamentando-se nas convergências, construímos o conjunto de material didático com espelhos, e propomos uma nova utilidade para os caleidoscópios generalizados.

Os procedimentos metodológicos dessa pesquisa serão detalhados e apresentados posteriormente, em capítulo próprio. Nessa seção buscamos apresentar os caminhos que nos conduziram até a elaboração do projeto da pesquisa de mestrado, bem como, o modo como está sendo projetada.

0.2 Organização da apresentação do trabalho

Tendo assumido este direcionamento, organizamos a apresentação dessa dissertação em capítulos, nos quais apresentaremos os resultados alcançados. Assim, o trabalho foi estruturado conforme abaixo.

No **capítulo zero,** apresentamos uma espécie de trajetória de vida, enquanto pesquisadora, atrelada ao desenvolvimento dessa pesquisa.

Um cenário sobre o percurso ao redor do fenômeno que desejamos compreender, ou seja, o pano de fundo da pesquisa: o problema e os objetivos do trabalho, a opção metodológica, a justificativa e a relevância da pesquisa, é o que contém o **capítulo um**.

No **capítulo dois**, temos a exposição da literatura analisada em relação aos instrumentos construídos com espelhos e utilizados para o ensino de geometria. Tendo evidenciado o fenômeno e tematizado o que dele dizem os autores da literatura, descrevemos os referidos instrumentos.

A análise dos dados e a interpretação dessa análise, utilizando recursos de procedimento da pesquisa fenomenológica, aparecem no **capítulo três.**

No **capítulo quatro**, apresentamos a construção do kit proposto, fundamentando-nos no que há em comum na literatura.

Finalmente, no **capítulo cinco** apresentamos a construção, de nossa autoria, de bases caleidoscópicas que permitem a visualização de poliedros de Arquimedes nos caleidoscópios generalizados, e apresentamos o kit produzido.

Capítulo 1: Introdução

1.1 O pano de fundo da pesquisa

Apesar da geometria ser considerada uma ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com o espaço em que vivemos, conforme FAINGUELERNT (1999), da ênfase atribuída ao uso de materiais manipuláveis como recursos didáticos nas aulas de geometria, encontrada nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, e de ser repleta de possibilidades de trabalho com estes materiais devido à quantidade de objetos geométricos que podem ter suas formas manipuladas e/ou visualizadas, notamos que o ensino da geometria é tratado com descaso nas escolas.

No que diz respeito aos alunos, frente ao processo de ensino-aprendizagem desta, encontramos a denúncia da utilização de uma metodologia que não atrai a curiosidade do estudante, por vezes limitando-o à cópia e à observação de descrições encontradas nos livros ou feitas pelo professor.

Assim, temos as aulas de geometria de maneira antagônica à sociedade moderna, caracterizada por induzir a uma participação ativa do ser humano em suas escolhas complexas. Compreendemos que esta característica vigente na sociedade (de encorajamento da atuação do indivíduo) deverá ser valorizada nas escolas, pois uma das razões da deficiência no processo ensino-aprendizagem de geometria, aliás, de toda a Matemática, pode estar na incompatibilidade entre modos de atuação na sociedade e na escola. Enquanto a primeira exige escolhas e tomadas de decisões, a outra exige que se acatem decisões pré-estabelecidas, raramente permitindo questionamentos a respeito.

Nas obras estudadas a respeito dos instrumentos construídos com espelhos para o ensino de geometria, encontramos que é possível, através destes a abordagem de temas, conceitos e propriedades geométricas, tais como: tesselações planas e esféricas, simetria, poliedros, polígonos, ângulos, reflexão, congruência, orientação, etc. Contudo, estes instrumentos nunca foram agrupados num conjunto, formando um recurso didático para as aulas de geometria. Encontramos, em algumas obras, reunidos alguns instrumentos, mas não todos como o kit que pretendemos elaborar.

Mediante o quadro de ocorrências da utilização de espelhos como recurso didático no ensino de geometria, da nossa percepção da necessidade de uma metodologia de ensino que valorize as condições e gostos do alunado atual e da potencialidade da reflexão simétrica dos espelhos em adição aos inúmeros objetos geométricos que podem ter suas formas manipuladas ou visualizadas, surge a questão, a necessidade e a possibilidade do agrupamento destes instrumentos encontrados na literatura, construídos com espelhos e previamente utilizados para o ensino de geometria, em um kit de instrumentos de espelhos. Desse modo, a pergunta que passou a nortear nossa pesquisa expressou-se assim: **"O que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria"?**

O percurso de pesquisa norteado por esta pergunta exigiu:

i) a pesquisa bibliográfica a respeito de instrumentos construídos com espelhos existentes e utilizados para o ensino de geometria;

ii) a descrição detalhada e a utilidade de cada instrumento, através de autores e obras que a eles se referem;

iii) a análise das descrições de cada instrumento buscando o que há em comum nos trabalhos estudados e a interpretação dessa análise, a qual nos permitirá progredir na construção do agrupamento de material didático com espelho;

iv) a construção do conjunto proposto, fundamentando-se no que há em comum entre os instrumentos e entre os trabalhos estudados.

Esses passos serão dados visando à apresentação de possibilidades de utilização dos instrumentos, encontradas nas obras, e a proposta da utilização dos caleidoscópios generalizados para visualização dos poliedros de Arquimedes.

Importante é retomar e enfatizar que o objetivo deste trabalho é construir e sistematizar materiais didáticos com espelhos para o ensino de geometria, a partir da literatura que nos foi possível acessar, que tratava a respeito do emprego de espelhos no ensino de geometria. Pretendemos que o material construído possa ser acrescentado aos demais materiais didáticos para serem utilizados nas escolas.

1.2 Situando a pesquisa

Como fora citado anteriormente, vários autores recomendam o uso de espelhos e caleidoscópios no ensino de geometria, ao invés das aulas tradicionais O envolvimento dos alunos na aula e o interesse e curiosidade em manipular, criar figuras inusitadas, desenhar e, depois, visualizar a reflexão do desenho nos espelhos, são observações que se destacam em seus relatos, e que também pudemos experienciar e presenciar tanto na Iniciação Científica quanto nos períodos em que lecionamos. Dessa constatação e experiência positiva derivou parte de nosso interesse em realizar este trabalho.

Tal comportamento, que pode ser interpretado como motivação, apesar de parecer, não é exclusivo apenas das crianças quando elas estão utilizando espelhos e caleidoscópios nas aulas de geometria. O entusiasmo que se observa nas oportunidades que temos de apresentação desses instrumentos e sugestão de uso entre adultos[3], quando manipulam espelhos e caleidoscópios em aulas de geometria, é semelhante ao das crianças.

Em termos de pesquisas utilizando espelhos e caleidoscópios para o ensino de geometria, nesse Programa de Pós-graduação temos trabalhos como os de MURARI (1999), MARTINS (2003) e ALMEIDA (2003), os quais afirmam que estes instrumentos são realmente interessantes, provocadores de envolvimento e causadores de interesse e participação dos alunos nas aulas de geometria. Além dessas pesquisas já concluídas nesse Programa, ainda existem mais três pesquisadores com estudos em andamento que utilizam caleidoscópios. Joana D'arc da Silva Reis utiliza os caleidoscópios generalizados fazendo parte de uma estratégia de ensino para apresentação de conceitos propriedades e objetos da geometria esférica; Flávio Roberto Gouvêa estuda a obtenção de fractais geométricos através de bases caleidoscópicas; e Marli Regina dos Santos investiga a utilização de caleidoscópios numa estratégia de ensino com jogos educacionais aplicados às tesselações do plano.

[3] Atividades desenvolvidas com adultos: Projeto Teia do Saber, nas disciplinas oferecidas no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e nas oficinas oferecidas pelos professores Claudemir Murari e Geraldo Perez.

A prática de se recorrer a outros materiais didáticos, principalmente às tecnologias da informação (representadas pelos computadores, pelos *softwares* e pelas calculadoras gráficas) e aos jogos, é recomendada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais, visto que são elementos de apoio para o ensino, estímulos à aprendizagem e ferramentas para o desenvolvimento de habilidades.

Os espelhos e caleidoscópios, como já constatados pelos autores citados, são instrumentos que apóiam o trabalho do professor na tarefa de "ensinar" e estimulam a "aprendizagem".

Contudo, mesmo perante as recomendações do uso de materiais manipuláveis como recursos didáticos, de resultados satisfatórios obtidos com o uso de espelhos e os caleidoscópios, do número de professores que estão tendo acesso a esses instrumentos por meio das disciplinas, oficinas e cursos oferecidos a respeito de espelhos e caleidoscópios, observamos que a quantidade de professores que os utilizam nas escolas ainda é irrisória.

Dessa forma, apresentamos esse conjunto de espelhos como um recurso didático para aulas de geometria, a ser utilizado nas escolas, nos níveis Fundamental, Médio e até mesmo no ensino Superior. Como já mencionamos, ele é um **kit de instrumentos construídos com espelhos**, a partir do material analisado, reunido numa nova forma, mostrando possibilidades de emprego dos mesmos, bem como, propondo uma nova utilização para os caleidoscópios generalizados.

Entre esses instrumentos estão: o espelho mágico ou mira; um espelho simples; dois espelhos que podem ser utilizados paralelamente a um mesmo plano ou articulados; caleidoscópios modificados com três e quatro espelhos; espelhos articulados especiais e caleidoscópios generalizados (esféricos).

Durante a pesquisa, o contato estabelecido entre pesquisador e caleidoscópios rendeu algumas "operacionalizações", a fim de "otimizar" a utilização destes, que poderão ser observadas na construção desse conjunto.

1.3 Procedimentos da Pesquisa

Nessa seção, apresentaremos a opção metodológica que estamos assumindo para o desenvolvimento dessa pesquisa. A pesquisa percorre caminhos durante o processo de sua execução que, de acordo com BOGDAN & BIKLEN (1994) caracteriza-se, em um de seus momentos, e num determinado grau, na concepção denominada pesquisa qualitativa. Entre as justificativas dessa rotulação estão as características básicas configurativas da investigação qualitativa, exemplificadas nessa mesma obra:

i) O ambiente natural é a fonte direta de dados para a pesquisa, e o pesquisador é o instrumento principal;

ii) a investigação é descritiva;

iii) interesse maior pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;

iv) O significado é de importância vital, e,

v) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo.

O processo de coleta de dados ocorreu mediante análise da bibliografia disponível e, de acordo com a pergunta norteadora de nossa pesquisa, poderiam ser usados como fontes de informações.

A contextualização da pesquisa, a justificativa e relevância do tema no âmbito da comunidade de educadores matemáticos, a pesquisa bibliográfica, a descrição dos instrumentos construídos com espelhos utilizados no ensino de geometria, a construção do kit de espelhos, as leituras e releituras para a análise dos dados descritos e organizados tentando destacar unidades significativas e, posteriormente, categorias de convergência, a interpretação da análise que permitiu a construção do kit, e a contribuição nossa, no tocante à criação de bases que possibilitam uma nova utilização para os caleidoscópios generalizados, que interam o kit, são etapas seqüentes, inter-relacionadas e interdependentes no decorrer dessa pesquisa.

Em relação à primeira característica configurativa da investigação qualitativa, mencionada anteriormente, onde o ambiente natural é a fonte de dados para a pesquisa e o pesquisador é aquele que intencionalmente dirige seu olhar para as investigações a serem efetivadas, temos, no nosso caso, a bibliografia estudada a respeito de espelhos e/ou caleidoscópios, que foram, ou são utilizados no ensino de geometria. Considerando que na bibliografia encontramos relatos das possibilidades do uso de espelhos e sugestões de construção dos instrumentos, nossa condição de pesquisadora remeteu-nos, à medida do possível, ao interior desse ambiente natural, no qual a compreensão do fenômeno estudado se deu a partir de circunstâncias particulares de existência de cada objeto no contexto em que ele se encontra, da intencionalidade do pesquisador no trabalho prolongado, e no contato estreito e direto com a situação de ocorrência do fenômeno.

A segunda característica apontada pelos autores diz que os dados coletados devem ser predominantemente descritivos. Essa característica, como já foi mencionada, é uma tendência da investigação qualitativa que busca explicitar a coisa percebida ou compreendida. Essa coisa pode ser um evento ou qualquer ocorrência, um objeto de conhecimento, relações, etc. A fenomenologia entende a descrição como um movimento na investigação, um procedimento para obtenção de dados que deverão ser analisados e interpretados na análise fenomenológica. Do modo como é trabalhada pelo fenomenólogo, a descrição é um protocolo que se limita a descrever a experiência do modo como é sentida pelo sujeito, ou seja, a relatar o percebido na percepção. O percebido é relativo à percepção e é tido como não estando além de sua manifestação. A percepção ocorre sob um fundo histórico, o mundo, e não se separa dele. Aquele que percebe está imerso no mundo, que possui estrutura e tradição, compartilhado por indivíduos também situados nesse mundo. A percepção se dá sob este fundo histórico e é manifestada por meio da linguagem. Com isso, a percepção não se restringe apenas à dimensão da subjetividade, BICUDO (2000). Acreditamos que a descrição do visto, do sentido, da experiência vivida pelo sujeito, sem julgamentos e avaliações, possibilita a busca pelo solo perceptivo onde se dá a percepção.

Nesta pesquisa, a descrição contribuiu para apresentar as características de cada instrumento, expondo minuciosamente o modo de sua construção, sua utilidade e permitiu antever o ente matemático que esses instrumentos possibilitam compreender nas atividades de ensino e de aprendizagem. Assim sendo, descrevemos os trabalhos estudados direcionados pela pergunta diretriz, de modo a focar o fenômeno - a construção, com espelhos, de um kit de instrumentos - e por meio da descrição obtivemos os dados de nossa pesquisa.

Nesta investigação, o termo “pesquisa” está sendo entendido como uma trajetória efetuada no círculo existencial da compreensão em torno do que se deseja conhecer. A compreensão é aberta na intencionalidade daquele que interroga as coisas, avançando pelo processo de produção do conhecimento e envolvendo-se no movimento inerente a essa produção BICUDO (2000). Intencionalmente, o pesquisador busca conhecer aspectos significativos ao que está sendo interrogado. Como nosso objetivo é contribuir para a compreensão do fenômeno *construção do kit de instrumentos*, a ênfase está no rigor do procedimento e no processo dessa construção. Essa é a terceira característica da pesquisa qualitativa acima apontada.

A quarta característica refere-se à atenção especial que o pesquisador deve ter com o “significado” atribuído aos objetos culturalmente construídos e com o significado das palavras utilizadas pelos autores. Ao tentarmos entender a perspectiva, ou seja, a maneira como o autor em cada obra define, concebe e utiliza cada instrumento, estamos focalizando também o “significado” que os participantes das pesquisas efetuadas pelos autores estudados estão atribuindo às concepções trabalhadas com a utilização desses instrumentos. Nesse momento, o cuidado com a consideração dos pontos de vista é de grande importância, devendo ser colocados em destaque para que a análise subseqüente tenha claro o que foi descrito e as interpretações desdobradas.

A quinta característica é a análise de dados. Nesse momento, optamos pelos recursos de procedimentos da pesquisa fenomenológica, para clarear a análise dos dados bibliográficos. Pretendemos que a análise detalhada, conforme apresentada, manifeste o momento em que sobrepujamos a ingenuidade dos dados. Nessa explicitação da trajetória na busca de compreensões, visamos à compreensão/interpretação do fenômeno.

Tais procedimentos são derivados da maneira como o problema foi formulado e foram seguidos na busca do rigor e respectiva clareza de nossa interpretação sobre o fenômeno em questão, focado pela pergunta **"O que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria"?**

Capítulo 2: Sobre os instrumentos

2.1 Os espelhos

Sobre a invenção do espelho, suspeita-se que sua criação foi inspirada nos espelhos de água. Para ter a forma e as inúmeras utilidades que tem atualmente, o espelho depende do vidro. Por isso, a seguir contaremos um pouco sobre a história da criação do vidro e apresentaremos informações a respeito dos espelhos.

Uma das hipóteses mais aceita para a invenção do vidro é que tenha sido "descoberto" por acaso, há quatro mil anos, nas redondezas do Oriente Médio, pela observação do líquido originário sob as fogueiras feitas sobre solo arenoso. Grãos de areia, quando submetidos à temperatura acima de mil graus centígrados, transformam-se em substância líquida, que se torna vidro.

No século 2 d.C. os romanos já utilizavam o vidro na forma de lentes, espelhos, utensílios domésticos, para decorar interiores, etc. É dos romanos que deriva o mundo envidraçado que habitamos hoje. O vidro foi responsável por duas importantes revoluções. Em 1285, a invenção dos óculos, prolongando assim a vida dos trabalhadores em mais de quinze anos, e possibilitando a invenção da prensa de Gutenberg, em 1445, com padrão pequeno de letras.

No século XVI foi responsável pela revolução iniciada quando Leonardo da Vinci utilizou um vidro metalizado para comparar a figura da tela à figura refletida pelo espelho. Essa prática se espalhou e foi utilizada por diversos artistas da época, desencadeando um movimento artístico de busca pelo real e pelo humano, que precipitou o desmoronamento da ordem social vigente na Idade Média, que valorizava o irreal e o divino, dando origem ao movimento que determinou o período denominado Renascimento.

A busca pelo conhecimento do mundo e das leis da existência foi facilitada pelos vidros, fossem eles simples frascos, microscópios ou telescópios. Aproximaram o mundo, revelaram astros do universo desconhecido e permitiram a visualização de fósseis microscópicos que denunciaram indícios da evolução humana. Isso possibilitou um avanço científico que transformou conceitos e crenças mundiais.

No que se refere aos espelhos, de acordo com ROGER (1824), as primeiras manifestações desse objeto indicam que no início de sua existência não passava de um pedaço de metal polido, que produzia imagens por reflexões, chegando a ter a forma de disco de metal polido levemente convexo. Mais tarde apareceram os espelhos de mão, grande o suficiente para refletir o corpo todo. Estes espelhos foram adotados pelos Celtas, vindo dos Romanos, e no fim da Idade das Trevas tinham se tornado comum por toda a Europa, geralmente feitos de madeira, prata ou de bronze polido.

O espelho era feito de metal polido. Contudo, com o passar dos tempos, ele ganhou uma forma mais produzida e conhecida até os dias atuais: uma lâmina de vidro prateada nas costas. Estes espelhos feitos com sustentação de vidro e costa refletora existem desde o fim do século XII e são produzidos em grande quantidade desde o século XVII. Atualmente, técnicas baratas de produção levaram a uma proliferação de seu uso, não só como luxos salpicados pela mobília, mas em guarda roupas, aparadores, em decorações de espaços públicos, como restaurantes, bares, e tudo o mais que conhecemos hoje e que são ornamentados com espelhos. Até mesmo como recurso didático para trabalhar temas da Geometria.

Na ótica, um espelho é qualquer superfície polida que divirja os raios de luz de acordo com as leis da reflexão. Ele pode ter superfícies planas ou curvadas. Um espelho curvado é côncavo ou convexo, dependendo de como a superfície reflete os raios pelo centro da curvatura do mesmo. Espelhos curvados geralmente têm superfícies que são esféricas, cilíndricas, parabólicas, elipsoidais ou hiperboloidais.

Espelhos esféricos produzem imagens que são reduções, e são utilizados em automóveis. Espelhos cilíndricos convergem todos os raios de um feixe de luz para um único ponto. Espelhos parabólicos podem ser usados para focar raios paralelos para um foco real, como ocorre em um espelho de telescópio, ou para produzir um feixe paralelo de uma origem e seus focos. Um espelho elipsoidal refletirá a luz de um de seus dois pontos focais para o outro e um objeto situado no foco desse espelho terá uma imagem virtual.

Em nosso trabalho, todos os espelhos que compõem os instrumentos são espelhos planos.

2.2 Instrumentos construídos com espelhos utilizados no ensino de geometria

Nesse capítulo, apresentaremos os instrumentos que compõem o kit que organizamos. Em comum, principalmente, têm a característica de serem construídos com espelhos, que possibilitam a reflexão, e por isso são recursos didáticos na apresentação de idéias e explorações de tópicos geométricos. Buscamos, nessa seção do trabalho, apresentar os instrumentos encontrados na bibliografia estudada.

É possível prever o visual a ser obtido nas reflexões dos espelhos. Por isso, pode-se lançar mão destes instrumentos para fins educacionais, principalmente na geometria, devido aos inúmeros objetos que possuem linhas de simetria e que, assim sendo, podem ser visualizados nos espelhos, visto que estes refletem simetricamente um ponto-objeto colocado à sua frente. Alguns autores se referem aos caleidoscópios que permitem a previsão do visual como "caleidoscópios educacionais". Então, iremos nos apropriar desse termo e estendê-lo a todos os instrumentos articulados que constituem este kit, pois só o compõem por permitirem o visual previsto e, assim, possibilitarem tal utilização no ensino.

Pelo aprofundamento na literatura, a respeito de instrumentos construídos com espelhos e utilizados para o ensino de geometria, encontramos relatos da existência e possibilidades de utilização. Pudemos identificar vários instrumentos e, a seguir, estaremos descrevendo cada um deles. A cada instrumento identificado correspondem os relatos e obras a respeito de como cada autor concebeu, definiu e utilizou tal instrumento no âmbito do ensino de geometria.

Dentre estes, estão os espelhos simples e os articulados: espelho plano individual, espelho mágico (mira), caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos, caleidoscópios generalizados, caleidoscópios especiais, ou espelhos articulados especiais.

A seguir, apresentaremos os dados bibliográficos encontrados sobre cada instrumento estudado em nossa pesquisa.

2.21 O espelho mágico

De acordo com WOODWARD (1977), este instrumento foi inventado por Scroggie e Gillespie. Inicialmente, foi fabricado nos Estados Unidos pelas empresas Creative Publications e por Cuisenaire Company of America. É feito por um pedaço de acrílico, na maioria das vezes na cor vermelha transluzente, de aproximadamente 9,0 cm x 15 cm, e é sustentado por dois pedaços de plástico ou madeira. Trata-se de um tipo de espelho plano, utilizado perpendicularmente ao plano horizontal, que possibilita a simetria reflexional, ou seja, para qualquer figura colocada de um lado do espelho, a imagem aparece invertida no outro lado, porque a mira funciona como uma linha de simetria, e a figura, posta de um lado, pode ser vista, por meio do espelho, e desenhada do outro lado do espelho. Segundo o autor, a mira pode ser ajustada sobre uma figura para verificação de linhas de simetria. O procedimento é encontrar um lugar na figura tal que a imagem da porção no lado da frente da mira seja igual à do lado reverso.

Este mesmo autor apresenta a mira como um dispositivo para as aulas de geometria, devido às suas características de reflexão e transparência. Também apresenta uma seqüência de atividades de geometria com o uso deste instrumento e atesta que obteve reações e respostas favoráveis em trabalhos realizados em w*okshops* para professores no estado de Tennessee. Nas atividades propostas encontramos a mira sendo usada, na maioria das vezes, como linha de simetria, cuja característica propicia fazer construções geométricas, tais como retas perpendiculares e paralelas; demonstrar que para um triângulo as bissetrizes e as mediatrizes são concorrentes: e, ainda, que conceitos de congruência de círculos e outras figuras coplanares podem ser investigados por meio da imagem destas nesse espelho.

DAFFER & CLEMENS (1977), dentro do capítulo “pontos, linhas e polígonos”, apresentam este instrumento e propõem seu uso como “espelho teste”, através do qual se pode verificar se uma dada figura plana tem simetria reflexional. É dada a seguinte orientação: trace uma figura num pedaço de papel e tente colocar o espelho em lugares na figura, de tal modo que sua metade refletida no espelho forme exatamente a figura inteira. Se o espelho puder ser colocado em um determinado lugar da figura e proporcionar a visualização da figura inteira, diz-se que esta possui simetria reflexional, e a linha do espelho é a linha de simetria.

Devido à transparência do acrílico, o objeto posto de um lado da mira é refletido inversamente do outro lado do espelho, e pode ser visualizado e desenhado contornando a imagem do objeto vista através do plástico.

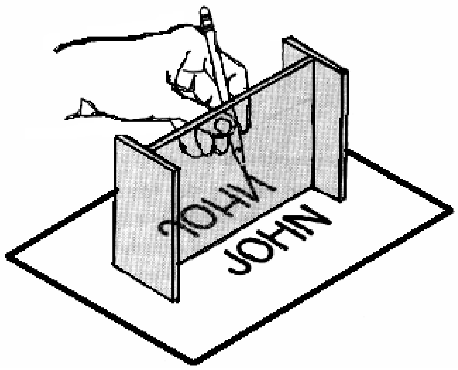


Figura 1: A Mira

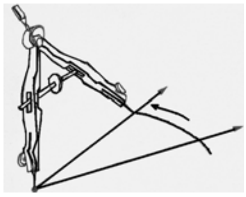
A propósito, para descobrirmos relações geométricas é necessário o desenho preciso de figuras. Para fazer essas construções, o filósofo grego Platô usava como ferramenta somente compasso e régua não graduada. Para Platô, uma construção com régua e compasso estava perfeita quando "a figura precisa de uma idéia geométrica era reproduzida usando somente régua não graduada e compasso, de acordo com o beneplácito do uso dessas ferramentas". Essa restrição é historicamente interessante e algumas idéias muito importantes têm sido descobertas por pessoas que tentaram fazer as mesmas construções usando somente essas ferramentas. Para esse propósito de investigação das relações em geometria, no entanto, DAFFER & CLEMENS (1977) afirmam que não intensificam esforços à procura de ferramentas para fazer construções geométricas, utilizando transferidor e a outras ferramentas especiais. Uma dessas ferramentas especiais é a mira, feita de "*plexiglass*" vermelho, que possui a mesma propriedade de um espelho e ao mesmo tempo é transparente.

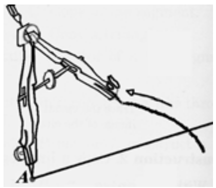
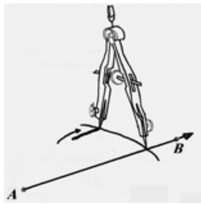
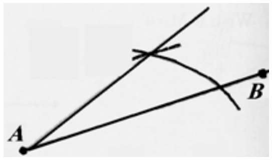
No apêndice deste livro, encontramos atividades como: cópia de pontos, segmentos e desenhos; verificação e desenho de figuras com estrutura simétrica; desenho de figuras geométricas; construção de bissetriz; elaboração de mensagens para serem decifradas quando colocadas frente à mira e visualizadas através da mesma; atividades de construções geométricas, tais como: cópia de círculo; de segmento; de ângulo; de triângulo; construção de bissetor perpendicular de um segmento; bissecção de ângulo; construção de reta perpendicular a uma reta dada por ponto da reta e por ponto fora da mesma, de reta paralela a uma reta dada por ponto fora dela, de triângulo eqüilátero conhecendo o tamanho de um dos lados. Todas as atividades são resolvidas com régua e compasso e com o espelho mágico, paralelamente.

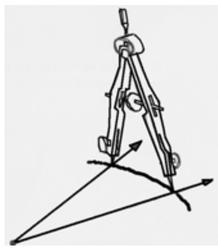
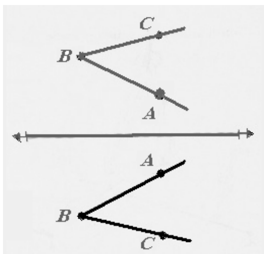
Entre as atividades acima mencionadas, temos a construção: cópia de um ângulo, feita com régua e compasso e com a mira (DAFFER & CLEMENS (1977), p. 393).

<table>
<tr>
<td>
Com régua e compasso

1. Desenhe um arco intersectando ambos os traços do ângulo dado;
2. Desenhe um traço para servir como um lado da cópia;
3. Com o compasso, e mesma abertura como em (1), desenhe um arco cruzando o traço;
4. Abra seu compasso para medir a abertura do ângulo dado;
5. Use a mesma abertura como em (4) e desenhe o arco como mostrado;
6. Desenhe o segundo lado para completar a cópia do ângulo dado.

Com a mira
1. Usando a imagem virtual do ângulo ABC, marque pontos A’, B’ e C’. Use o desenho da aresta da mira para completar a ângulo A’B’C’.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

A mira reaparece nessa obra, no capítulo “movimentos no mundo físico”, como um exemplo de espelho que inverte a imagem do objeto posto à sua frente. Assim, apresenta a obra “*espelho mágico*”, de Escher, que pode ser observada na próxima figura. Também, são propostas investigações que utilizam tesselações e espelhos para desenvolver a intuição sobre inversão (flips).

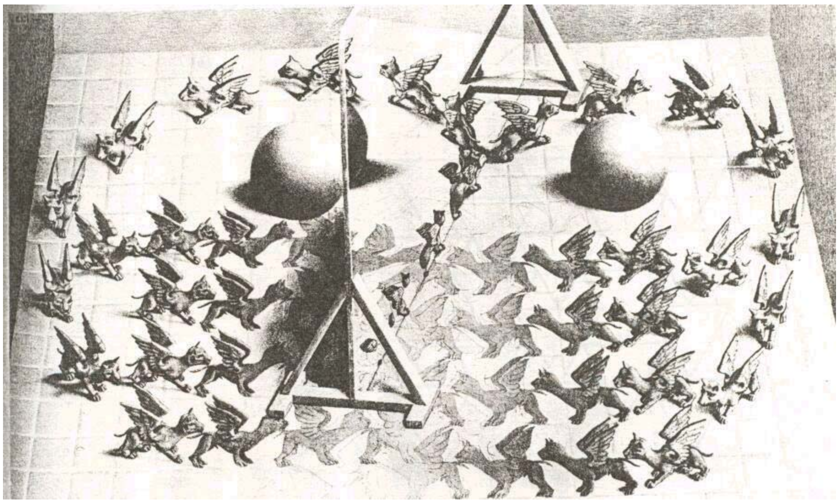
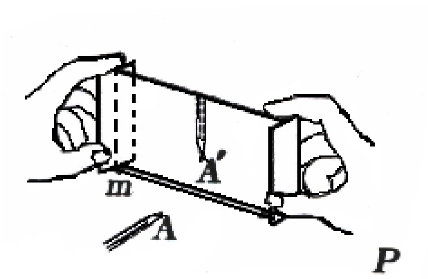


Figura 2: "O espelho mágico", de Escher.

DAYOUT & LOTT (1977) dizem que esta ferramenta geométrica foi inventada por Scroggie e Gillespie para uso em estudos de transformações geométricas. Mas, depois de investigações a respeito da possibilidade de construções euclidianas serem feitas com a mira, e também sobre a possibilidade de resolução dos três famosos problemas[4] da antiguidade, compreendeu-se que a mira poderia ser usada para estudo de reflexões, pois ela funciona como uma linha de reflexão. Isso pode ser observado na prova abaixo, encontrada em DAYOUT & LOTT (1977, p. 395).



Seja A um ponto fora de uma linha m, a reflexão da imagem de A sobre m é o ponto A', se e somente se, m é um bissetor perpendicular do segmento AA´ (Se o ponto A está na linha m, a reflexão da imagem de A é A). A linha m é chamada de linha de reflexão.

[4] Os três problemas da antiguidade são: o problema da duplicação do cubo, o problema da trisecção de um ângulo arbitrário e o da quadratura do círculo.

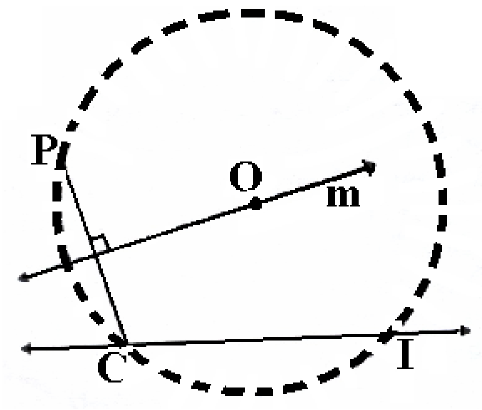
Se um ponto A não está numa dada linha m num plano P, a mira pode ser usada para localizar a imagem refletida A´ de A sobre m. Na figura o lugar da aresta da mira é sobre m e marcado a imagem de A em P observada através da face da mira.

Notação: utilizaremos o símbolo r_m (A) para nos referirmos à imagem de A através de m, então r_m (A)= A´ significa que "a reflexão da imagem de A sobre a linha m é A´". A está sobre m se e só se r_m (A) = A. Note que r_m (A) =A´ se e só se r_m (A´) = A.

Se um ponto R e sua imagem refletida Q num plano P são dados, a linha de reflexão pode ser localizada se colocarmos a mira entre esses dois pontos de modo que um reflita o outro. Então trace uma linha sobre a aresta da mira colocada de modo que satisfaça a condição de que um reflita o outro. Desse modo, a linha desenhada é o bissetor perpendicular l de RQ e Q = r_l (R).

Através desse experimento, compreendeu-se que a mira poderia ser usada para resolver muitos problemas euclidianos de construções com régua e compasso, e o autor passou, então, a exemplificar problemas que podem ser resolvidos com este instrumento. Encontramos atividades de construção de reta paralela a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta; transferência de medidas entre retas não paralelas; intersecção de duas linhas, intersecção de duas circunferências e de uma reta e uma circunferência. Com isso, provou-se que todas as construções euclidianas podem ser feitas com a mira. Mas, ainda permaneciam questionamentos sobre a possibilidade das construções da antiguidade, e este autor resolveu o problema da trisecção de um ângulo qualquer com a mira, mostrando que ela é uma poderosíssima ferramenta. Por essa construção conclui-se que pode ser construído um determinado ângulo, e, por isso, muitos polígonos regulares.

Veja a resolução abaixo encontrada nessa mesma obra (DAYOUT & LOTT (1977), p. 396), sobre a intersecção de uma reta com uma circunferência.



Seja C é um ponto requerido. Então, PC é a corda de um dado círculo (O,OP) e o bissetor perpendicular de PC contém o centro O do círculo dado. Então, C é o ponto na dada linha l e é a reflexão de P sobre essa linha através do centro de um dado círculo. Com a mira, encontre a linha m através de O que reflita P sobre a dada linha l, e seja C = r_m *(P). Então C é o ponto requerido.*

MARTIN (1979) usa a mira para apresentar o axioma da existência de uma linha de simetria entre dois segmentos no plano. Este axioma também é usado para a construção do segmento de tamanho $\sqrt[3]{k}$, onde o segmento unitário e o k são dados. Assim, ele mostra a construção para o caso especial $k=2$, conhecido por problema de Délian. Ele mostra, ainda o uso da mira na atividade de construção de rotações do cubo. Devido a esta última construção e da trisecção do ângulo (esta última inserida na obra de DAYOUB & LOTT, 1977), MARTIN (1979) constata que a mira pode ser utilizada com sucesso para todos os problemas cuja representação analítica produz uma equação cúbica ou quártica.

BARBOSA (1993), no capítulo intitulado “simetria, espelhos e caleidoscópios”, faz referência à existência de “espelhos” coloridos, feitos de acrílico, pouco translúcidos, com um dispositivo para sustentação do espelho perpendicularmente ao plano do desenho, que possibilitam a ocorrência simultânea do fenômeno da reflexão e da simetria reflexional, ou seja, funcionam como espelho e também propagam a luz. Dessa forma, pode-se desenhar a figura simétrica olhando a figura-imagem através desse instrumento. O autor sugere o uso deste "espelho" no estudo do fenômeno da reflexão e do conceito de simetria reflexional. Por funcionar como um espelho, possibilitando em sua face o fenômeno da reflexão, este instrumento é conhecido no Brasil como espelho mágico e já fez parte das aulas de Educação Artística nas escolas, para cópia de desenhos.

2.22 O espelho simples

Trata-se de um pedaço de espelho, geralmente retangular, que pode ser cortado com medidas aproximadas de 15 cm de largura por 19 cm de comprimento, que pode ser encapado de modo que fortaleça a estrutura, diminua a fragilidade do vidro que sustenta a parte espelhada e aumente a proteção do usuário no manuseio deste.

O fenômeno da reflexão que obedece às leis da reflexão da ótica geométrica faz com que, dada uma figura qualquer num plano, colocada à frente e perpendicularmente a um espelho plano, obtenha-se o simétrico da figura em relação ao espelho. O espelho funciona como uma linha de simetria, e, dessa maneira, promovem-se situações de aprendizagem exploratórias de propriedades e conceitos geométricos.

WALTER (1972) apresenta resultados de uma experiência feita com espelhos simples, sendo utilizados juntamente com cartões, criados pela autora, como um meio de obtenção de algumas experiências geométricas que combinam a possibilidade de aprendizagem com o elemento de jogo. Os cartões contêm figuras simples coloridas e a proposta é o desafio de se colocar o espelho em determinados lugares nos cartões para obter figuras e, assim, poder notar que a posição do objeto e da imagem está relacionada com o lugar onde é colocado o espelho.

Por exemplo, na figura abaixo, a proposta é o desafio de se colocar o espelho em determinado lugar da primeira figura para tentar obter a segunda ou a terceira figura.

Figura 3: Cartões de WALTER (1972)

Assim, os espelhos simples podem ser usados com crianças de toda idade, oportunizando circunstâncias adequadas e favoráveis para a prática de reconhecimento de figuras diferentes e seleção de partes de figuras congruentes a outras; para notar propriedades de figuras geométricas, como diâmetro e raio; para explorar conceitos de orientação, rotação, simetria, linha de simetria, reflexão em uma linha, etc.

JACOBS (1974), em um capítulo nomeado "Transformações", trata de tópicos como: reflexão de um ponto e outros objetos, linhas de simetria, translações, rotações e ponto simétrico. Além de régua e compasso, para abordar o assunto *reflexão de um ponto,* este autor utiliza um espelho plano retangular para localizar a reflexão de pontos através de uma linha dada. No tópico dois, "Mais sobre reflexões", este instrumento é empregado para checagem da figura desenhada com régua e compasso, através de uma linha dada. Entre as atividades que propõe com o uso de espelhos, estão as que exploram o conceito de translação, através de duas sucessivas reflexões paralelas.

DAFFER & CLEMENS (1977) propõem o uso de um espelho para descoberta de linhas de simetria de figuras e visualização das mesmas no espelho, quando este é colocado sobre uma linha de simetria da figura.

WALTER (1981) afirma que o recurso espelho tem sido usado em muitas aulas e com o auxílio deste, podem ser feitos e comparados padrões e figuras e explorado o conceito de simetria, como por exemplo, de letras do alfabeto.

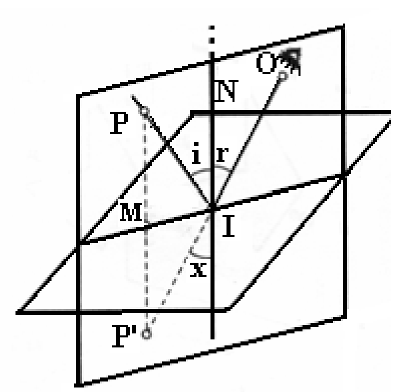
Para BARBOSA (1993), os espelhos são superfícies metálicas polidas. Mesmo nos espelhos comuns é a camada metálica, geralmente de prata ou alumínio, que funciona como espelho, sendo o vidro apenas um suporte e proteção. Em relação à reflexão possibilitada pelo espelho, o autor apresenta um estudo sobre este fenômeno, que obedece às leis da ótica geométrica, a seguir:

i) o raio normal à superfície no ponto de incidência e o raio refletido estão num mesmo plano, e

ii) o ângulo de incidência i (do raio incidente com a normal) é igual ao ângulo de reflexão (do raio com a normal): $i=r$.

A imagem de um ponto, obtida através do espelho, é o encontro dos raios refletidos ou dos prolongamentos destes, sendo chamada de imagem virtual.

Seja esse esquema representativo, encontrado em BARBOSA (1993, p.38), para a reflexão em um espelho plano, de um ponto *P* sendo visto pelo observador *O*.



Um ponto-objeto P frente a um espelho plano sendo visto por um observador (olho) O através do espelho, parece ao observador estar em P', atrás do espelho (sua imagem virtual), impressão causada pelo fato de O, o observador, receber o raio luminoso refletido, e que, vindo de P, incide no espelho e , segundo as duas leis dadas, reflete-se atingindo O, podendo assim ser visualizado.

Em razão da primeira lei, os pontos P, I, O e P' estão num mesmo plano; e em razão da segunda, resulta que P' é o simétrico de P em relação à reta intersecção desse plano com o plano do espelho. Desse modo se justifica a denominação simetria reflexional ou reflexão dada à simetria axial.

Este autor sugere o uso do espelho simples para busca de figuras com estrutura simétrica, contagem dos eixos de simetria e estudo de conceitos e propriedades da simetria, verificação da coincidência ou não da imagem com a outra parte da figura.

MURARI (1999) apresenta o estudo sobre as reflexões em espelhos obedecendo às leis da ótica geométrica, consoante BARBOSA (1993). Nessa obra, o autor utiliza espelho plano para trabalho com figuras geométricas que tenham linhas de simetria, explorando o conceito de linha de simetria, figura simétrica e algumas propriedades destas.

ALMEIDA (2003) lança mão deste espelho em conjunto com outros espelhos e caleidoscópios, no trabalho de campo de seu estudo com uma classe de alunos do segundo ano do ensino médio, e utiliza-o em suas atividades para promover situações de aprendizagem onde os alunos pesquisam as possibilidades de colocação do espelho sobre figuras e objetos, explorando conceitos como: a reflexão de pontos e figuras, eixo de simetria, figuras com estrutura simétrica reflexional, congruência e orientação.

MARTINS (2003) usa este espelho no encaminhamento de sua proposta de ensino de geometria, cujo trabalho de campo foi com uma sexta série, e apresenta atividades exploratórias da idéia e da propriedade da reflexão, dos conceitos de simetria, ponto simétrico, eixo simétrico tanto de figuras geométricas planas como de figuras geométricas espaciais, e reconhecimento de eixos de simetria de planificação de figuras espaciais. Finaliza as atividades com o uso deste espelho estudando orientação: sentido horário e anti-horário.

2.23 Dois espelhos planos verticais e paralelos

Outras oportunidades de exploração de conceitos geométricos podem ainda ser provocadas quando se dispõe de dois espelhos simples planos, que podem ser colocados de maneira vertical e paralelamente, com as faces frente a frente. Estes espelhos podem ser de mesma medida que o espelho simples anteriormente descrito. Quando um objeto qualquer é colocado entre dois espelhos planos, verticais e paralelos temos um número infinito de imagens formadas entre os mesmos, como nos afirma MURARI (1999). A abordagem de conceitos de orientação e translação é favorecida com o uso de espelhos dispostos dessa forma. MARTINS (2003) e ALMEIDA (2003) utilizam esses dois espelhos paralelos para abordagem dos conceitos acima mencionados.

JACOBS (1974) e DAFFER & CLEMENS (1977) mostram a figura a seguir para ilustrar a idéia de reflexões sucessivas. Duas reflexões sucessivas através de linhas paralelas é uma translação. Desse modo, dois espelhos paralelos podem ser utilizados para explorar o conceito de translação.

Figura 4: Reflexões[5] sucessivas em espelhos paralelos

[5] Observando atentamente a figura acima notamos erros do desenhista em relação à lei da reflexão em espelhos. Apesar disso, pode-se notar a infinitude de imagens geradas em dois espelhos paralelos.

2.24 Os caleidoscópios

2. 241 Notas e curiosidades sobre o caleidoscópio

> “*la date de l’année 1823 était pourtant indiquée par les deux objects à la mode alors dans la classe bourgeoise qui étaient sur une table, savoir um kaléidoscope et une lampe de fer-blanc moiré*”. Victor Hugo, *Les Misérables (II, III, I).*

Desde a lenda de Narciso, apaixonado por sua própria imagem vista nas águas claras de uma fonte, passando pela aventura de Alice[6] na casa dos espelhos, este objeto tem sido sempre uma fonte de mistério e fascinação. A reflexão em um espelho plano simples gera imagens idênticas, enquanto que diferentes e mais complexos padrões são produzidos com o uso de múltiplos espelhos. A combinação de espelhos produz o efeito da multiplicação da imagem, criando uma rede de imagens formadas pela conexão entre o ângulo dos espelhos e o número de imagens formadas. Aplicações de tais combinações de espelhos são descritas pelo botânico Richard Bradley em seu livro *New Improvements in Planting and Gardening, both Philosofical and Pratical*, de 1717, no qual os conjuntos de espelhos são usados para preparação de “*designs*” simétricos para formas de jardins, conforme GRAF & HOGDSON (1990).

Em 1817, um físico escocês Sir David Brewster patenteou um “brinquedo” chamado caleidoscópio, cujo nome é derivado do grego, *kalos* (belo), *eidos* (aspecto) e *skopien* (ver). Este instrumento ótico que Brewster criou para exibição de belas formas é resultado de seus estudos sobre a polarização dos raios de luz por múltiplas reflexões.

Em ROGER, (1824), o caleidoscópio é descrito como um instrumento ótico, inventado por Sir David Brewster, que por um particular arranjo de espelhos, colocados em certa posição, produz combinações simétricas de imagens, notáveis pelas belas e infinitas variações possíveis. A próxima figura mostra o arranjo de espelhos em um caleidoscópio popular.

---

[6] Personagem do livro “Alice no país das maravilhas” do autor Lewis Carroll.

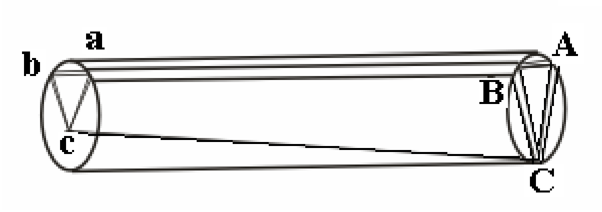


Figura 5: Arranjo de espelhos em um **c**aleidoscópio popular

O caleidoscópio foi um fenômeno popular desde quando começou a ser produzido, de tal forma que foram vendidos em Londres e Paris, em um espaço de três meses, mais de dois milhões deles. Segundo ROGER, (1824) pode-se verificar abaixo sobre o sucesso do caleidoscópio naquela época.

> *"The sensation it excited in London throughout all rank of people was astonishing. Kaleidoscopes were manufactured in immense numbers, and were sold as rapidly as they could be made. The instrument was in every body's handy, and people were every where seen, even at the corner of streets, looking through the kaleidoscope. It afforded delight to the poor as well as the rich, to the old as well as the young. Large cargoes of then were sent abroad, particularly to the East Indies. They very soon became known throughout Europe, and have been met with a by travelers even in the most obscure and etired illages in Switzerland."* (ROGER, 1824, p.163).

Estas curiosidades mencionadas a respeito do caleidoscópio confirmam que ele não exerceu fascínio apenas no tempo em que foi inventado, pois é, ainda, um instrumento extremamente atrativo e comercialmente oferecido há mais de 180 anos, em muitas versões e pelos mais variados preços. E a infalível fascinação dos usuários é que leva as pessoas a manipulá-lo. O caleidoscópio oferece uma rica oportunidade de apresentar matemática a um grande número de pessoas de uma forma atrativa. Ele é, essencialmente, um dispositivo geométrico que produz formas pela reflexão simétrica.

Em GRAF & HOGDSON (1990), encontramos a informação de que existe um software, produzido pela IBM, e desenvolvido por estudantes e professores no curso "Computadores em Educação Matemática" da Universidade de Berlin, usando LOGO como linguagem de programação. O software contém a simulação de um caleidoscópio de dois espelhos e oferece a escolha de: quatro diferentes tipos de caleidoscópios, dos ângulos do caleidoscópio, da posição dos objetos e do próprio objeto (o qual pode ser colorido), que será colocado entre os espelhos para ser refletido neles.

No dicionário[7] encontramos que caleidoscópio é "um brinquedo cilíndrico com espelhos dispostos longitudinalmente no interior, os quais refletem as imagens de fragmentos móveis de vidro colorido presentes no fundo do tubo, gerando inúmeros desenhos de grande beleza e simetria; este também é conhecido por calidoscópio". Esses caleidoscópios formam imagens múltiplas, pois as imagens obtidas num dos espelhos formam novas imagens nos outros dois e assim, sucessivamente, e são conhecidos como caleidoscópios populares por gerarem imagens imprevisíveis.

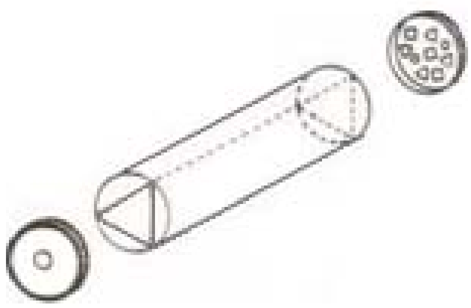


Figura 6: Caleidoscópio popular

Por outro lado, tem-se o caleidoscópio educacional, semelhante ao popular, mas com um diferencial: a previsibilidade das imagens geradas. Uma das extremidades nos caleidoscópios é aberta para substituição de "desenhos" (bases) que irão produzir, através das reflexões nos espelhos,

---

[7] Minidicionário Ediouro / Sérgio Ximenes - 5ª ed. – Rio de Janeiro: Ediouro, 1998.

o visual desejado. A outra extremidade possui um orifício para observação.

Devido à previsibilidade das imagens é que se torna adequado o uso desses instrumentos como recursos educacionais, principalmente nas aulas de geometria. Enquanto os espelhos possibilitam a reflexão, os caleidoscópios educacionais permitem a previsibilidade das imagens obtidas. O termo "base" é sempre mencionado quando se fala em caleidoscópio. As *bases* são desenhos construídos graficamente através de régua e compasso ou no computador, tendo em vista os ângulos dos espelhos, para obtenção do visual almejado. Em MURARI (2004, p.203), referindo-se a bases para pavimentações do plano, encontramos que:

> *"as bases substituíveis são figuras triangulares, quadradas ou retangulares (de acordo com o formato do caleidoscópio) nas quais são construídos segmentos apropriados que, refletidos pelos espelhos, formarão a pavimentação."*

Em MURARI (1999), encontramos que a primeira publicação relativa ao instrumento é devida a Kirscher, em 1646. No Brasil, apesar de o vocábulo encontrado no dicionário ser *calidoscópio,* a forma mais usualmente utilizada é "*caleidoscópio*" e sua aparição como material didático se deu na obra "Brincando com espelhos[8]", provavelmente da década de 1950/1960. Enquanto isso acontecia no Brasil, em outros países (Canadá e Estados Unidos) o incentivo ao uso desses instrumentos em atividades educacionais tomava força, principalmente no que se referem às aplicações educacionais.

Um conjunto de espelhos é denominado "caleidoscópio" se possibilitar a obtenção repetida e perfeita de imagens, conforme MURARI e PEREZ (1999). O conjunto de dois espelhos articulados, de acordo com BALL & COXETER (1987), é chamado de "caleidoscópio ordinário", enquanto MURARI (1999) já emprega o termo *caleidoscópio* para conjuntos com dois, três ou quatro espelhos, articulados, perpendiculares

[8] Esse livro de Doze páginas foi escrito pela Profª Maria Julieta Sebastiani Ormastroni; pertence à coleção "Cientistas de Amanhã", do IBECC-Instituto Brasileiro de Educação Ciência e Cultura/SP. Trata-se de uma obra dirigida ao ensino de Ciências, cujo enfoque são as reflexões possíveis nos espelhos.

a um plano, que, em geral, são chamados *caleidoscópios planos*. O conjunto de três espelhos articulados, conforme em BALL & COXETER (1987), na forma de uma pirâmide invertida, que possibilita a visualização de pontos sobre uma esfera, é chamado de *caleidoscópio generalizado*.

2.242 O caleidoscópio com dois espelhos

Quando se articulam dois espelhos planos, dependendo do ângulo entre os espelhos tem-se a repetição perfeita de imagens. Nesse caso, dizemos que eles formam um caleidoscópio ordinário, de acordo com BALL & COXETER (1987), e, ainda que sejam apenas dois espelhos articulados temos a formação de imagens múltiplas, obtidas pela reflexão sucessiva de pontos-objeto postos entre os espelhos.

ALSPAUGH (1970) chama estes dois espelhos articulados de *caleidoscópio geométrico* e diz que este é um interessante tipo de instrumento que oferece possibilidades de exploração de tópicos da geometria, tais como: polígonos regulares, coordenadas de pontos em um plano, reflexões e simetria. Ele afirma que a maioria das crianças participa dos trabalhos oferecidos pelo mesmo, o qual é muito útil para professores que desejam promover interesse e motivação pelo uso de novos materiais.

A construção é simples e acessível: são apenas dois espelhos unidos, por exemplo, por um pedaço de fita adesiva, o que possibilita a abertura de vários ângulos. Um interessante ponto sobre este incomum caleidoscópio é o aparente número ilimitado de conceitos matemáticos que podem ser ilustrados através da simples mudança dos ângulos entre os espelhos. Quando estes espelhos são colocados frente a alunos e professores, a maioria sente-se fascinada pelo mundo das imagens que lhe saltam aos olhos através das mudanças das figuras. Como exemplo das possibilidades da utilização deste, o autor apresenta atividades que exploram a questão dos ângulos formados entre os espelhos, e a obtenção até mesmo de círculos, quando se colocam arcos entre os espelhos. Abaixo, temos uma tabela que relaciona o ângulo entre os espelhos com o número de imagens[9] obtidas pelas reflexões e com as possíveis construções.

[9] Note na tabela a seguir que o autor conta como “imagem” também o próprio objeto.

Θ	Imagens	Possíveis construções
180º	2	Linhas paralelas, círculos.
120º	3	Triângulos, círculos.
90º	4	Quadrados, paralelogramos linhas paralelas, círculos.
72º	5	Pentágonos, círculos
60º	6	Hexágonos, triângulos, círculos.
51 3/7º	7	Heptágonos, círculos.
45º	8	Octógonos, quadrados, círculos.
40º	9	Eneágonos, círculos.
36º	10	Decágonos, pentágonos, círculo.

Fonte: Alspaugh, C. A., Kaleidoscope Geometry, Arithmetic Teacher 17, (1970), p. 117.

A foto abaixo, encontrada também na obra acima referenciada na página 116, mostra um aluno trabalhando com um caleidoscópio de dois espelhos, no qual se pode observar o visual de um pentágono na reflexão dos espelhos.

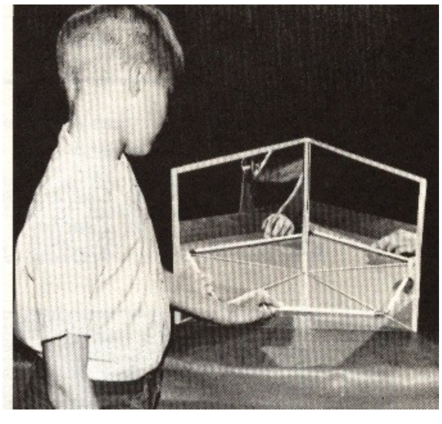


Figura 7: Caleidoscópio com dois espelhos

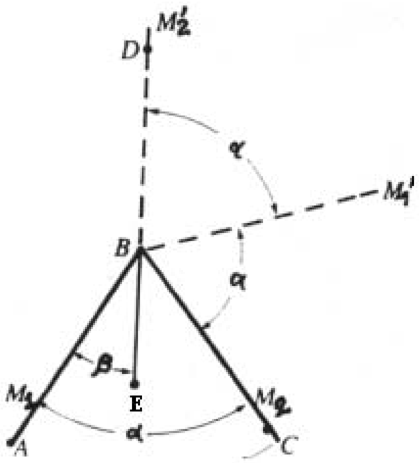
Este autor acrescenta, ainda, que com o uso de caleidoscópios muitos trabalhos podem ser feitos com a criatividade dos alunos e professores. Cartazes podem ser construídos pelos estudantes e pelo professor ilustrando idéias matemáticas e artísticas; crianças e jovens podem ser incentivados a criar ou copiar "*designs*" e polígonos usando canetas coloridas. Conclui que estas sugestões querem somente delinear algumas das muitas possibilidades de uso do caleidoscópio no estudo da matemática elementar.

ROBERTSON (1986) utiliza esses espelhos articulados, feitos com duas lâminas de espelho protegidas por papelão e coladas ao longo de uma aresta, como uma ferramenta para fazer construções geométricas, tais como: bissecção e trisecção de ângulos, construção de ângulos de medidas $2\pi/n$, com n = 3, 4, 5,...; de reta perpendicular por um ponto fora dessa reta, de reta perpendicular a um dado segmento, e de polígono regular com *n* lados a partir de um lado dado.

Este autor ainda ressalta o valor das construções geométricas na história da matemática e comenta que a idéia ocorreu durante um trabalho sobre problemas referentes à mesa de jogo de bilhar, e que o espelho fornece uma estratégia única, além de ser uma ferramenta dinâmica e poderosa, pois tudo o que se faz com a régua, com o compasso e com o transferidor, pode ser feito com a ajuda deste caleidoscópio.

Segue abaixo, conforme ROBERTSON (1986, p. 383), a construção da bissecção do ângulo dado *ABC*.

1. *Coloque um espelho ao longo de AB e o outro ao alongo de BC.*
2. *Coloque o olho em E, como mostra a figura abaixo, e fixe-o naquele ponto. Temos então dois casos a partir dessa fixação. São eles:* $\beta \le \frac{1}{2}\alpha$ *e* $\beta \ge \frac{1}{2}\alpha$, *Faremos aqui o caso em que* $\beta \le \frac{1}{2}\alpha$.



3. *Conte o número de cunhas k que preenchem o ângulo ABD (na figura K=3).*

4. *Mova M_2 para a esquerda, mantendo M_1 fixo até que o número de cunhas encha do ângulo ABD (como determinado pela reta que parte de E) é 2k. Estes ângulos são de medida* $\alpha/2$.

WALTER (1972), para abordar o tópico "rotações", utiliza dois espelhos articulados sobre duas linhas que se intersectam. E JACOBS (1974), no tópico 'pontos simétricos', apresenta o caleidoscópio de dois espelhos para reproduzir padrões simétricos.

Para WALTER (1981), com dois espelhos articulados pode-se utilizar segmentos de madeira, papelão ou outro material, entre os espelhos, e, assim, visualizar polígonos. Dessa forma, estes espelhos podem ser utilizados na introdução desse tema. A variação da medida dos ângulos entre os dois espelhos faz com que se vejam quantidades diferentes de objetos como os que são postos entre eles, bem como o estudo dos ângulos centrais de polígonos regulares.

JACOBS (1974) apresenta o caleidoscópio como sendo um simples instrumento ótico que usa dois espelhos para produzir padrões simétricos. Utiliza este instrumento para explorar o conceito de rotação, por meio da reflexão de uma figura colocada entre dois espelhos posicionados sobre duas linhas que se intersectam.

Como exemplo da utilização deste caleidoscópio para exploração do conceito de pontos simétricos e linhas de simetria, observe a figura ao lado, encontrada na página 221, dessa obra, cujo ângulo central do caleidoscópio é 60º.

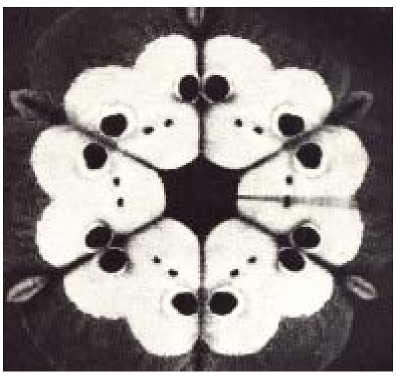


Figura 8: Padrão produzido pelo caleidoscópio com dois espelhos

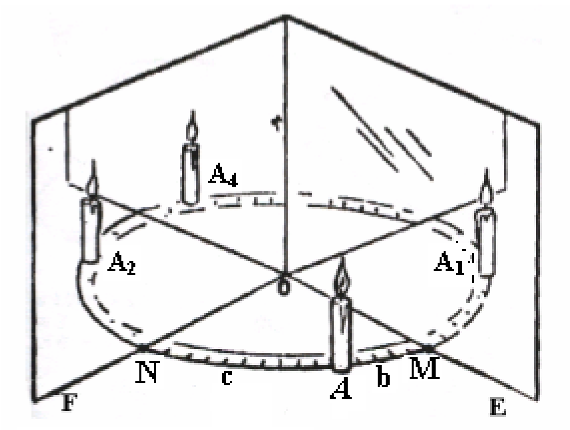
Em BALL & COXETER (1987), encontramos que um caleidoscópio ordinário é constituído, essencialmente, por dois espelhos planos inclinados, em ângulos de $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{4}$ e um ponto-objeto colocado entre eles será refletido em ambos, cujo resultado será o objeto visto 6 ou 8 vezes (dependendo do ângulo), num arranjo simétrico atrativo. Para um ângulo de medida $\frac{\pi}{n}$, ele dará *2n* imagens (incluindo o próprio objeto).

BARBOSA (1993) dedica dois capítulos ao assunto espelhos e caleidoscópios. No que diz respeito ao caleidoscópio com dois espelhos, o autor apresenta um estudo sobre as imagens produzidas por estes, e sobre o número de imagens obtidas pela articulação dos ângulos dos espelhos. Também mostra o estudo da variação do número de imagens de um ponto-objeto colocado entre os espelhos, conforme o local em que está localizado o ponto e o ângulo em que está aberto o caleidoscópio. A variação de ângulos entre os espelhos e a colocação de diferentes desenhos entre os ângulos formados permite a obtenção de várias figuras, entre elas, rosáceas e estrelados.

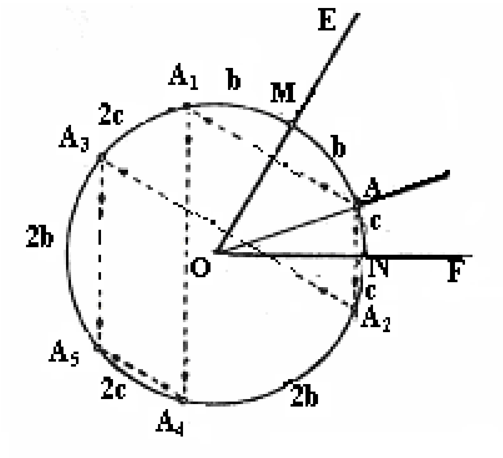
BARBOSA (1957) apresenta um estudo com o objetivo de contribuir para o ensino de física no ensino secundário, observação esta contida na introdução do trabalho. No desenvolvimento do texto, encontra-se um estudo sobre a construção de imagens em espelhos planos angulares, o qual contempla a variação de pontos-objeto colocados entre os ângulos dos espelhos.

Conforme BARBOSA (1957, p. 5),

> *"Considere dois espelhos E e F de eixo r em torno do qual possam girar formando entre si um ângulo a. Seja um objeto pontual A, tal que não esteja em posição particular, por isso ligando-o por perpendicular a r no ponto O teremos os ângulos AOE e AOF, em geral diferentes, que podemos chamar de b e c. Considerando a figura abaixo, observe.*



Seja A_1 a imagem de A em E e A_2 a imagem de A em F. Sabe-se que estas imagens são simétricas em relação aos respectivos espelhos. Pela simetria podemos afirmar a igualdade das distâncias OA OA_1 e OA_2; logo, esses pontos estão numa circunferência C de centro O e raio OA.



De acordo com a figura anterior, seja A_3 a imagem de A_2 em E, e A_4 imagem de A_1 em F. Pela mesma razão anterior A_5 e A_6 estarão em C, assim sucessivamente as outras imagens, pode-se provar que, estão em C. Esse estudo determina duas propriedades que se referem á distribuição de imagens formadas pelos espelhos planos angulares. A primeira diz que todas as imagens de um objeto pontual colocado entre dois espelhos planos por reflexões múltiplas estão situadas numa circunferência normal à intersecção dos espelhos e que passa pelo objeto. A segunda

> *propriedade anuncia que as imagens obtidas com o espelho E são obtidas marcando em C a partir do objeto os arcos 2b e 2c, alternadamente a começar de 2b. E as imagens obtidas com o espelho F são obtidas marcando em C a partir do objeto os arcos 2b e 2c alternadamente a começar de 2c. A partir dessa segunda propriedade é possível encontrar as imagens utilizando os referidos arcos marcados na circunferência C. Essas duas propriedades permitem a dedução da fórmula* $n = \frac{360 - R}{a} + n'$, *onde: n é o número de imagens possíveis em R; (n'= -1, 0, 1 ou 2); R é o resultado da divisão de 360º por 2.a (R=0, 0<R≤2b, 2b<R<2c, 2c<R<2a), e a é um ângulo..*

MURARI (1999) apresenta a construção teórica e prática, partindo de dois espelhos planos e uma fita adesiva para uni-los. Sugere, para uma construção mais aperfeiçoada deste caleidoscópio com dois espelhos articulados, que se cole nos mesmos um pedaço de papelão envolvendo-os e ao mesmo tempo, dando lhes o formato de um livro. Apresenta o emprego e propriedades da reflexão em espelhos planos articulados, além de atividades propostas com o uso destes, que exploram a obtenção de poli-vértices e polígonos pelos ângulos formados entre os espelhos.

Em MARTINS (2003) encontramos atividades que propõem o estudo das relações entre os ângulos dos espelhos e os polígonos obtidos pela reflexão neles, e outras introdutórias do conceito de translação, rotação e reflexão.

ALMEIDA (2003) utiliza os espelhos planos articulados para abordar conceitos de orientação e, principalmente, para reforçar algumas propriedades dos polígonos regulares.

É necessário colocarem-se objetos ou desenhos entre os espelhos para a obtenção de visualizações, as quais permitem o desenvolvimento de atividades que conduzem à exploração de conceitos e propriedades possíveis com estes espelhos. Surge, então, a necessidade de construção gráfica, através de régua e compasso, ou computador, de figuras, nas quais são construídos segmentos apropriados, que refletidos nos espelhos geram o visual previsto, de acordo com os ângulos dos espelhos e dos segmentos traçados na figura.

GRAF e HOGDSON (1990) abordam o fato de, no ato da reflexão nos espelhos, estes reverterem somente os lados esquerdo e direito das coisas e não inverterem os lados de cima e de baixo, cujo fenômeno pode gerar situações de confusão. Para entender o que realmente acontece nos espelhos, este autor sugere que se tomem dois espelhos articulados, abrindo-os com ângulo de 90º e dispostos perpendicularmente ao plano. É sabido, que nessa situação, a rotação de 90º de uma imagem, por exemplo, da própria face, não a põe de cabeça para baixo. Mas, se dois espelhos são articulados em um ângulo reto, com um dos espelhos na vertical e outro na horizontal, eles produzem uma imagem de ponta-cabeça. A imagem aparece invertida devido à rotação de um ângulo de 90º em relação aos espelhos dispostos perpendicularmente ao plano. As figuras a seguir ilustram o que estamos falando.

Figura 9: Reflexão em caleidoscópio com dois espelhos

BISHOP & FETTERS (1976) apresentam uma maneira intuitiva de estudar isometrias do plano usando um espelho simples e dois espelhos articulados, a partir de atividades que exploram o entendimento de reflexões, rotações, translações e "*glide reflexions*".

Um "*glide reflexion*" pode ser definido como uma translação seguida por uma reflexão através de uma linha paralela a um vetor de translação. A *reflexão* dá uma orientação oposta para a imagem; se o ângulo central é de 90º têm-se três imagens, duas da quais têm orientação oposta à figura original. Uma *rotação* pode ser ilustrada usando espelhos articulados. Se os espelhos estão articulados com ângulo de 90º, podemos notar que a primeira imagem tem uma orientação oposta, enquanto que a segunda imagem tem a mesma orientação que a original. Propriedades de *translação* podem ser estudadas usando espelhos paralelos, pois, o produto de duas reflexões paralelas é uma translação.

JACOBS (1970) utiliza o caleidoscópio com dois espelhos para produzir polígonos regulares, a partir da variação dos ângulos centrais dos espelhos.

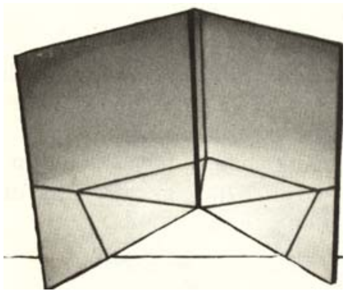


Figura 10: Caleidoscópio com dois espelhos

DAFFER & CLEMENS (1977), no capítulo "Movimentos no mundo físico", referem-se ao movimento chamado *flips*[10], e suscita a questão que os espelhos parecem "*to flip*" o objeto posto à frente. O resultado é mostrado na imagem no espelho. Por isso, arquitetos e decoradores têm utilizado espelhos na obtenção de muitos efeitos interessantes, e cientistas têm usado para construir telescópios.

Para a compreensão do que denomina *flip,* o autor propõe que os dois espelhos sejam articulados com ângulos de 90º, conforme as figuras ao lado, e que se olhe para eles para ver o que ocorre com a imagem em cada caso. E questiona: "o que faz sua imagem diferir de sua imagem usual, obtida em um espelho simples?" e "você pode explicar essa sua observação?".

[10] Denomina-se *flip* o movimento rápido de girar alguma coisa sobre ou para uma posição diferente.

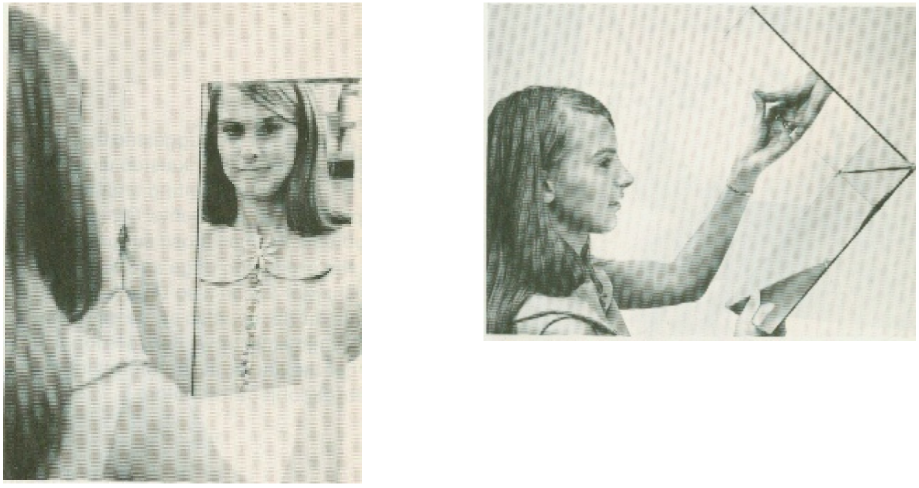


Figura 11: Espelhos articulados dispostos em posições diferentes

2.243 Caleidoscópios com três espelhos

2.2431 Caleidoscópio educacional individual com três espelhos

KINGSTON (1957) interessa-se pela visualização em três espelhos planos articulados perpendiculares a um mesmo plano e apresenta, especialmente, um estudo sobre a obtenção de tesselações planas por polígonos.

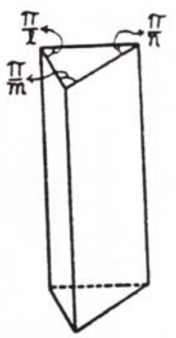


Figura 12: Estrutura do caleidoscópio individual com três espelhos

Existem onze diferentes tesselações planas uniformes, constituídas por polígonos regulares, os quais estão identicamente distribuídos ao redor de cada vértice em cada tipo de tesselação. Dessas, oito podem ser reproduzidas através de bases específicas, colocadas sob um simples arranjo de espelhos, pois são o que se denomina aresta-reflexiva. Isso significa que são simétricas, com respeito à linha que passa pelo ponto médio de qualquer aresta dos polígonos que as formam.

Prosseguindo, o autor apresenta um breve estudo sobre a visualização em um espelho e em dois espelhos (articulados), como uma preparação para a visualização de tesselações em três espelhos, apresentando a dedução dos ângulos formados pelos três espelhos e propondo a construção dos três conjuntos abaixo deduzidos, bem como explorando a obtenção das oito tesselações planas uniformes que podem ser obtidas por meio dos mesmos.

Os três ângulos formados entre os espelhos são representados por

$\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$ radianos, então $\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} = \pi$ e há só três soluções inteiras para a equação $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$, que são (3,3,3) (2,4,4) e (2,3,6). Para a construção dos caleidoscópios com essas configurações, KINGSTON (1957) afirma que não são necessários nove espelhos, mas apenas quatro pedaços retangulares de espelhos planos com altura conveniente, sugerida de 12 polegadas e com base de tamanho, respectivamente, de 3, 6, 6 e $6\sqrt{2}$ centímetros (que equivale aproximadamente a 8,5 cm). Esses pedaços de espelho podem ser articulados três a três, unidos por pedaços de fita adesiva (que devem agir como três anéis), ao longo de suas 12 polegadas de medidas. Ainda sugere que sejam aplicados pedaços estreitos de fita adesiva ao longo das arestas expostas, para evitar inevitáveis cortes nos dedos, para providenciar um efeito amortecedor e prevenir quebraduras. Veja ilustração abaixo, encontrada nessa mesma obra, na página 282.

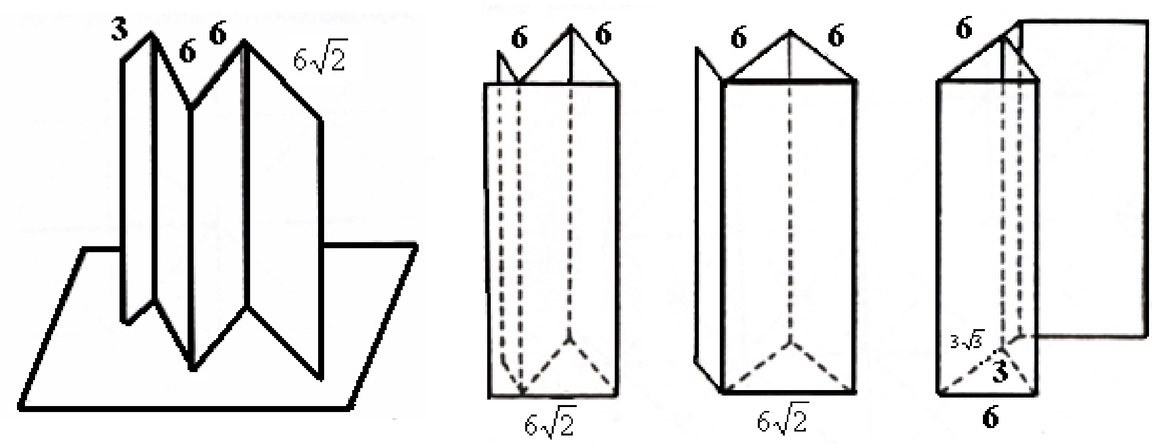


Figura 13: Caleidoscópios com três espelhos

Após a construção dos três conjuntos articulados de três espelhos, KINGSTON (1957) apresenta um estudo sobre pontos vértices colocados dentro do triângulo formado pelos três espelhos e a obtenção de padrões de polígonos pela variação da posição de pontos. Sugere que, para obtenção de tesselações desenhem-se, em papel branco, linhas de um triângulo particular, com as mesmas medidas do triângulo formado pelos espelhos. Os traçados são feitos sobre este papel, e a tesselação desejada pode ser obtida pela reflexão destes traçados nos três espelhos.

DAFFER & CLEMENS (1977), no capítulo intitulado “Padrões de polígonos no plano”, iniciam uma seqüência exploratória do tema tesselações por polígonos, com atividades de investigação utilizando polígonos recortados em cartolina, com a proposta de tesselar o plano com estes. Em seguida, mostram padrões de polígonos no plano, iniciando um estudo sobre o número de lados do polígono, o ângulo no vértice deste e a quantidade de polígonos dispostos ao redor de um ponto. Encorajam, com isso, o estudo e a procura por padrões que tesselam o plano, para exploração de tesselações semi-regulares, compostas por polígonos regulares de dois ou mais tipos diferentes, arranjados identicamente ao redor de cada vértice da tesselação. Então apresentam os caleidoscópios com três espelhos juntos, formando as faces verticais de um prisma triangular. No lugar da base caleidoscópica recomendam o uso de padrões coloridos para visualização de tesselações.

Observe a figura encontrada nessa referência, na página 102. A visualização é pelos vãos das arestas ou por cima dos caleidoscópios.

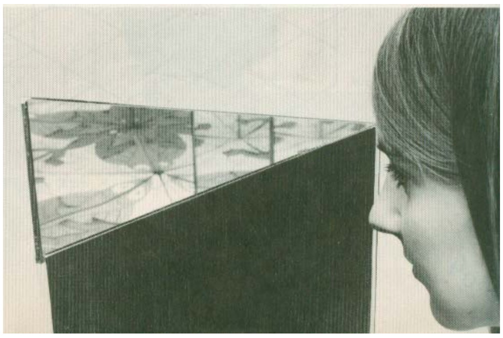
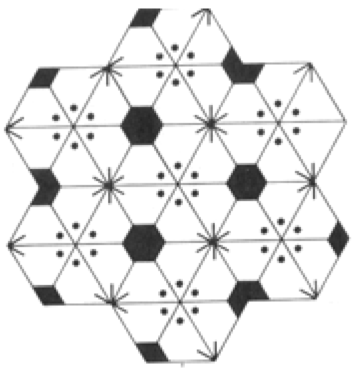


Figura 14: Caleidoscópio com três espelhos

Estes autores afirmam que estudantes de todas as idades ficam fascinados com os caleidoscópios formados com três espelhos. A criação de padrões para o caleidoscópio propicia uma situação experimental que encoraja a criatividade na descoberta de uma base. Ainda, segundo estes autores, essas atividades providenciam oportunidades de um olhar profundo sobre as propriedades dos polígonos, incluindo ângulos, polígonos, linhas de simetria, etc. Enfatizam, principalmente, o uso destes caleidoscópios no estudo de tesselações através da construção de padrões coloridos, os quais postos na base entre os espelhos, refletem para o observador o visual de belas e interessantes tesselações.

Propõem atividades de investigação de pavimentações e de bases, através da verificação do visual de determinadas bases colocadas nos caleidoscópios e de observação de pavimentações sem bases determinadas. A proposta é despertar a curiosidade e a construção de bases, chegando, inclusive, a apresentar algumas tesselações de Escher com padrões curvados, cujas tesselações, muitas vezes, podem ser formadas pela modificação de uma tesselação por polígonos. Eles observam também que atividades como essas podem cativar o interesse de alunos que não têm tido sucesso em outros aspectos da Matemática. Observe uma tesselação do plano e o respectivo padrão que a produz, em DAFFER & CLEMENS (1977, p.103).



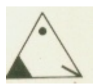


Figura 15: Tesselação do plano e base para visualização desta tesselação

Na mesma página da figura acima encontramos, também, uma seqüência de bases, mostrada na figura 16, que os autores sugerem que sejam colocadas no interior de um caleidoscópio com três espelhos, para que sejam obtidas tesselações por diversos polígonos.

Figura 16: Seqüência de bases

BALL & COXETER (1987) apresentam os caleidoscópios com três espelhos, depois de terem apresentado aqueles formados por dois espelhos. Assim, afirmam que quando se introduz um terceiro espelho ao conjunto de dois espelhos articulados, colocados na forma vertical, tem-se o que denominamos "caleidoscópio plano com três espelhos", no qual cada par dos três espelhos determina a formação de três ângulos: $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$ e $\frac{\pi}{n}$, sendo *l, m* e *n* divisores inteiros de 180°. E prosseguem, apresentando a matemática necessária para a construção de um caleidoscópio, cujo triângulo de espelhos, com os ângulos genéricos acima, será considerado um caleidoscópio se *l*, *m*, e *n* forem soluções inteiras para a equação $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$, concluindo que as soluções são (3,3,3), (2,4,4) e (2,3,6).

Para cada caleidoscópio formado por essas soluções, o número de imagens é infinito, e, com a variação da posição de um ponto-objeto dentro do triângulo, obtêm-se vértices de certas tesselações isogonais. No estudo da reflexão de pontos em espelhos afirmam que, em particular, se um ponto é tomado no vértice de um triângulo ou onde o ângulo bissetor encontra o lado oposto (ou no centro onde os três ângulos bissetores concorrem), então, teremos o ladrilho da tesselação por polígonos regulares. E, para ilustrar, BALL & COXETER (1987, p. 156) apresentam os seguintes diagramas:

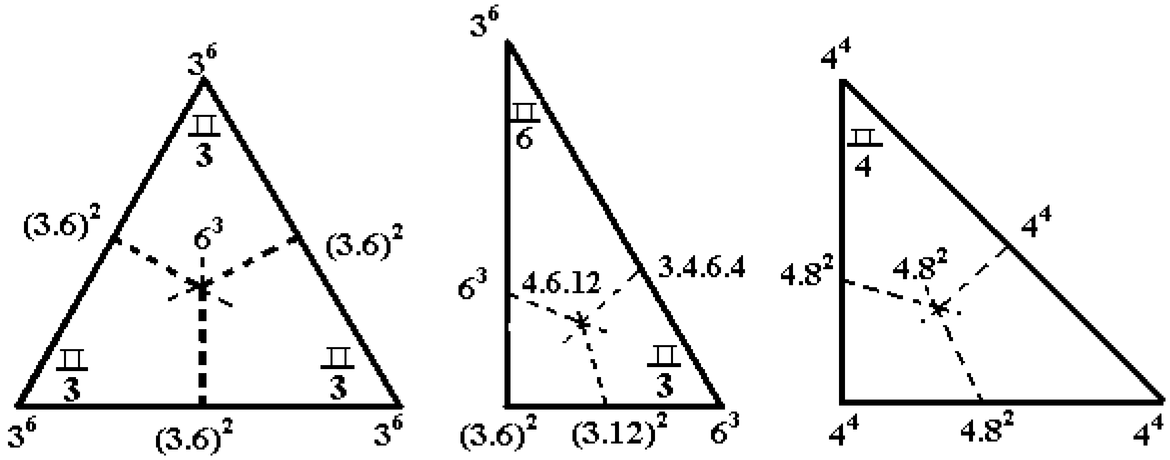


Figura 17: Diagramas com os ângulos formados entre os espelhos

Para BARBOSA (1993, p. 43),

"Um caleidoscópio, em geral, é um conjunto de três espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano formando um prisma triangular e com as faces espelhadas para o interior; uma das bases é fechada com papel claro, celulóide ou vegetal, para entrada da luminosidade no interior; a outra base possui um orifício para observação."

Observe a figura encontrada em BARBOSA (1993, p. 44).

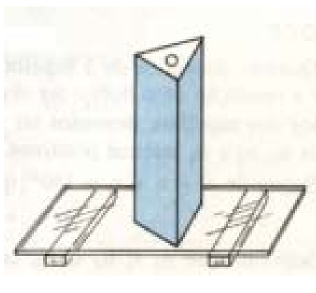


Figura 18: Caleidoscópio individual

Esse mesmo autor ainda apresenta a prova da existência dos três tipos de caleidoscópio. Dessa forma, conforme BARBOSA (1993, p. 43-45):

"Quando dispomos de três espelhos planos, cada um dos ângulos deve satisfazer a condição de o dobro ser o divisor de 360º; portanto, sendo a, b e c os ângulos dos espelhos, devemos ter $180°/a = n_1$

$180°/b = n_2$ e $180°/c = n_3$, com n_1, n_2 e n_3 inteiros positivos. Segue que a + b + c = 180º que a condição para os n_1, n_2 e n_3 é dada por

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$$

Supondo que $n_1 \le n_2 \le n_3$ com $n_1 \ge 2$, para que exista triângulo, encontramos com a equação acima que $n_1 \le 3$, portanto n_1 é 2 ou 3.

No primeiro caso em que $n_1 = 2$, colocamos $n_1 = 2$ no lugar de n_3 obtemos $n_2 \le 4$, portanto n_2 é 3 ou 4, uma vez que 2 daria uma impossibilidade, com os quais temos respectivamente os valores 6 e 4 para n_3.

No segundo caso obtém-se $n_2 \le 3$, mas $n_1 \le n_2$, então n_2 é 3 que fornece $n_3 = 3$."

Assim sendo, as três ternas possíveis para os n_i são (3,3,3), (2,4,4) e (2,3,6) que correspondem, respectivamente, às três formas triangulares (figura abaixo) para os caleidoscópios: (60º,60º,60º), (90º,45º,45º) e (90º,60º,30º), os quais tornam as imagens coincidentes, em repetição.

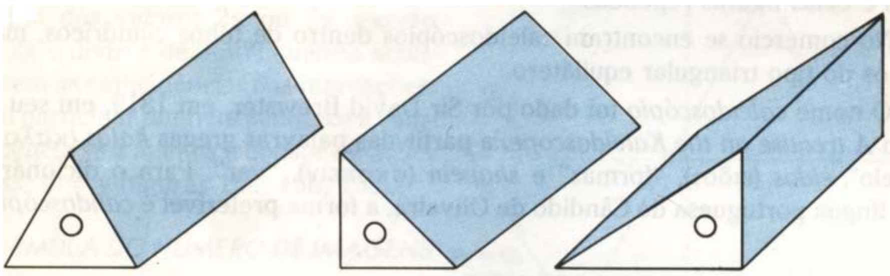


Figura 19: Figuras dos caleidoscópios individuais

Abaixo os materiais e o procedimento de construção desses caleidoscópios, conforme BARBOSA (1993, p. 44-45).

"Adquira num vidraceiro 9 lâminas de espelhos retangulares,

conforme as sugestões seguintes:

5 lâminas de 30 cm x 6 cm

1 lâmina de 30 cm x 8,48 cm (8,5)

1 lâmina de 30 cm x 8 cm

1 lâmina de 30 cm x 4 cm

1 lâmina de 30 cm x 6,92 cm (7)

Monte os três caleidoscópios fixando as lâminas com fita gomada, durex ou esparadrapo, etc., com os espelhos voltados para o interior. Mas faça o trabalho sobre o plano de uma mesa, deixando entre lâminas espaços correspondentes às espessuras dos espelhos e mais um pouco, em vista dos ângulos.

Envolva-os externamente, por exemplo, com papel Contact, o que servirá para evitar a entrada de luminosidade por vãos laterais.

Construa 3 bases superiores, por exemplo com cartolina, contendo um pequeno orifício. As bases inferiores ficarão provisoriamente abertas e serão substituídas conforme for requisitado pelo desenho a ser obtido durante o estudo do capítulo seguinte. Essa base substituível, que deve ser adequada a cada caleidoscópio, para não sair da posição correta, pode ser trocada por um apoio único constituído de um vidro plano colocado em cima de dois pequenos suportes de madeira, possibilitando a entrada de luminosidade por baixo. Nesse caso colocam-se as bases triangulares com os desenhos sobre o vidro, e o caleidoscópio correspondente será disposto perpendicularmente ao vidro de modo que, depois, com a observação sucessiva feita por várias pessoas, o resultado obtido não seja alterado.

BARBOSA (1993) ainda apresenta um estudo sobre a ação reflexional dos espelhos, a obtenção de padrões de pavimentações do plano nesses caleidoscópios, e mostra que todas as pavimentações obtidas no caleidoscópio escaleno são, também, obtidas no eqüilátero. Ainda sugere que atividades de descoberta de padrões de pavimentação sejam realizadas com alunos.

MURARI (1999) apresenta um estudo para verificar que a coincidência das imagens nos caleidoscópios com três espelhos está relacionada aos ângulos de dois espelhos originais e dos espelhos virtuais, cujos ângulos devem ser frações racionais de 180º. Dessa verificação, prossegue a prova que só existem três caleidoscópios triangulares que promovem a repetição perfeita de imagens. Daí mostra a construção desses caleidoscópios consoante BARBOSA (1993), e segue com a apresentação do caleidoscópio educacional modificado para trabalho em grupo, o qual tem as mesmas ternas de ângulos dos caleidoscópios individuais.

ALMEIDA (2003) introduz o assunto caleidoscópios com uma apresentação histórica destes. Para esta autora, um caleidoscópio nada mais é do que um conjunto de dois ou mais espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano que, quando algum objeto é colocado entre os espelhos, múltiplas imagens se formam. Podem-se obter, pela variação do ângulo formado entre os espelhos, imagens que se espalham por todo o plano. Mas, para que estas sejam perfeitas, só existem três caleidoscópios com bases triangulares: o eqüilátero, o isóscele retângulo e o escaleno.

A seguir, menciona a existência do caleidoscópio popular, do tipo eqüilátero, com tampas nas bases, sendo uma delas um orifício para observação e, na outra, que é provida de movimento rotatório, há pequenos fragmentos coloridos que produzem imagens imprevisíveis. Apresenta os caleidoscópios educacionais individuais triangulares, nos quais uma base é aberta para observação e na outra colocam-se bases substituíveis que produzirão, através das reflexões nos espelhos, o visual previsto.

Nessa mesma obra, a autora apresenta a resolução matemática da equação $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$, a qual determina, através das ternas de soluções, os ângulos necessários que devem ser formados entre os espelhos para a obtenção de repetição perfeita em caleidoscópios com três espelhos.Então chega, finalmente, a apresentar as três formas triangulares para caleidoscópios e a construção destes, segundo MURARI (1999), mas não utilizando-os em sua pesquisa de campo. Essa autora utiliza o caleidoscópio educacional modificado para produzir pavimentações do tipo 1-uniforme, a partir de bases geradoras e transformadas.

MARTINS (2003) também apresenta uma introdução histórica do caleidoscópio, a dedução dos três tipos de caleidoscópios triangulares individuais, e a construção destes, consoante BARBOSA (1993). Sobre o uso desses caleidoscópios, afirma que entre os temas matemáticos que podem ser estudados estão as pavimentações do plano por polígonos regulares e irregulares, que envolvem o estudo de linhas de simetria e construções gráficas de bases que geram pavimentações. E segue para a apresentação e construção dos caleidoscópios educacionais modificados com três espelhos para trabalho em grupo, como já dissemos produzidos por MURARI (1995), com os quais, efetivamente, trabalha em sua pesquisa de campo.

2.2432 Caleidoscópio educacional modificado com três espelhos

Em MURARI (1999) encontramos a proposta e a construção de um caleidoscópio que é denominado "caleidoscópio modificado para trabalho em grupo". Neste, um terceiro espelho é encostado verticalmente ao caleidoscópio ordinário formando ângulos não fixos. A variação no ângulo do conjunto original é que determina os outros dois ângulos. O funcionamento desse caleidoscópio é semelhante ao caleidoscópio com três espelhos, conforme deduzidos anteriormente. Da mesma forma, os ângulos entre os espelhos devem ser bem determinados para que se obtenha repetição perfeita de imagens e através deles, podem-se obter pavimentações do plano.

Esse caleidoscópio proposto é uma fusão entre o caleidoscópio com dois espelhos e o com três espelhos. O terceiro espelho, encostado ao conjunto articulado, é mais baixo, possibilitando uma vantajosa visão superior e permitindo, dessa forma, uma boa visualização por parte dos alunos, constituindo-se num instrumento bastante adequado para trabalho em grupo. A construção abaixo sugerida é, consoante MURARI (1999, p. 104-105):

a) Três espelhos planos retangulares, sendo 2 com as medidas aproximadas de 25cm x 22cm, e um de 35cm x 15cm.

b) Meia folha de cartolina ou papel cartão.

c) Três tábuas com as mesmas dimensões dos espelhos, mas de espessura razoável para não envergar, e que possam ficar na posição vertical, ou

d) Dois pedaços de papelão duro, destes de caixa de embalagens diversas para envolver os espelhos.

Se a opção for pelas tábuas de madeira, os espelhos deverão ser fixados com cola nas respectivas tábuas. A articulação deverá ser feita através de dobradiças de metal, de maneira que possibilite facilmente a obtenção de vários ângulos.

Se o material escolhido for o papelão, sua construção será bem menos dispendiosa e rápida. Bastará cortar um papelão de maneira que envolva (na forma da capa de um livro) os dois espelhos de mesmo *tamanho. Os espelhos deverão ser fixados com cola em seus respectivos papelões, não se esquecendo, na colagem dos dois espelhos, de deixar um espaço que permita a articulação entre eles. Esse tipo de caleidoscópio poderá ter sua parte estética melhorada se encaparmos os papelões com papéis coloridos (camurça, collor set, ou mesmo aqueles de presente), os quais dão uma beleza singular ao instrumento.*

A seguir, figura do caleidoscópio isósceles retângulo encontrada em MURARI (1999, p.252), refletindo nos espelhos a pavimentação plana (4,4,4,4), e uma base em seu interior para visualização dessa pavimentação.

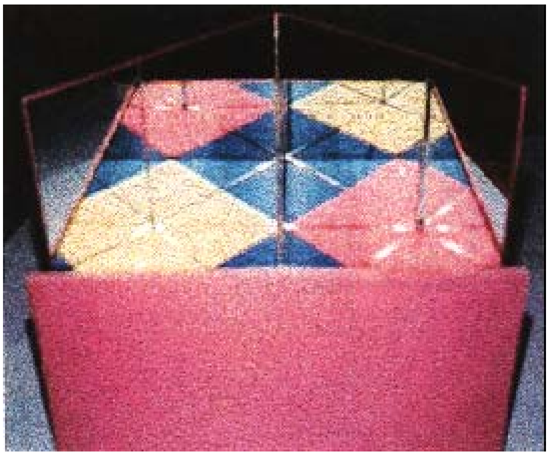


Figura 20: Caleidoscópio eqüilátero modificado com três espelhos

Esse mesmo autor utilizou tal instrumento em experiências em sala de aula e obteve resultado comprobatório da eficiência deste, tanto para trabalho com alunos quanto com professores no ensino de geometria. São palavras, encontradas em MURARI (1999, p. 104-105):

"Em 1995, conforme já citamos, apresentamos nossa sugestão de produção de um caleidoscópio em que propomos uma fusão do caleidoscópio de dois espelhos com o de três, possibilitando uma boa visualização por parte dos alunos e constituindo-se num instrumento bastante adequado para trabalho em grupo. Isso pudemos comprovar quando da realização de nosso trabalho de campo, pois tanto nas

experiências com os alunos, quanto com os professores, o caleidoscópio modificado comprovou sua eficiência e foi o primeiro instrumento "por excelência" do nosso trabalho."

MURARI (1999) ainda propõe a utilização deste caleidoscópio com os ângulos dispostos em várias configurações. Para tanto, ele utiliza uma folha-transferidor, ou seja, uma folha de papel onde está desenhado um transferidor. Para se obter o caleidoscópio eqüilátero, os dois espelhos articulados são abertos em um ângulo de 60º e o terceiro espelho é encostado aos dois anteriores formando, também, ângulos de 60º com cada um deles. Nesse caso, as bases substituíveis são triângulos eqüiláteros com 22 cm de lado, em conformidade com as medidas sugeridas na construção do caleidoscópio. O caleidoscópio isósceles é obtido quando o ângulo dos espelhos articulados mede 90º, e o terceiro espelho, quando encostado, formará com os outros espelhos dois ângulos de 45º. Finalmente, o caleidoscópio escaleno é obtido quando abrimos os dois espelhos articulados num ângulo de 60º e encostamos o terceiro espelhos perpendicularmente formando com o outro espelho um ângulo de 30º. Porém, conforme BARBOSA (1993b) o caleidoscópio escaleno é dispensável no estudo de pavimentações do plano, visto que, todas as pavimentações nele obtidas podem, também, ser obtidas no caleidoscópio eqüilátero.

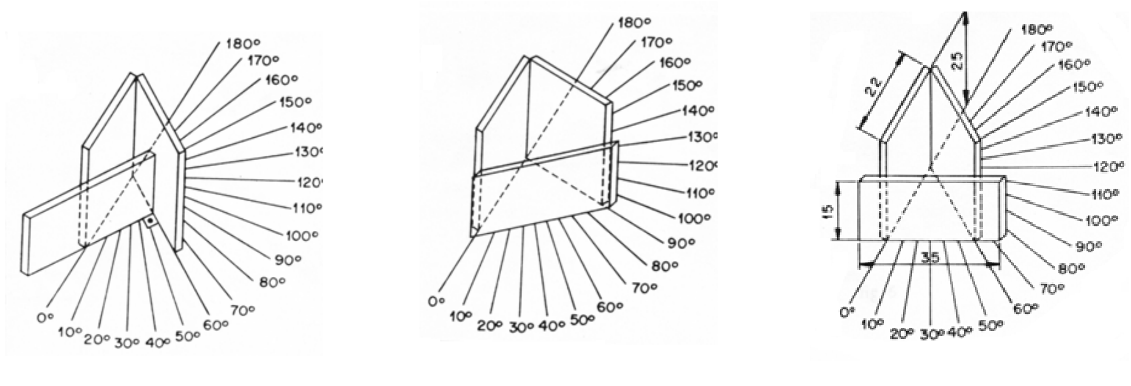


Figura 21: Estrutura dos ângulos dos caleidoscópios modificados

Abaixo, apresentamos as vantagens dos caleidoscópios planos para trabalho em grupo em relação aos caleidoscópios planos individuais, conforme MURARI (1999, p. 107-108):

1) em vista das dimensões razoavelmente grandes desse caleidoscópio modificado, cada um deles pode ser utilizado por um grupo de alunos, simultaneamente, enquanto o outro, em geral, pode ser utilizado apenas por um aluno de cada vez;

2) os observadores podem variar o posicionamento para observação;

3) a confecção de cada base substituível fica também facilitada pelo seu tamanho, podendo ser detalhada, inclusive, no caso de colorações múltiplas, quando colorimos um grande número de regiões, cada uma com uma cor;

4) não há necessidade de luminosidade por baixo da base substituível, pois ela provém naturalmente do próprio ambiente, em virtude da grande abertura superior;

5) o acompanhamento das simetrias é bastante facilitado em razão do grande visual que ele proporciona.

Observe a foto a seguir encontrada em MURARI (1999, p. 209), ilustrando a primeira vantagem explicitada imediatamente acima.

Figura 22: Caleidoscópio modificado

Utilizando esses caleidoscópios educacionais modificados de três espelhos, MURARI (1999) apresenta o processo simultâneo de geração de imagens em três espelhos articulados. Conhecido o processo, inicia-se o estudo de posição de pontos e segmentos no caleidoscópio, para, finalmente, apresentar as bases existentes para pavimentações do plano e o estudo e obtenção de novas bases substituíveis.

Neste estudo, MURARI (1999) chama a atenção para o trabalho de descoberta e determinação de bases de pavimentações constituídas por polígonos regulares, e apresenta três métodos. No **método I** onde o indivíduo, sabendo de antemão o visual a ser gerado por segmentos em relação aos ângulos dos espelhos, constrói a base traçando segmentos apropriados para que, nas simetrias reflexionais dos espelhos, possa obter, através de regiões delimitadas por estes segmentos, os polígonos regulares que formam a pavimentação.

No **método II,** conhecido também por "Tentativa e Erro", o indivíduo tem à sua frente o desenho de uma pavimentação, e deve estar ciente de que os segmentos desenhados numa determinada base serão reproduzidos pelos espelhos nas reflexões e recobrirão todo o plano. Então, com o auxílio de três réguas ou três esquadros, sobre o desenho da pavimentação, tenta formar triângulos, geralmente eqüilátero ou isóscele retângulo (podendo ser usados os lados ou o centro dos polígonos), os quais conterão segmentos que, nas reflexões, gerarão a pavimentação em estudo. Assim passa a descobrir bases que geram essa pavimentação, pois as réplicas triangulares da figura serão reproduzidas por todo o plano, contendo os mesmos segmentos da base encontrada e formarão a pavimentação.

O **método III** (um algoritmo proposto pelo autor) baseia-se no fato de que as pavimentações apresentam linhas de simetria reflexionais em relação às mediatrizes dos lados dos polígonos. Então, propõe que se devem observar quais linhas de simetria da pavimentação que são, também, linha(s) de simetria de um ou mais polígonos distintos que formam essa pavimentação. Essas linhas de simetria comuns aos polígonos e à pavimentação formam redes de triângulos congruentes com o mesmo padrão de segmentos de reta formados no interior de cada um desses triângulos. Assim, observam-se na pavimentação várias redes de triângulos congruentes, de mesma configuração, os quais são "bases" para visualização da pavimentação. A próxima figura mostra uma aplicação desse método na busca de bases para a pavimentação de configuração (3,4,6,4).

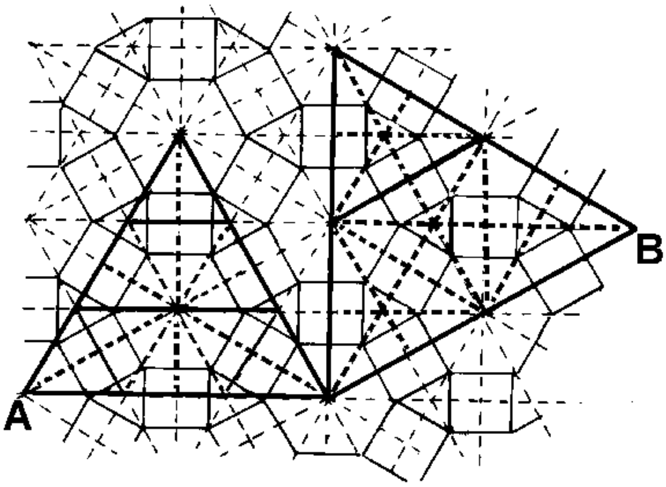


Figura 23: Aplicação do método III

Nota: Observe que as bases estão contidas nos triângulos com traços reforçados. Considere o triângulo maior nomeado como figura ***A****. O primeiro triângulo da escala (dentro dessa figura) representa a base geradora. O segundo conterá a base geradora mais três réplicas dela, gerando a primeira base transformada. O terceiro triângulo, por sua vez, conterá a base geradora mais oito réplicas dela, formando a segunda base transformada. Note que o traço cheio que representa a base do triângulo menor deve ser sempre desconsiderado ao passar de uma base transformada para outra.*

Apesar de o triângulo nomeado como figura ***B*** *apresentar somente a primeira base transformada, o processo de obtenção de bases transformadas também é o mesmo.*

Encontramos vários tipos de bases, as “geradoras” e as “transformadas”. As bases geradoras são as bases que não contêm propriamente nenhuma outra base; e as bases transformadas são obtidas pelas redes de linhas de simetria da pavimentação e contêm em si bases geradoras.

O autor chama a atenção para as diferentes denominações atribuídas à região construída, através da qual observamos, nos caleidoscópios, as pavimentações. São elas: base substituível, base geradora, base transformada, padrão-básico, triângulo-básico e figura-base.

MARTINS (2003) utiliza o caleidoscópio educacional modificado, especialmente no trabalho com o tema "pavimentação do plano", onde propõe que os alunos obtenham bases com determinadas configurações, em cujo trabalho, os conceitos e propriedades de ângulos, polígonos, bissetrizes, foram sendo verificados e estudados. A autora reapresenta o conceito de base geradora e base transformada, conforme MURARI (1999), e utiliza esses conceitos no estudo sobre a obtenção de bases para pavimentações uniformes do plano, fazendo as construções com o auxílio dos *softwares Cabri*-géo*mètre II* e *Geometricks*. A parte artística, característica da harmonia entre espelhos e matemática, fica por conta do estudo dos padrões tipo Escher, que desemboca no estudo dos padrões ornamentais em caleidoscópios.

Para construção desses padrões, utiliza o *software Corel Draw*. Em seguida, a autora apresenta tesselações do espaço obtidas com as bases construídas, isto é, constrói porções de mosaicos nas faces de poliedros (cubo e pirâmide), através de bases caleidoscópicas. Para tanto, foi elaborado um jogo educacional, para que de maneira lúdica, fossem aplicados os conhecimentos adquiridos sobre pavimentações e, ainda, desenvolvido o estudo de poliedros.

A autora conseguiu reunir em sua proposta de ensino: os caleidoscópios, os softwares e os jogos, quando então os alunos tiveram a oportunidade de contemplar o visual de uma pavimentação, ao mesmo tempo nos espelhos (nos caleidoscópios), no computador e no poliedro (formado no jogo). Abaixo, uma foto dos jogos propostos pela autora. Observe que nas faces dos poliedros encontram-se porções de pavimentações.

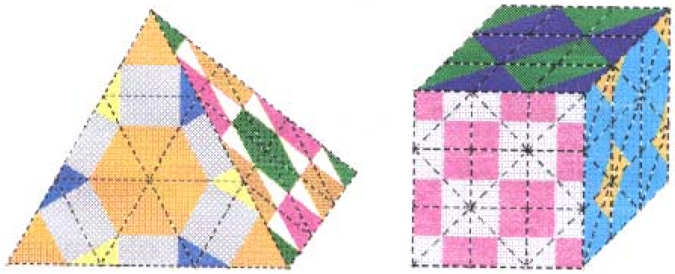


Figura 24: Poliedros com faces pavimentadas

ALMEIDA (2003) utilizou em seu trabalho de campo o caleidoscópio modificado, conjuntamente a outros instrumentos. A proposta se iniciou com a montagem e construção dos caleidoscópios, posteriormente, usou canudinhos ou faixas de papel, com o objetivo de visualizar determinadas pavimentações do plano. Para isso, os alunos deveriam movimentar tais objetos no triângulo base, a fim de encontrar uma pavimentação. Também propôs o trabalho de construção de bases caleidoscópicas e verificação do visual obtido através das mesmas.

Devido à análise sobre o número de cores obtidas nas bases geradoras e nas transformadas, a autora pôde perceber que, em determinadas pavimentações, essas bases têm o número de regiões (ou de cores) aumentado conforme uma Progressão Aritmética de segundo grau, ou seja, uma seqüência cuja diferença entre dois quaisquer acréscimos consecutivos é uma Progressão Aritmética. Assim, depois de um acurado estudo, chegou a um algoritmo segundo o qual é possível saber quantas regiões coloridas terá a *n*-ésima base transformada de uma dada pavimentação.

Em SIMIONATO; MURARI; BARBOSA (2004) são apresentados três procedimentos para se obter uma fórmula que determina o número de regiões em bases transformadas.

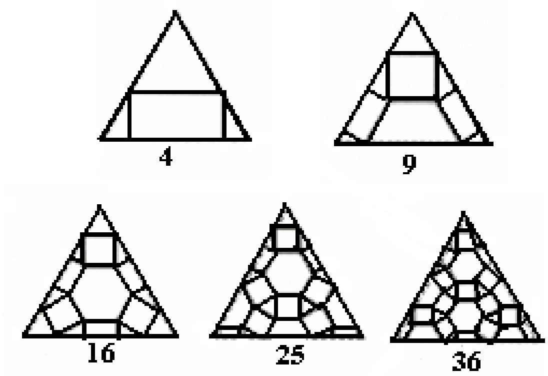


Figura 25: Bases para a configuração (3,4,6,4)

A figura acima mostra algumas bases da pavimentação (3,4,6,4) com indicativo do número de regiões dessas bases. Fazendo a diferença entre o número de regiões de duas bases consecutivas obtêm-se os números 5,7,9,11..., que são termos de uma P.A. de primeiro grau. A autora prova e utiliza-se do fato de que essa seqüência numérica é uma P.A., e descobre que a fórmula $a_n = (n+2)^2$, $n \geq 0$, fornece o número de regiões da *n*-ésima base para a pavimentação de configuração (3,4,6,4). Essa inferência foi possível pela característica da presença de diferenças finitas constantes entre o número de regiões das bases transformadas. Assim, a autora apresenta nessa obra a fórmula para o número de regiões da *n*-ésima base para as pavimentações (3,6,3,6) e (4,8,8) e menciona que aproveitou a oportunidade para reforçar conhecimentos de P.A., já que numa seqüência de bases geradoras e suas transformadas (de algumas pavimentações), as diferenças entre os números de regiões de uma base e sua sucessora representam uma progressão aritmética.

2.244 Caleidoscópios generalizados (esféricos)

BALL & COXETER (1987) denominaram de "caleidoscópios generalizados" aqueles que possibilitam a visualização de pontos-objeto numa esfera. Eles são formados por três espelhos, todos articulados. Nestes, o terceiro espelho é colocado horizontalmente ao invés de verticalmente, determinando, analogamente aos caleidoscópios planos, a formação de três ângulos entre eles, dois dos quais medindo 90º.

Uma generalização natural é o caso em que esses três ângulos são $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$, onde l, m e n são divisores inteiros de 180º. Para que estes caleidoscópios possibilitem a visualização perfeita de uma rede de triângulos esféricos, que recubra totalmente (sem sobreposições ou lacunas) a esfera, é necessário que os ângulos formados pelos espelhos determinem um triângulo sobre a mesma, tal que sua área seja um divisor inteiro da área total da esfera a ser visualizada.

Desse modo, tomemos uma esfera de raio unitário, cuja área desta será 4π, enquanto que a área do triângulo formado pelos ângulos $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ sobre essa esfera é $\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi$, (Geometria esférica). Então, temos que a área da esfera dividida pela área de cada triângulo é um número positivo inteiro, assim: $4\pi / (\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi) > 0$. Dividindo todos os membros dessa inequação por π e observando que o denominador deve ser maior que zero, obtemos a inequação: $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > 1$, para que tenhamos ângulos que possibilitem repetição perfeita de imagens desse triângulo tesselando a esfera.

BALL & COXETER (1987) mostram que as soluções para essa inequação são: (2,2,n); (2,3,3); (2,3,4) e (2,3,5). Devemos lembrar que as soluções correspondem a l, m e n, que são divisores de 180º, assim referenciados (l, m, n). Então, para cada terna de solução correspondem os caleidoscópios cujos ângulos são o resultado da divisão de 180º por esta terna. Para a terna (2,3,3), por exemplo, corresponde o caleidoscópio com ângulos (90º,60º,60º). Com análoga correspondência, obtemos os caleidoscópios de ângulos (90º,60º,45º) e (90º,60º,36º) para as ternas (2,3,4) e (2,3,5), respectivamente. As quatro ternas determinam a existência de caleidoscópios, mas o autor só utiliza os referentes às três últimas soluções acima citadas, em cujas ternas os ângulos são bem determinados.

Os espelhos desses caleidoscópios podem ser cortados na forma de setores circulares, mas nada impede que o sejam na forma triangular. Os ângulos entre eles devem ser conforme deduzidos acima e, ainda, devem ser considerados os ângulos centrais dos setores circulares, formados entre os espelhos. Assim, os caleidoscópios com as ternas de ângulos (90º,60º,60º), (90º,60º,45º) e (90º,60º,36º) formados entre os espelhos deverão ter, respectivamente, os seguintes ângulos centrais dos setores circulares: (70º52´,54º54´,54º54´); (54º54´,35º16´,45º,) e (20º54´, 31º43´,37º23´). Isto devido à lei dos co-senos para os ângulos da Geometria esférica.

Calcularemos, a seguir, o ângulo central dos setores circulares para o caleidoscópio de ângulos (90º,60º,60º).

De acordo com a lei dos co-senos para os ângulos da Geometria esférica, $\cos A = -\cos B.\cos C + \operatorname{sen} B.\operatorname{sen} C.\cos a$,

Assim sendo, A=90º e B=C=60º, temos

$\cos 90° = -\cos 60°.\cos 60° + \operatorname{sen} 60°.\operatorname{sen} 60°.\cos a$, $\Longrightarrow$

$$0 = -\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}.\cos a \quad \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4}.\cos a$$

$$\cos a = 1/3$$

Então, $a = 70°52'$

Daí se conclui que o ângulo do setor circular correspondente ao ângulo de 90º, formado entre os espelhos, é de 70º52´.

Dessa forma podem-se calcular todos os ângulos dos setores circulares acima indicados.

Os caleidoscópios generalizados são formados por três espelhos articulados, na forma de um prisma triangular. Desde que, qualquer reflexão em um espelho plano, objeto e imagem seja eqüidistante do plano, vemos facilmente que todas as imagens de um ponto neste caleidoscópio generalizado, estão sobre uma esfera, cujo centro é o ponto de intersecção dos planos dos três espelhos. Sobre a esfera, esses planos cortam-se em um triângulo esférico, de ângulos $\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}$. O resultado das reflexões desse triângulo esférico nos espelhos é a divisão da esfera toda em uma rede de tais triângulos, contendo, quando houver, imagens de qualquer objeto colocado dentro desse primeiro triângulo.

Tais caleidoscópios permitem visualização de vértices de poliedros isogonais, que podem ser encontrados em BALL & COXETER (1987). Nessa mesma obra, encontramos, ainda que brevemente, um estudo sobre o visual obtido nestes caleidoscópios pela mudança de pontos-objeto em seu interior acrescentando-se que, pela variação desses pontos-objeto no triângulo esférico, podem-se obter vértices de certos poliedros isogonais. Se colorirmos alternadamente o visual obtido pela reflexão dos espelhos desses três caleidoscópios, obtêm-se as figuras abaixo. As figuras correspondem ao visual do caleidoscópio com ângulos (90º, 36º, 60º), (90º, 60º, 60º) e (90º, 45º, 36º), respectivamente.

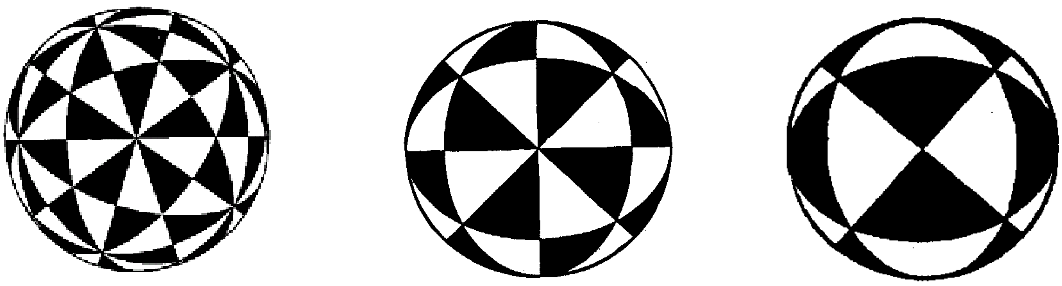


Figura 26: Visual obtido pela reflexão nos espelhos

2.245 Caleidoscópio plano com quatro espelhos

Um conjunto de quatro espelhos articulados tem no encontro dos espelhos a formação de quatro ângulos entre os espelhos; genericamente, são eles $\frac{\pi}{n_1}$, $\frac{\pi}{n_2}$, $\frac{\pi}{n_3}$, $\frac{\pi}{n_4}$, (onde n_1, n_2, n_3 e n_4 são divisores inteiros de 180º). Como é sabido, a soma desses ângulos deve ser igual a 2π, visto que no plano em que este se apóia forma-se uma figura plana quadrangular, ou seja, $\frac{\pi}{n_1}+\frac{\pi}{n_2}+\frac{\pi}{n_3}+\frac{\pi}{n_4}= 2\pi$. Dividindo cada membro dessa equação por π , obtemos $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}=2$, a qual pode ser reduzida a $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Isso significa que esse caleidoscópio é formado por quatro espelhos planos, paralelos dois a dois e abertos num ângulo de 90º, perpendiculares a um mesmo plano. As bases, obviamente, devem ser retangulares e esses caleidoscópios são indicados para visualização de algumas pavimentações que não podem ser obtidas em caleidoscópios com três espelhos.

Em BARBOSA e MURARI (1998), encontramos a prova de que caleidoscópios planos com quatro espelhos são possíveis só na forma quadrangular, e de que quatro é o número máximo de espelhos que um caleidoscópio plano deve ter para que se obtenha coincidência de todas as imagens. No mesmo trabalho temos a construção e as aplicações desse tipo de caleidoscópio, sugestão de material para trabalho em sala de aula e a construção gráfica de bases com colorações múltiplas para visualizações nos mesmos.

Veja a prova acima mencionada, que é encontrada em BARBOSA e MURARI (1998, p. 65):

> *Para que as imagens coincidam em cada ângulo de par de espelhos, devemos ter que o seu dobro seja divisor de 360º, ou que cada ângulo do quadrilátero precisa ser divisor de 180º; portanto colocando* $180^\circ/a_i = n_i$ *(inteiro positivo, i = 1, 2, 3, 4, com n ≥ 2) com*

$\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 = 360°$, *encontramos* $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = 2$ *(1).*

Supondo, sem perda de generalidade, que $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4$ *teremos, substituindo em (1) todos por* n_1*, que* $n_1 \le 2$*, de onde* $n_1 = 2$.

Substituindo em (1) encontra-se que $\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} = \frac{3}{2}$ *(2).*

Novamente, trocando todos por n_2 *em (2) encontramos* $n_2 \le 2$*, então necessariamente também* $n_2 = 2$.

Com argumentação análoga encontramos sucessivamente $n_3 = n_4 = 2$.

MURARI (1999) sugere a montagem do caleidoscópio com quatro espelhos, utilizando dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio modificado para trabalho em grupo, apresentado em 1995. De uma maneira prática tem-se, então, o caleidoscópio com quatro espelhos, que pode ser utilizado para trabalho em grupo. Além da construção de bases com colorações múltiplas para pavimentações do plano em caleidoscópios com quatro espelhos, encontrada nessa obra, temos, também, exemplos de pavimentações por mosaicos ornamentais. Observe a figura abaixo, que mostra a sugestão de MURARI (1999, p. 109) sobre a disposição dos espelhos para a obtenção do caleidoscópio com quatro espelhos, e uma base substituível que fornecerá a pavimentação de configuração (3,3,4,3,4):

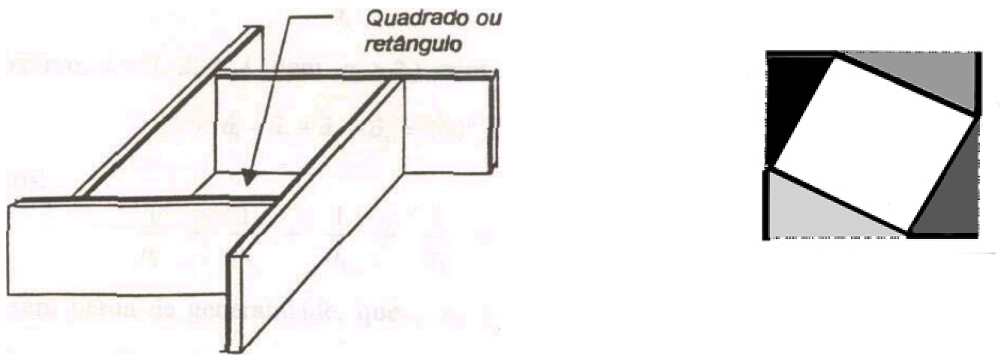


Figura 27: Caleidoscópio com quatro espelhos e base substituível

Na figura abaixo, temos dois mosaicos ornamentais obtidos em caleidoscópios com quatro espelhos e apresentados em BARBOSA & MURARI (1998), página 64. O primeiro deles, representa uma pavimentação a quatro cores, pentagonal – quatro lados congruentes, dois ângulos retos, dois de 105º e um de 150º. O segundo, representa um Mosaico de anotações de Escher, Alhambra (1936), em caleidoscópio. Observe na pavimentação que a região pontilhada é a base caleidoscópica.

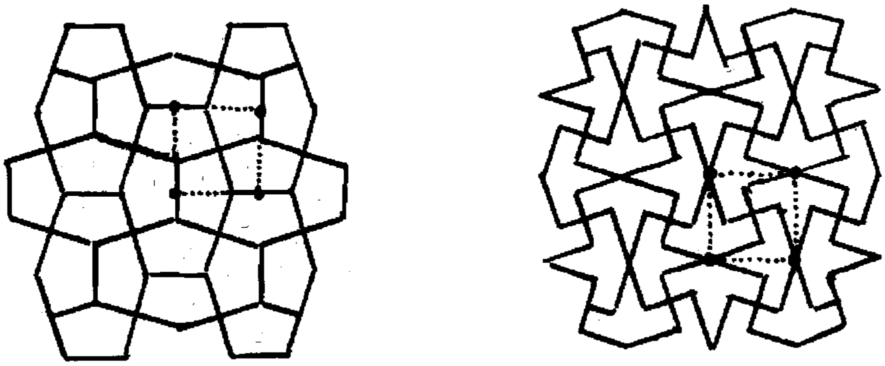


Figura 28: Ornamentos: Pentagonal e de Escher

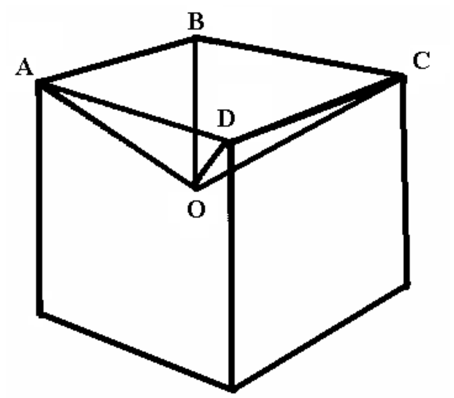
ALMEIDA (2003) apresenta a mesma dedução da fórmula apresentada em BARBOSA e MURARI (1998), que determina que o número máximo de espelhos para se formar um caleidoscópio é quatro. Ainda afirma que estes podem ser utilizados como instrumentos facilitadores no estudo de pavimentações do plano.

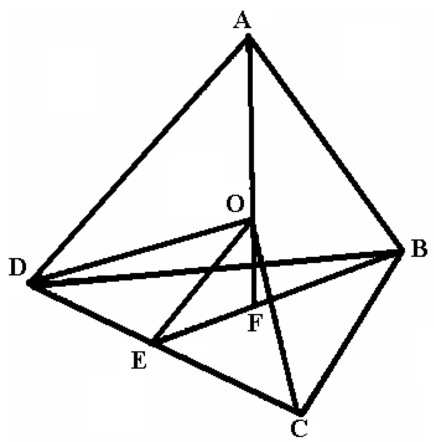
MARTINS (2003) cita a existência de caleidoscópios com quatro espelhos utilizando-se de dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio educacional modificado, conforme MURARI (1999), ou ainda quatro espelhos de dimensões 35 cm por 15 cm.

2.46 Espelhos articulados especiais

WALTER (1981) apresenta maneiras de *visualizar* poliedros regulares usando modelos de espelhos, com três, quatro e cinco espelhos, na forma de pirâmide truncada invertida. Segundo consta nessa obra, foi um artista chamado Kim Hicks, morador na região de São Francisco, nos Estados Unidos da América, que encontrou essa nova forma de ver poliedros regulares, usando espelhos articulados com ângulos bem estabelecidos. A determinação da base dessa pirâmide depende do poliedro regular que se deseja ver. Segundo consta, Hicks descobriu os ângulos exatos, subentendidos no centróide, desenhando as projeções.

O processo de construção desses instrumentos depende do centro de cada poliedro conectado aos lados das faces dos polígonos regulares que o formam, e pela determinação dos ângulos subentendidos no centróide de cada poliedro. O número de faces dessa pirâmide depende do número de arestas de uma face do poliedro regular. Veja o cálculo apresentado para determinar os ângulos que os espelhos laterais devem ter para que, quando articulados e fixos, este instrumento possibilite visualizar o tetraedro:





Seja o tetraedro regular *ABCD*, com arestas de medida *2s*. *BE* é a altura do Δ *BDC*. *AF* é a perpendicular de *A* à face *BDC*. *O* é a centróide do tetraedro (o ponto onde as altitudes se encontram). Para encontrar a medida do ângulo *DOC*, são necessários os seguintes cálculos auxiliares:

$BE^2 + EC^2 = BC^2$

$BE^2 = 4s^2 - s^2 = 3.s^2$

$BE = \sqrt{3}.s$

$EF = \frac{1}{3}EB = \frac{\sqrt{3}}{3}s,$

$AF^2 = AE^2 - EF^2 = EB^2 - EF^2$

$= 3s^2 - \frac{s^2}{3} = \frac{8}{3}s^2,$

Então, $AF = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s.$

Usando o fato de que a centróide O está a ¼ de FA, temos

$FO = \frac{1}{4}FA = \frac{1}{4}.\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}s = \frac{1}{\sqrt{6}}s.$

e $DO^2 = OF^2 + DF^2 = \frac{1}{6}s^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 s^2 = \frac{1}{6}s^2 + \frac{4}{3}s^2 = \frac{3}{2}s^2,$

então seno $\frac{\theta}{2} = \frac{s}{\sqrt{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \theta = 109^o\ 28'.$

Para a construção desse modelo, que permite a visualização do tetraedro, depois de calculado o ângulo subentendido no centróide, deve-se construir uma pirâmide usando três espelhos cortados na forma de triângulos isósceles, cujos ângulos vértices de cada espelho devem ter a medida calculada acima. Para visualizar o tetraedro, a pirâmide deve ser truncada e um pedaço de papel colorido deve ser colocado para tapar a abertura menor; a visão ocorre através da abertura maior.

Há, também nessa obra, algumas dicas para dedução de outros ângulos subentendidos no centróide de outros poliedros regulares, para obtenção de caleidoscópios que permitam sua visualização. Para visualizar o cubo, por exemplo, os ângulos dos triângulos no vértice da pirâmide devem medir $70^o\ 52'$, enquanto que para o icosaedro, o octaedro e o dodecaedro, os ângulos vértices dos espelhos devem medir, respectivamente, $63^o\ 26'$, 90^o e $41^o\ 49'$.

WALTER (1981) afirma que esses modelos de Kim Hicks, feitos com espelhos, são recursos excelentes para investigação, com os quais se podem fazer muitas explorações geométricas. Propõe a variação de bases, podendo-se, com isso, obter também poliedros estrelados.

Na figura 29 temos as fotos dos visuais do octaedro e do icosaedro, respectivamente, obtidos pela reflexão dos espelhos construídos com os ângulos especificados anteriormente.

Figura 29: Visual do octaedro e do icosaedro.

Para visualização do octaedro, do icosaedro e do tetraedro, como podemos observar, a pirâmide deve ter base triangular, pois as faces dos poliedros são triangulares. No caso do cubo, a pirâmide deve ter base quadrada, e no do dodecaedro, base pentagonal. É exatamente desse modo que os espelhos articulados devem ser construídos, para visualização dos poliedros regulares.

Ainda em WALTER (1981), encontramos o relato da existência de uma caixa construída com seis espelhos formando um cubo, com as faces espelhadas voltadas para dentro, e com um truncamento em um córner. O visual obtido, ao se olhar para dentro da caixa, é, segundo encontrado nessa obra, um maravilhoso vislumbre das infinitas reflexões.

2.3 Curiosidades a respeito de instrumentos de espelho

Existe uma exposição permanente criada no Departamento de Matemática “F. Enriques” em Milão, onde o ambiente é especialmente criado para que os visitantes entrem em contato com espelhos e caleidoscópios planos e esféricos de todos os tamanhos, inclusive gigantes. Os instrutores ajudam os visitantes, de todas as idades, na utilização dos objetos, mostrando-lhes as diversas maneiras de explorar esses materiais, e assim abrindo oportunidades de abordagem de temas e conceitos geométricos.

Uma outra versão dessa exposição encontra-se em Portugal, nas instalações do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências do Porto. Essa exposição ocorre de maneira itinerante, sendo levada a vários lugares do país.

Essas fotos são encontradas no site (http://www.atractor.pt/simetria), e referem-se à exposição em Portugal.

Figura 30: Fotos da exposição em Portugal

Na sala do laboratório de ensino do Departamento de Matemática da UNESP de Rio Claro/SP, encontramos um caleidoscópio educacional modificado em tamanho gigante, conforme foto abaixo, que fica exposto permanentemente e pode ser manipulado pelos visitantes. Além disso, é utilizado, também, para fins educacionais em cursos oferecidos e disciplinas relacionadas ao uso de instrumentos espelhados no ensino de geometria, bem como tem sido requisitado por outras instituições de ensino superior para exposição em eventos de natureza científica.

Figura 31: Caleidoscópio modificado “Gigante”

C a p í t u l o **3:** Dos dados

3.1 Análise dos dados

A análise dos dados, conforme apresentados no capítulo anterior, efetuou o movimento da *análise ideográfica*. Nessa análise buscamos tornar visíveis os dados significativos presentes na descrição, conforme a pergunta orientadora. Para detectar esses dados significativos, fizemos várias leituras das descrições dos instrumentos, quando pudemos, intencionalmente, recortar passagens importantes. Nessa pesquisa, estes dados foram tomados como *unidades de significado*. Na literatura que trata de procedimentos de pesquisa fenomenológica, as unidades de significado são discriminações prontas no texto, percebidas e julgadas como significativas pelo pesquisador, tendo em vista o objetivo da pesquisa. As unidades de significado foram agrupadas em categorias de convergência que as sintetizam.

A partir da *análise ideográfica* iniciamos a análise e interpretação das unidades de significado buscando suas convergências, ou seja, aspectos comuns às várias unidades. Esse é o momento denominado *análise nomotética,* quando passamos da análise do individual, que nesta pesquisa se refere á análise de um instrumento segundo a apresentação de um autor, para o geral, ou seja, revelando-se as convergências visualizadas.

A *análise nomotética* inicia-se depois de analisadas as unidades de significado. É o momento em que se passa à esfera do geral. Com base nas convergências obtidas mediante a análise e interpretação das unidades de significado, caminhamos para a constituição de "generalidades" GARNICA (1995).

Para apresentar os procedimentos seguidos nessa investigação são apresentadas, para cada instrumento, as tabelas com as unidades de significados extraídas do texto, focando assim o momento da *análise* *ideográfica*. Ao mesmo tempo, em frente às unidades de significado, aparece nas tabelas a interpretação da autora para essas unidades. É o momento em que a *análise ideográfica* se consuma. As convergências obtidas, conforme este procedimento são: **o que é (1)**; **como é feito (2)** e, **por que foram construídos/para que servem (3)**. Tais convergências contêm informações que nos permitiram interpretar e sintetizar os dados à luz da pergunta geradora: **"O que se mostra importante na construção de um kit de instrumentos com espelhos, destinado ao ensino de geometria?".**

A categoria "**o que é**" contém informações a respeito do que se concebe ser cada instrumento, tanto física quanto funcionalmente. A categoria "**como é feito**" abarca informações que se referem à construção do instrumento, ao material que o compõe e à forma como é arquitetado para consolidar-se naquela forma. A categoria "**por que foi construído/para que serve**" evidencia as unidades significativas a respeito da utilidade e do uso previsto desses instrumentos.

Com essas categorias foram reunidas as informações e evidenciadas as concepções de cada autor sobre os instrumentos que produziram e que aqui foram analisados. Assim, pudemos compreender e interpretar como autores e obras colaboraram para a construção do kit de instrumentos, objeto desta pesquisa.

Abaixo, apresentamos as tabelas que evidenciam o movimento da análise no momento da *análise ideográfica*. Posteriormente nos direcionamos para a *análise nomotética*, procurando deixar claros os passos dados do individual ao geral.

E1-Espelho mágico ou "mira"

Autores						
U.S.	Afirmações dos autores					Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	WOODWARD (1977)	DAFFER & CLEMENS (1977)	DAYOUT & LOTT (1977)	MARTIN (1979)	BARBOSA (1993)	Asserções oriundas de interpretação
E1.1	é um dispositivo	é um pedaço de "plexiglass" comercialmente produzido	ferramenta geométrica		"espelhos" coloridos/ é um tipo de espelho plano	O espelho mágico é um dispositivo geométrico
E1.2	é sustentado por dois pedaços de plástico ou madeira/ feito por um pedaço de acrílico na maioria das vezes na cor vermelha transluzente	feita de plexiglass vermelho, que possui a mesma propriedade de um espelho e ao mesmo tempo é transparente	feito por um transparente plástico refletor	feito de um transparente plástico refletor	feito de acrílico, que é pouco translúcido; possui um dispositivo para sustentação do espelho perpendicularmente ao plano do desenho	O espelho mágico é feito de material transparente e espelhado e possui um dispositivo para sustentação

E1.3	possibilita a simetria reflexional/ utilizada como linha de reflexão/ para ajudar a ensinar idéias de simetria, congruência e reflexões/ usada como linha de reflexão, cuja característica permite fazer construções geométricas como construção de retas perpendicu-lares e paralelas; demonstrar que os ângulos bissetores de um triângulo são concorrentes, e ainda, que conceitos de congruência de círculos e outras figuras coplanares podem ser investigados por meio de suas imagens nesse espelho.	para exploração da idéia de simetria reflexional e de linhas de simetria de polígonos e figuras/ para fazer constru-ções geométricas: verificação e desenho de figuras com estrutura simétrica, desenho de figuras geométricas, construção de bissetriz, elaboração de mensagens para serem decifradas e visualiza-das através da mesma; e atividades de constru-ções geométricas, tais como: cópia de círculo, segmento, ângulo, triângulo, construção de bis-setor perpendicular de um segmento, bissecção de ângulo, construção de reta perpendicular a uma reta dada, de triângulo	foi inventada para uso em estudos de transforma-ções geométricas / para estudo de reflexões/ pode ser usada para resolver muitos problemas euclidianos de construções / pode ser usada para trisectar qualquer ângulo dado/ construção de reta paralela a uma reta dada, por um ponto dado fora da reta; transferên-cia de medidas entre retas não paralelas; intersecção de duas linhas, intersecção de duas circunferên-cias e de uma reta e uma circunferên-cia; e trissecção de um dado raio	para as aulas de geometria/ provar o axioma da existência de uma linha de simetria entre dois segmentos no plano/ para construção de rotações do cubo/ pode ser utilizada com sucesso para todos os problemas cuja representa-ção analítica produz uma equação cúbica ou quártica.	para estudo do fenômeno da reflexão e do conceito de simetria reflexional/ verificar se há ou não coincidên-cia da imagem com a outra parte da figura/ para visualizar figuras com estrutura simétrica reflexional	O espelho mágico torna possível a compreensão da simetria reflexional, a construção de figuras geométricas e de rotações do cubo, e a resolução de problemas euclidianos de construção geométrica

E2–O espelho simples

Autores					
U.S.	Afirmações dos autores				Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	WALTER (1972)	JACOBS (1974)	DAFFER & CLEMENS (1977)	WALTER (1981)	Asserções oriundas de interpretação
E2.1	são utilizados para providenciar oportunidades de prática de reconhecimento de figuras diferentes e seleção de partes de figuras congruentes a outra; para observar propriedades de figuras geométricas: diâmetro e raio; para explorar conceitos de orientação, rotação, simetria, linha de simetria, reflexão em uma linha	para ilustrar e apresentar o conceito de reflexão de pontos, de linhas de simetria e conseqüentemente para reconhecer objetos que possuem linhas de simetria	propõem o uso de um espelho para descoberta de linhas de simetria de figuras e visualização das mesmas no espelho, quando este é colocado sobre uma linha de simetria da figura	pode ser usado para fazer e comparar padrões e figuras, e explorar o conceito de simetria como, por exemplo, de letras do alfabeto	O espelho simples é utilizado para: possibilitar a observação de propriedades de figuras geométricas; explicitar o conceito de reflexão; intuir as linhas de simetria de figuras e visualização das mesmas no espelho; comparar padrão de figura

E2–O espelho simples

Autores					
U.S	Afirmações dos autores				Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	WALTER (1972)	JACOBS (1974)	DAFFER & CLEMENS (1977)	WALTER (1981)	Asserções oriundas de interpretação
E2.3	são utilizados para providenciar oportunidades de prática de reconhecimento de figuras diferentes e seleção de partes de figuras congruentes a outra; para observar propriedades de figuras geométricas: diâmetro e raio; para explorar conceitos de orientação, rotação, simetria, linha de simetria, reflexão em uma linha, etc	para ilustrar e apresentar o conceito de reflexão de pontos, de linhas de simetria e conseqüentemente para reconhecer objetos que possuem linhas de simetria	propõem o uso de um espelho para descoberta de linhas de simetria de figuras e visualização das mesmas no espelho, quando este é colocado sobre uma linha de simetria da figura	pode ser usado para fazer e comparar padrões e figuras, e explorar o conceito de simetria como, por exemplo, de letras do alfabeto	O espelho simples é utilizado para a prática de reconhecimento de figuras de figuras que possuem linhas de simetria

E2–O espelho simples

Autores					
U.S.	Afirmações dos autores				Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	BARBOSA (1993)	MURARI (1999)	ALMEIDA (2003)	MARTINS (2003)	Asserções oriundas de interpretação
E2.2	são produzidos por superfícies metálicas polidas. Mesmo nos espelhos comuns, é a camada metálica prata ou alumínio que funciona como espelho, sendo em geral o vidro apenas um suporte e protetor	são produzidos por superfícies metálicas polidas	são produzidos por superfícies metálicas polidas	são produzidos por superfícies metálicas polidas	O espelho simples é produzido com superfícies metálicas polidas
E2.3	funcionam como eixo de simetria/ para busca de figuras com estrutura simétrica e contagem de eixos de simetria/ usando espelhos é possível verificar se há ou não coincidência da imagem com a outra parte da figura	para obtenção de figuras simétrica e estudo de conceitos e propriedades da simetria e de figuras com estrutura simétrica reflexional	para promover situações de aprendizagem trabalhando conceitos como: a reflexão de pontos e figuras, eixo de simetria reflexional, figuras com estrutura simétrica reflexional, congruência e orientação	explorar a idéia da propriedade da reflexão, dos conceitos de simetria, ponto simétrico, eixo simétrico, tanto de figuras geométricas planas como de figuras geométricas espaciais, e reconhecimen-to de eixos de simetria, de planificação de figuras espaciais/ orientação: sentido horário e anti-horário	O espelho simples é apropriado às atividades de ensino e de aprendizagem que explorem propriedades da reflexão e de conceito de simetria

E3-Dois espelhos planos verticais e paralelos

Autores					
U.S.	Afirmações dos autores				Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	JACOBS (1974)	DAFFER & CLEMENS (1977)	MURARI (1999)	MARTINS (2003) e ALMEIDA (2003)	Asserções oriundas de interpretação
E3.1			são dois espelhos postos paralelamente, com as faces frente a frente na vertical	são dois espelhos colocados, paralelamente, na vertical	Os espelhos planos verticais e paralelos são dois espelhos colocados paralelamente na vertical
E3.2				Por dois espelhos simples	Os espelhos planos são produzidos com dois espelhos
E3.3	para estudo de reflexões e translações	para estudo de reflexões e translações, através de reflexões sucessivas.	para abordagem dos conceitos de orientação e translação	para explicitação dos conceitos de orientação e translação	Os espelhos contribuem para o estudo de reflexões sucessivas, de translação e de orientação

E4-Caleidoscópio com dois espelhos

Autores						
U.S	Afirmações dos autores					Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	JACOBS (1970)	ALSPAUGH (1970)	JACOBS (1974)	BISHOP (1976)	DAFFER & CLEMENS (1977)	Asserções oriundas de interpretação
E4.1		caleidoscópio geométrico, é um interessante tipo de espelho	é um instrumento ótico simples			O caleidoscópio é um instrumento ótico simples que usa dois espelhos inclinados
E4.2		feitos com materiais simples e barato: dois espelhos são articulados e colados com um pedaço de adesivo	que usa dois espelhos			é construído com dois espelhos articulados colados com um pedaço de adesivo
E4.3	para produzir polígonos regulares	para introduzir tópicos geométricos: polígonos regulares, coordenadas de pontos em um plano, reflexões e simetria/ para visualização de conceitos matemáticos que podem ser ilustrados pela mudança permitida do ângulo entre os espelhos	para produzir padrões simétricos /para explorar conceito de linhas de simetria, ponto simétrico e padrões simétricos/ para produção de polígonos regulares			Servem para produzir polígonos regulares e explorar o conceito de simetria

E4-Caleidoscópio com dois espelhos

Autores					
U.S.	Afirmações dos autores				Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	WALTER (1981)	ROBERTSON (1986)	BALL & COXETER (1987)	BARBOSA (1993)	Asserções oriundas de interpretação
E4.1		são espelhos articulados/ ferramenta	o caleidoscópio ordinário: são dois espelhos planos inclinados em $\frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{4}$	dois espelhos planos inclinados	O caleidoscópio de dois espelhos é uma ferramenta
E4.2		feitos por duas lâminas de espelho protegidas por papelão e coladas ao longo de uma aresta			O caleidoscópio de dois espelhos é produzido por duas lâminas de espelho articuladas ao longo de uma aresta e protegidas por papelão
E4.3	pode-se explorar sobre ângulos centrais de polígonos regulares	para fazer construções geométricas, tais como: bissecção e trisecção de ângulos, construção de ângulos de tamanhos $2\pi/n$, com n= 3, 4, 5,..., de reta perpendicular a um ponto fora dessa reta, de reta perpendicular a um dado segmento, de polígono regular com *n* lados a partir de um lado dado		para o estudo da variação do número de imagens obtidas a partir da variação de um ponto-objeto colocado entre os espelhos/ pode-se obter rosáceas e estrelados	O caleidoscópio de dois espelhos serve para explorar o conceito de ângulo e fazer construções geométricas

E4-Caleidoscópio com dois espelhos

Autores				
U.S.	Afirmações dos autores			Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	MURARI (1999)	ALMEIDA (2003)	MARTINS (2003)	Asserções oriundas de interpretação
E4.1	para uma construção aperfeiçoada deste espelho articulado devem-se colar nos espelhos um pedaço de papelão envolvendo-os ao mesmo tempo, dando o formato de um livro		dois espelhos articulados na forma de um livro aberto	O caleidoscópio de dois espelhos é construído pela articulação de dois espelhos na forma de um livro aberto
E4.2	Para exploração das propriedades da reflexão em dois espelhos e obtenção de poli vértices e polígonos pelos ângulos formados entre os espelhos	para abordar conceitos de orientação, translação e principalmente para reforçar algumas propriedades dos polígonos regulares/ para apresentar noções de polivértices e de polígonos	para o estudo das relações entre os ângulos dos espelhos e os polígonos obtidos pela reflexão neles; rotação e reflexão	Esse instrumento é adequado para visualização de polígonos

E5-O caleidoscópio educacional individual com três espelhos

Autores			
U.S.	Afirmações dos autores		Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	KINGSTON (1957)	DAFFER & CLEMENS (1972)	Asserções oriundas de interpretação
E5.2	feito por três espelhos planos articulados e perpendiculares a um mesmo plano, juntados por fita adesiva ao longo de suas arestas	produzidos por três espelhos unidos, formando as faces verticais de um prisma triangular	O caleidoscópio educacional individual de três espelhos perpendiculares a um mesmo plano na forma de um prisma, juntados com fita adesiva.
E5.3	para visualização de tesselações planas uniformes	providenciam oportunidades de um olhar profundo sobre as propriedades dos polígonos, incluindo ângulos, linhas de simetria/ para visualização de tesselações	É propício para visualização de tesselações

E5-Caleidoscópio educacional individual com três espelhos

Autores						
U.S.	Afirmações dos autores					Interpretação da pesquisadora
Nome-ação das U.S.	BALL & COXETER (1987)	BARBOSA (1993)	MURARI (1999)	ALMEIDA (2003)	MARTINS (2003)	Asserções oriundas de interpretação
E5.1	pela introdução de um terceiro espelho aos dois espelhos colocados na forma vertical,	conjunto de três espelhos planos perpendicu-lares a um mesmo plano/formam um prisma triangular, com as faces espelhadas voltadas para o interior; uma das bases é fechada com papel claro, celulóide ou vegetal, para entrada da luminosidade no interior. A outra base possui um orifício para observação	conjunto de três espelhos planos perpendiculares a um mesmo plano	conjunto de espelhos perpendiculares a um plano	conjunto de espelhos perpendiculares a um plano	O caleidoscópio individual é um conjunto de três espelhos articulados e perpendicu-lares a um plano, com as faces voltadas para o interior formando um prisma triangular
E5.2	pode-se obter configura-ções de pavimentações	para visualiza-ção de pavimenta-ções do plano		visualizar pavimenta-ções do plano.		O caleidoscó-pio individual é utilizado para visualização de pavimentações planas

E6-Caleidoscópio educacional modificado com três espelhos

Autores				
U.S.	Afirmações dos autores			Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	MURARI (1999)	ALMEIDA (2003)	MARTINS (2003)	Asserções oriundas de interpretação
E6.1	é uma fusão entre o caleidoscópio com dois espelhos e o com três espelhos.			O caleidoscópio modificado é uma fusão entre os caleidoscópios de dois e de três espelhos
E6.2	ao conjunto de dois espelhos articulados, encosta-se um terceiro espelho, o qual é mais baixo			São onstruídos com três espelhos articulados erpendiculares a um plano, de modo que o terceiro espelho é mais baixo
E6.3	para exploração do tema pavimentações do plano	podem ser utilizados como instrumentos facilitadores no estudo de pavimentações do plano e abordagem do tema Progressão Aritmética	para trabalhar com o tema pavimentações do plano	é apropriado para a visualização de pavimentações planas

E7-Caleidoscópio educacional modificado com quatro espelhos

Autores				
U.S.	Afirmações dos autores			Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	MURARI (1999)	ALMEIDA (2003)	MARTINS (2003)	Asserções oriundas de interpretação
E7.1	é um conjunto formado por quatro espelhos planos articulados dois a dois, e perpendiculares a um plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior			O caleidoscópio modificado é um conjunto de quatro espelhos articulados com as faces espelhadas voltadas para o interior
E7.2	Pode ser montado utilizando-se dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio modificado para trabalho em grupo			É construído na forma de um prisma quadrangular
E7.3	para visualização de pavimentações do plano	para visualização de pavimentações do plano	para visualização de pavimentações do plano	O caleidoscópio modificado serve para a visualização de pavimentações do plano

E8-Caleidoscópios generalizados

Autores			
U.S.	Afirmações dos autores		Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	BALL & COXETER (1987)	BATISTELA (2004)	Asserções oriundas de interpretação
E8.1	são caleidoscópios	conjuntos de espelhos que possibilitam a visualização de pontos sobre uma esfera	São caleidoscópios que possibilitam a visualização de pontos sobre uma esfera
E8.2	um terceiro espelho é colocado horizontalmente, ao invés de verticalmente, ao conjunto articulado de dois espelhos	são formados por três espelhos cortados na forma triangular e articulados, na forma de um funil triangular	São construídos por três espelhos formando uma espécie de pirâmide de base triangular
E8.3	possibilitam a visualização de pontos sobre uma determinada esfera/ permitem visualização de vértices isogonais, ou seja, tesselações esféricas por poliedros.	Para visualização dos poliedros de Arquimedes	Servem para a visualização de tesselações esféricas por poliedros e de poliedros semi-regulares

E9-Espelhos articulados especiais

Autores		
U.S.	Afirmações dos autores	Interpretação da pesquisadora
Nomeação das U.S.	WALTER (1981)	Asserções oriundas de interpretação
E9.1	são espelhos articulados	São instrumentos de espelho
E9.2	são construídos pela articulação de triângulos de espelhos	São construídos pela articulação de espelhos devidamente cortados
E9.3	para “ver” poliedros	São especialmente utilizados para visualizar poliedros regulares

3.2 Sobre o movimento de análise

Após essa análise, apresentamos nossa interpretação sobre as convergências maiores. Nesse movimento investigativo detectamos alguns aspectos que se referem aos instrumentos pesquisados. Esses aspectos, como dito anteriormente, foram indicados pela leitura atenta dos dados à luz da pergunta geradora: **"O que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria?"**

Anteriormente, nas tabelas explicitamos as convergências detectadas pela análise das unidades de significado sobre o que os autores dizem a respeito de cada um dos instrumentos pesquisados, e apresentamos um quadro informativo das afirmações relevantes e das interpretações da pesquisadora, expressas em forma de asserção. Das articulações dessas unidades de significado e asserções, foram construídas as seguintes sínteses explicativas:

O **espelho mágico** é uma ferramenta geométrica feita com um pedaço de plástico transparente e espelhado. Possui um dispositivo que o sustenta e que o mantém perpendicular ao plano de apoio. Serve para fazer cópia de figuras, para construções geométricas que até então eram feitas com régua e compasso, para estudo e abordagem dos conceitos de simetria reflexional, de reflexão e de linhas de simetria.

O **espelho simples** é produzido por uma superfície metálica polida, feita de vidro coberto com uma camada metálica refletora, geralmente de prata ou alumínio, que funciona como espelho. É utilizado para trabalhar o conceito de simetria, de figuras com estrutura simétrica e de reflexão.

O conjunto de **dois espelhos planos verticais e paralelos** é constituído de dois espelhos planos paralelos entre si, com as faces espelhadas frente a frente na vertical. Servem para explicitação e abordagem dos conceitos de reflexão, orientação e translação.

O **caleidoscópio com dois espelhos** ou conjunto de **dois espelhos articulados** é um instrumento ótico construído a partir de dois espelhos planos, articulados na forma de um livro aberto, com as faces espelhadas voltadas para o interior, podendo ser encapado. É adequado para visualização de padrões simétricos, para obtenção de polígonos, estudo dos conceitos de ângulo, reflexão e rotação.

Os **caleidoscópios educacionais individuais com três espelhos** são conjuntos de espelhos planos articulados, dois a dois, perpendiculares a um mesmo plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. São utilizados para visualização de pavimentações do plano.

O **caleidoscópio educacional modificado com três espelhos** é um instrumento produzido pela fusão entre os caleidoscópios com dois espelhos e com três espelhos. É construído por três espelhos, de modo que ao conjunto de dois espelhos articulados deve-se encostar um terceiro espelho, mais baixo. È utilizado para visualização de pavimentações planas.

O **caleidoscópio educacional modificado com quatro espelhos,** para trabalho em grupo, é um conjunto formado por quatro espelhos planos perpendiculares a um plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. Pode ser montado utilizando dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio modificado para trabalho em grupo. É utilizado para visualização de pavimentações do plano.

Os **caleidoscópios generalizados** são caleidoscópios que possibilitam a visualização de pontos sobre uma mesma esfera. São construídos com três espelhos, formando um ângulo triedral. Possibilitam a visualização de pontos sobre uma esfera, permitindo a visualização de vértices isogonais, de tesselações esféricas por polígonos esféricos e de poliedros semi-regulares.

Os **espelhos articulados especiais,** ou caleidoscópios especiais, são instrumentos construídos pela articulação de espelhos cortados com ângulos precisos, cujo vértice é o único ponto em comum entre eles. São utilizados para a visualização dos poliedros de Platão.

Dessas sínteses, procedemos a mais um trabalho articulador, buscando reunir aspectos comuns nelas presentes, estruturando convergências com a intenção de antever aspectos centrais para a construção do kit pretendido.

- Todos os instrumentos são construídos a partir de espelhos, ou outro material espelhado, como é o caso da mira, uns simples e alguns articulados e arranjados para produzir visual simétrico. Desse modo, são recursos didáticos para a geometria, pois refletem o visual de objetos geométricos, na medida em que são colocados *padrões* (no caso dos caleidoscópios *bases*) à frente dos mesmos, possibilitando assim, a exploração de temas, conceitos e propriedades de tais objetos.
- O espelho mágico, o espelho simples, os caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos permitem a visualização de objetos geométricos planos. Os caleidoscópios generalizados e os espelhos articulados especiais para "ver" poliedros possibilitam a visualização de objetos geométricos do espaço.
- Todos os instrumentos foram utilizados para trabalhar conceitos, objetos, temas ou propriedades geométricas de figuras que possuem linhas de simetria. A partir da visualização desses "entes" é que o trabalho torna-se possível.
- Os caleidoscópios com três e quatro espelhos são utilizados para visualização de tesselações do plano ou do espaço, conforme as especificidades de cada um.
- Todos os instrumentos construídos com espelhos servem para visualização de figuras que possuem linhas de simetria. Assim, permitem o trabalho com objetos do mundo geométrico e, por isso, endereçados para essa utilidade no ensino de geometria.

Capítulo 4: O kit de espelhos

4.1 A construção do kit

Nosso trabalho tem por foco a pergunta orientadora **“O que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria”?** Como já foi explicitado, fizemos um estudo das obras de autores que construíram instrumentos com espelhos e/ou trabalharam com estes instrumentos no ensino de geometria, e, conforme dito ao final do capítulo anterior, o que apresentam em comum é o uso para visualização de objetos que possuem linhas de simetria. Assim, os espelhos simples são utilizados para visualização, investigação de objetos com linhas de simetria, e para exploração de propriedades e fenômenos que acompanham a reflexão possibilitada por eles (a simetria reflexional, a translacional e a rotacional). Os caleidoscópios com três e quatro espelhos são utilizados para visualização de tesselações planas ou espaciais, conforme a construção de cada um, enquanto os espelhos articulados especiais são utilizados para visualizar poliedros regulares.

Porém, nossa meta, como já foi dito, é ir além do que está feito, ou seja, construir os instrumentos e agrupá-los em um conjunto que os englobe e os transcenda, pois esse conjunto conterá todos os instrumentos e mais uma contribuição, de nossa autoria, para aplicações dos caleidoscópios generalizados no ensino.

Como isso é possível, segundo a nossa compreensão?

A construção do kit tem a parte teórica e a parte prática, ou seja, há um roteiro: é necessária a devida atenção aos princípios matemáticos que sustentam, asseguram e determinam ângulos exatos nos espelhos para que, quando articulados, determinem ângulos entre os espelhos que possibilitem a reflexão perfeita de imagens e a repetição delas sem deixar lacunas ou sobreposições.

Com a mesma atenção, devem ser observados e considerados os tamanhos sugeridos para os espelhos e o truncamento dos setores circulares dos espelhos que formam os caleidoscópios generalizados. São detalhes que aperfeiçoam o uso dos instrumentos.

O detalhe do truncamento no vértice dos caleidoscópios generalizados é sugerido por nós, almejando um aperfeiçoamento no manuseio e substituição das bases. Essa sugestão deve ser observada ainda durante a confecção dos moldes dos espelhos.

A seguir, trataremos de construir cada um dos instrumentos, que compõem o kit podendo, por vezes, como acabamos de referir, somar ou subtrair detalhes que facilitem sua manipulação, manuseio e otimização.

Ressaltamos que os caleidoscópios educacionais individuais com três espelhos não farão parte do kit que propomos construir, visto que concordamos com as vantagens apresentadas por MURARI (1999) a respeito da utilização dos caleidoscópios modificados para trabalho em grupo. Assim sendo, é nossa compreensão substituir os caleidoscópios planos individuais pelo caleidoscópio plano modificado para trabalho em grupo.

Para a construção desse kit, inicialmente, atentamos às dimensões de medidas e aos ângulos nos cortes que cada instrumento deve ter, segundo constam nas sugestões e exigências evidenciadas nas descrições desses instrumentos, no capítulo dois. Então, primeiramente tratamos de confeccionar os moldes desses espelhos com as medidas e ângulos, bem determinados. Na confecção dos modelos, utiliza-se material feito de papel mais ou menos resistente, como papel cartão e/ou cartolina. Assim, efetuados todos os moldes, dirigir-se até uma vidraçaria e solicitar que sejam cortados os espelhos de acordo com aquelas medidas e naquelas quantidades.

Os espelhos necessários, com tamanhos aproximados e utilizados na construção desse kit de instrumentos, são:

a) 2 espelhos retangulares com medidas de 15 cm por 19 cm;
b) 2 espelhos retangulares com medidas de 25 cm por 22 cm;
c) 2 espelhos com medidas de 35 cm por 15 cm;

d) 3 espelhos com ângulos centrais de medida 54º44´, (cortados na forma de setores circulares, como o desenho abaixo, cujo modelo corresponde também ao material dos itens *e)* ao *j)*)

e) 1 com ângulo central de 70º32´;

f) 1 com ângulo central de 35º16´;

g) 1 com ângulo central de 31º43´;

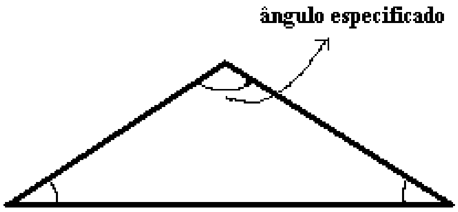
h) 1 com ângulo central de 37º23´;

i) 1 com ângulo central de 20º54;

j) 1 com ângulo central de 45º;

k) 3 espelhos cortados na forma de triângulo isósceles, de modo que apenas um ângulo tenha medida de 109º 28';

l) 4 espelhos triangulares isósceles com um ângulo de 70º 32´;

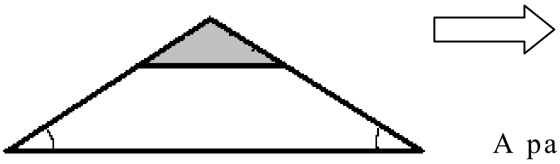


m) 3 espelhos triangulares isósceles com um ângulo de 63º 26´;

n) 3 espelhos triangulares isósceles com um ângulo 90º;

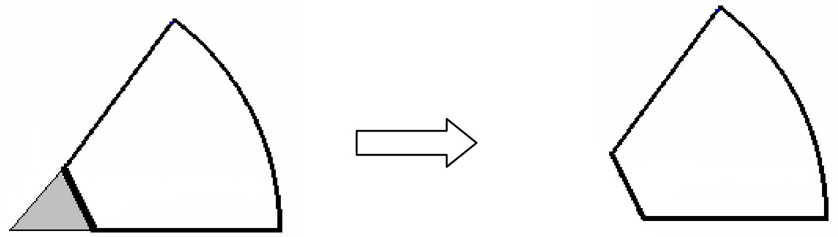
o) 5 espelhos triangulares isósceles com um ângulo de 41º 49´;

Os triângulos de espelhos devem ter, também, o vértice truncado. Então, ao preparar os moldes dos espelhos, deve-se atentar para que os mesmos sejam cortados paralelamente ao lado oposto à base, como na figura abaixo, onde a região colorida em cinza significa a parte que deve ser extraída do espelho. As recomendações citadas devem ser rigorosamente seguidas, pois esses espelhos articulados foram assim projetados exatamente para visualização de poliedros regulares de Platão, cujos detalhes são indispensáveis na formação desses instrumentos, WALTER (1981).




A parte colorida em cinza deve ser extraída dos espelhos.

Percebemos que os caleidoscópios generalizados construídos com esses espelhos cortados na forma de setor circular podem ser manuseados mais facilmente. No que diz respeito à substituição de bases, o trabalho pode ser facilitado se os setores circulares da figura acima tiverem os centros extraídos, como mostra a figura abaixo.



Além dos espelhos acima especificados, relacionamos abaixo os materiais adicionais: um pedaço de aproximadamente 2 metros de material emborrachado, papelão ou madeira, com o qual possa encapar esses instrumentos de modo a fortalecer sua estrutura, (sugerimos, por exemplo, o e.v.a. que foi escolhido por nós na construção do kit, e que é um material emborrachado, vendido em papelarias); cola de contato resistente (para colagem do e.v.a nos espelhos. Optamos pelo tipo de cola utilizado por marceneiros); estilete (para cortar o e.v.a.); um rolo de esparadrapo (para arranjar os espelhos articulados antes de encapá-los com e.v.a.); um pincel ou um pedaço de madeira (para espalhar a cola).

Descrevemos a seguir os procedimentos para construção dos instrumentos:

A cola de contato deve ser aplicada no espelho, sobre o e.v.a. numa área correspondente ao tamanho dos espelhos que serão encapados, observando as especificações de uso da cola escolhida. Em seguida,devem ser unidas as duas superfícies que contêm cola, pressionar alguns segundos e atentar para que ocorra total aderência dos materiais. No caso de espelhos articulados, deve-se, primeiramente abrir os espelhos em determinados ângulos para verificar se a abertura deixada entre eles foi suficiente. Após esse procedimento, há que se espalhar a cola na parte embaçada do espelho e no material escolhido para envolvê-lo, observando sempre se os ângulos estão se formando devidamente entre os espelhos.

4.2 Construindo o kit

A começar pelo mais simples, encapamos, conforme explicitamos acima, cada um dos 2 espelhos retangulares com medidas de 15 cm por 19 cm, do item (a), separadamente. Obtivemos, então, dois **espelhos simples** que podem ser utilizados **individualmente** ou na forma de **dois espelhos planos paralelos**.

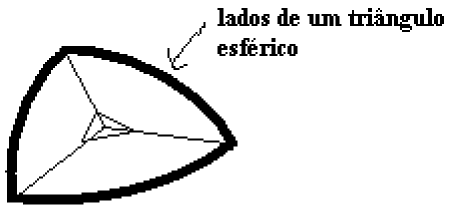
Em seguida, tomamos e encapamos separadamente cada um dos 2 espelhos com medidas de 35 cm por 15 cm, do item (c). Os 2 espelhos retangulares com medidas de 25 cm por 22cm, do item (b), devem ser encapados e fixos na forma de um livro aberto. Para isso, passamos cola nas costas dos espelhos e no e.v.a., numa área de aproximadamente 52 cm por 22 cm, e depois de aguardado o tempo necessário para eficácia total da cola de contato, fixamos os espelhos, sobre a superfície emborrachada já estruturados com esparadrapo, deixando uma distância entre eles, a fim de possibilitar sua articulação e obtenção de ângulos. Com o estilete aparamos os excessos e deixamos secar. Esses dois espelhos articulados na forma de um livro aberto, que possibilitam a formação de ângulos, é o que se denomina **caleidoscópio plano com dois espelhos.**

Quando se encosta ao caleidoscópio de dois espelhos um outro espelho, o do item (c), tem-se o **caleidoscópio plano modificado com três espelhos** para trabalho em grupo. Utilizando dois conjuntos do caleidoscópio plano de dois espelhos, obteremos o **caleidoscópio plano modificado com quatro espelhos** para trabalho em grupo, ambos sugeridos por MURARI (1995) e MURARI (1999).

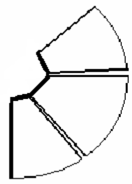
Para construir os **caleidoscópios generalizados,** sugerimos que os setores circulares sejam cortados com tamanho de raio aproximado de 17 cm.

Em BATISTELA (2004), apresentamos os requisitos necessários para a construção dos caleidoscópios generalizados.

Sugerimos que os espelhos que formam os caleidoscópios generalizados sejam cortados na forma de setores circulares, embora não seja necessária a forma arredondada para o efeito pretendido. Num estudo mais aprofundado sobre a dedução dos ângulos dos espelhos que compõem os caleidoscópios generalizados, percebemos que na borda do caleidoscópio já montado tem-se determinado um triângulo esférico. Isso será mais explicado no capítulo seguinte.

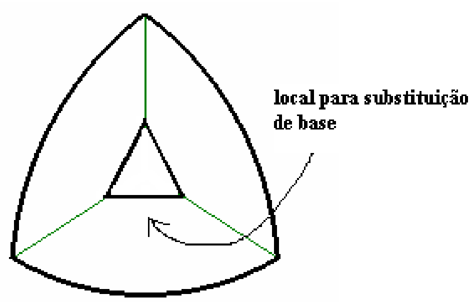


Fizemos a construção desses instrumentos da seguinte forma: tomamos os seguintes trios de espelhos cortados na forma de setores circulares com ângulos de (70°32′, 54°44′, 54°44′); (54°44′, 35°16′, 45°) e (20°54′, 31°43′, 37°23′), e articulamos estes de modo a ficarem da forma de uma pirâmide triangular truncada, com as faces espelhadas voltadas para o interior, e com os lados bem ajustados entre eles para a formação perfeita dos ângulos.



Depois de devidamente ajustados os espelhos, apoiados num plano, como na figura ao lado, passe cola de contato sobre as costas dos espelhos articulados (mas ainda sem o devido fechamento que os determina fixos) e sobre o e.v.a., numa área um pouco maior que a correspondente aos três espelhos.

Decorrido o tempo necessário para a cola funcionar com eficácia, cole os espelhos sobre o e.v.a., fixando-os na forma de um funil triangular. O tamanho do raio do setor circular por nós sugerido é aproximadamente 17 centímetros. Justifica-se por permitir trabalhar e obter figuras refletidas em esferas de tamanhos diversos.



Depois de fixados os espelhos, chega-se a um objeto da forma de um funil triangular, com uma abertura maior no lado oposto ao ponto de intersecção dos três espelhos, veja a figura ao lado, a qual é usada para a substituição de desenhos, ou seja, de bases caleidoscópicas que geram imagens.

Figura 32: Foto da reflexão de um poliedro

Procedendo da mesma forma com os três trios de setores circulares, constroem-se os três **caleidoscópios generalizados**.

A **mira**, ou o **espelho mágico**, pode ser adquirido em papelarias. São vendidos, geralmente, para uso nas aulas de educação artística e vêm acompanhados de dois pedaços de madeira que funcionam como suporte.

Os espelhos articulados especiais encontrados em WALTER (1981) foram calculados, exatamente, para produzirem o visual de poliedros regulares, ou seja, os poliedros de Platão. Os ângulos desses instrumentos são determinados pela resolução de equações que envolvem o ângulo no centróide dos poliedros e um dos vértices do mesmo. Assim, para cada poliedro, temos ângulos determinados que os espelhos devem ter para produzir tal visual. Para visualização do tetraedro, os espelhos devem ter ângulos de *109^o 28'*; Para o cubo necessitamos que os ângulos dos triângulos no vértice da pirâmide sejam *70^o 32´*. Para a visualização do icosaedro, do octaedro e do dodecaedro, os ângulos vértices dos espelhos devem medir, respectivamente, 63^o 26´, 90^o e 41^o 49´.

Na seção em que apresentamos os instrumentos feitos com espelhos articulados especiais, que favorecem a visualização de poliedros regulares, pudemos notar que tais espelhos não foram chamados de caleidoscópios. Porém, se considerarmos a definição para os caleidoscópios generalizados, que possibilitam a visualização de pontos sobre uma esfera, encontrada em BALL & COXETER (1987), surge a questão: será que estes espelhos articulados especiais inventados por Kim Hicks e apresentados em WALTER (1981) são caleidoscópios?. Segundo

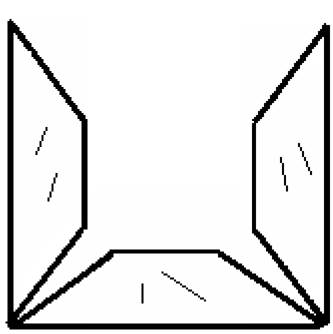
ALSPAUGH (1970), dois ou mais espelhos articulados são chamados caleidoscópios quando possibilitarem a repetição perfeita de imagens, que é o caso encontrado em WALTER (1981). Assim, chamaremos estes conjuntos de espelhos articulados especiais de “caleidoscópios especiais”.

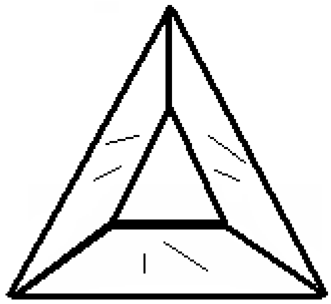
Os ângulos formados entre os espelhos articulados não são os mesmos ângulos deduzidos através da inequação $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n} > 1$ (encontrada em BALL & COXETER (1987)), a qual determina a existência de três ternas de soluções para esta inequação que são: ((2,3,3); (2,3,4) e (2,3,5)), sendo que uma das soluções pode variar **(**2,2,n). As três ternas dão-nos ternas de ângulos, para $n \in \aleph$, (90°, 60°, 60°), (90°, 60°, 45°) e (90°, 60°, 36°**)** às quais correspondem os caleidoscópios generalizados de ângulos bem determinados e à terna com um ângulo variável corresponde conseqüentemente, o caleidoscópio com um ângulo que pode variar.

Enfim, a construção desses instrumentos segue os mesmos passos que todos os anteriores. Para a construção do caleidoscópio que possibilita a visualização, por exemplo, do tetraedro, tomar os 3 espelhos cortados na forma de triângulos isósceles, de modo que apenas um ângulo tenha medida de 109° 28’, do item (k).

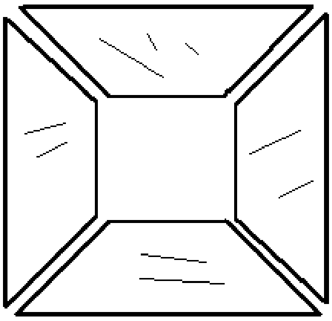
Para encapá-las utilizar um pedaço de e.v.a. de área um pouco maior que a correspondente à dos três espelhos. Espalhar cola de contato sobre o e.v.a. Utilizar esparadrapo para articular os espelhos, de modo que a estrutura fique fixa quando for encapada. Em seguida, passar cola nas costas desses três espelhos e aguarde o tempo necessário para o efetivo poder fixador da cola. Então, coloquem em contato as duas superfícies que receberam cola. Pressionar alguns segundos, cuidando para que a estrutura esteja realmente firme, formando ângulos fixos. Assim, tem-se construído o **caleidoscópio especial que permite a visualização do tetraedro.**

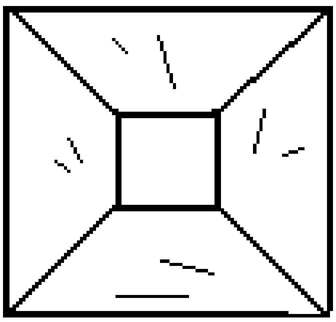
As figuras abaixo podem ajudar a entender como os espelhos devem ser articulados. A primeira é um esboço de como os espelhos devem ser dispostos e articulados; a segunda é uma figura do instrumento já pronto.





Para construir os demais espelhos articulados para visualização de poliedros de Platão, procedemos da mesma maneira. O **caleidoscópio especial que possibilita a visualização do cubo** é construído com os 4 espelhos triangulares com um ângulo de 70^{o} 32′, do item (p).





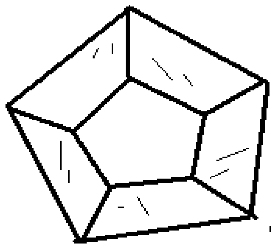
Para a visualização do icosaedro, tome os 3 espelhos com um ângulo de 63^{o} 26′, do item (q). Observe uma foto do **caleidoscópio especial que possibilita a visualização do icosaedro.**

Figura 33: Caleidoscópio especial refletindo o icosaedro

O octaedro pode ser visualizado nestes caleidoscópios, quando se articulam os 3 espelhos com ângulos de 90^o , do item (r). Veja foto de um **caleidoscópio especial para visualização do octaedro**, refletindo um octaedro nos espelhos.

Figura 34: Caleidoscópio especial refletindo o octaedro

Para construir o **caleidoscópio especial para visualização do dodecaedro,** tomar os 5 espelhos triangulares isóceles, com ângulos de $41^o\ 49'$, explicitados no item (s), e proceder da forma que explicitamos pormenorizadamente na construção do espelho articulado para visualização do octaedro, imediatamente acima apresentada.



O espelho articulado para visualização do dodecaedro deve ter a forma dessa figura.

Capítulo 5: Apresentando o construído

5.1 Apresentando

Durante a construção deste kit e do nosso envolvimento com a pesquisa, pudemos visualizar uma nova utilidade para os caleidoscópios generalizados. Dentre a bibliografia pesquisada e mencionada no capítulo dois, sobre a utilização dos instrumentos, encontramos os **caleidoscópios generalizados,** apresentados por BALL & COXETER (1987), para os quais a utilização referida é para visualização de vértices de poliedros pela variação de pontos-objetos colocados no interior do ângulo triedral, formado entre os três espelhos. Contudo, nós vemos, como já dissemos, *uma nova utilidade* para estes caleidoscópios: *a visualização de poliedros semi-regulares*, ou, se preferir, dos *poliedros de Arquimedes*.

Em BATISTELA (2003), apresentamos a construção da base que, quando colocada entre o ângulo sólido formado entre os três espelhos, permite a visualização do poliedro denominado de rombicuboctaedro perfeito, que é formado por quadrados, hexágonos e octógonos regulares, e ao qual nos referimos por (4, 6, 8), bem como, a explicação de como se obter esse poliedro através dessa base, quando esta é colocada no interior do ângulo triedral formado pelos três espelhos.

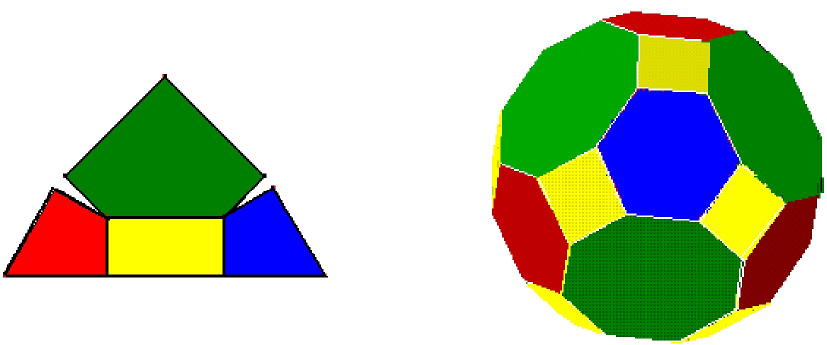


Figura 35: Base para visualização do poliedro (4,6,8)

Em BATISTELA (2004), apresentamos espelhos e caleidoscópios que são utilizados para o ensino de geometria, entre estes, os caleidoscópios generalizados. A idéia central desse trabalho foi a discussão a respeito dos limites e das possibilidades da utilização de instrumentos que permitem a visualização no ensino de geometria.

Sabemos das muitas utilidades desse material no contexto delimitado, dadas as características de reflexão simétrica dos espelhos e da grande quantidade de objetos geométricos com linhas de simetria. Mas será que esta visualização não tem limitações no que se refere à aprendizagem? A pergunta que norteou a discussão foi "Será que a visualização, em geometria, coloca limitações na formação dos conceitos geométricos dos objetos que estão sendo visualizados?".

Exploramos a opinião de autores, como por exemplo SARAIVA (1992), HERSHKOWITZ (1994) e HADAMARD (1945), sobre a visualização em geometria. Encontramos nesses autores que a visualização tem efeitos positivos na compreensão dos alunos e até mesmo na resolução de problemas, pois cooperam na organização da informação em modelos mentais com significados. Porém, tais autores alertam para a necessidade da constatação matemática das propriedades e dos conceitos em acréscimo à constatação visual dos mesmos, em decorrência da possibilidade de que a visualização limita a habilidade individual na formação dos conceitos matemáticos.

Assim, concluímos que quando do uso de espelhos e caleidoscópios para fins de constatação de imagens e familiarização com objetos, conceitos e propriedades, devemos tomar os devidos cuidados com as atividades propostas, bem como com a condução desse trabalho em sala de aula. Não podemos esquecer, também, de efetuarmos a comprovação matemática do objeto antevisto. Salientamos que essa questão depende do objetivo da atividade. Nas séries iniciais, por exemplo, podem ser utilizados para introduzir conceitos sem demonstração.

Em MURARI e BATISTELA (2004), apresentamos, detalhadamente, a maneira como construir os caleidoscópios generalizados e a possibilidade de visualização dos poliedros de Arquimedes nesses caleidoscópios. Até então, como já havíamos dito, não temos registro de que estes caleidoscópios tenham sido utilizados para visualização de poliedros semi-regulares. Esta possibilidade acrescenta-se às várias aplicações dos instrumentos que completam o kit que estamos construindo. Nesse trabalho, mostramos uma maneira inovadora de estudar os poliedros de Arquimedes, com a construção das bases caleidoscópicas através de régua e compasso e no software Cabri-géomètre II, para serem visualizadas nos caleidoscópios generalizados.

As bases para visualização dos poliedros são construídas, apropriadamente, para que apenas os pontos vértices dos poliedros estejam sobre a esfera. Assim, na sua construção, há necessidade de atentar para os polígonos que formam o poliedro. Tais polígonos, quando desenhados, farão parte da base planificada. Esta passará por dobras e recortes para um ajuste perpendicular dos lados da mesma aos espelhos, e, conseqüentemente, para gerar o visual perfeito do poliedro.

Para referenciar cada poliedro utilizaremos uma notação numérica que corresponderá ao número de lados de cada polígono que o forma, e que se ajusta ao redor de um vértice. Todos os vértices do poliedro conterão sempre os mesmos polígonos, combinados e na mesma ordem. Assim, a notação (4,6,8) significa que em cada vértice do poliedro encontraremos um quadrado, um hexágono e um octógono (todos regulares), sempre nessa ordem.

Apresentamos, a seguir, o passo a passo na construção gráfica, com régua e compasso e com o software Cabri-gèométre II, de duas bases que possibilitam a visualização de dois poliedros semi-regulares (ou poliedros de Arquimedes), o (4,6,8) e o (3,4,5,4). Essas bases são adequadamente construídas para que, quando colocadas no interior dos caleidoscópios generalizados, forneçam as figuras dos poliedros.

- **Construção da base para visualização do sólido (4,6,8), com o software Cabri-géomètre II**

Para construirmos a base para o sólido (4,6,8), os seguintes passos devem ser seguidos:

1) Construir um octógono regular (polígono regular). Nomear o ponto central como *O''* (rótulo).

2) A partir da base do octógono, indicada por *AB*, desenhar um quadrado. Para isso, traçar a reta *s* perpendicular ao lado *AB* por *A*. e a reta *t*, perpendicular a *AB* por *B* (reta perpendicular). Fazer duas circunferências de raio *AB:* uma com centro em *A* e outra com centro em *B* (circunferência). Determinar os pontos *D* e *C*, respectivamente, sobre as retas *s* e *t*. Unir os pontos *A, B, C e D* (polígono) para obter o quadrado *ABCD*.

3) Construir duas circunferências com raio *AB* e centros em *B* e em *C* (circunferência), para obter o ponto fora do quadrado, na intersecção das duas circunferências, que deve ser rotulado por *O'* (rótulo). Fazer uma circunferência de centro *O'* e raio *O'B* para obter os pontos *L* e *P* (rótulo). Construir outras duas circunferências com centros, agora em *L* e *P* e raio *AB=O'L=O'P*, para obter os pontos *M* e *N*, que são também vértices do hexágono regular de centro *O'*. Unir os pontos *B,L,M,N,P e C* com a ferramenta (polígono) para obter o hexágono.

4) Obter o ponto médio do lado *AB* do quadrado (ponto médio). Construir a reta *u* passando pelo ponto *O"* do octógono e pelo ponto médio encontrado (reta). Construir o simétrico do hexágono em relação à reta *t* (simetria axial). Rotular como *O,* o ponto simétrico do centro do hexágono.

5) Unir *O* a *O'* (segmento) e a partir de *O, O'* e *O''*; baixar as perpendiculares aos lados dos polígonos, contendo os vértices *A* e *B* (reta perpendicular), obtendo os pontos *E ,F, G* e *H*.

A figura geométrica formada pelos polígonos *BAGO''HB* e *OO'FBAEO* é a planificação da base. Depois de recortada, é preciso unir (por exemplo, através de uma fita adesiva) G a E e H a F para que a base se ajuste perfeitamente aos espelhos.

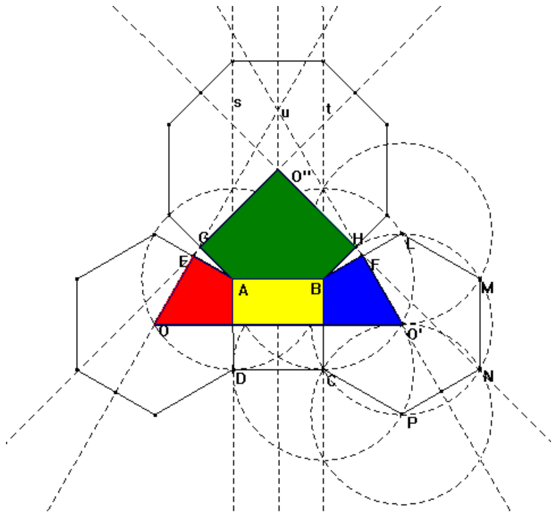


Figura 36: Base para visualização do sólido (4,6,8)

Considerando a base planificada na figura acima, temos na porção verde uma quarta parte do octógono, na amarela meia parte do quadrado e nas porções azul e vermelha uma sexta parte dos hexágonos. Observamos, ainda na mesma figura, que A e B são dois vértices do poliedro. Se somarmos os ângulos internos dos polígonos, em cada vértice, teremos um total de 345^o. A diferença de 15º para 360º é justificada pelo espaço de 15^o que se forma na lateral da figura planificada, e que será suprimido quando da montagem da base. Mais uma vez há de se frisar que a base deverá se ajustar, perpendicularmente, aos três espelhos do caleidoscópio, a fim de fornecer o visual perfeito.

Observamos na figura a seguir a base devidamente cortada e dobrada. Na figura 38 temos essa base ajustada no caleidoscópio de ângulos (90^o, 60^o, 60^o), gerando o visual do poliedro. E na figura 39 temos a representação do sólido (4,6,8) por inteiro, a fim de comparação e comprovação.

Figura 37: Base para o poliedro (4,6,8)

Figura 38: Visual do poliedro (4,6,8)

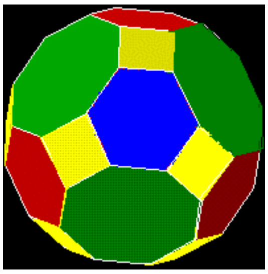


Figura 39: Sólido (4,6,8)

- **Construção da base para o sólido (4,6,8), usando régua e compasso**

Para construirmos a base para o sólido (4,6,8), os seguintes passos devem ser seguidos:

1) Com o compasso, fazer uma circunferência qualquer de centro *Q*. Dividi-la em oito partes iguais, traçando dois diâmetros perpendiculares e, a seguir, as bissetrizes de dois ângulos retos adjacentes. Unir, através de segmentos, os pontos que determinam essa divisão, para obter o octógono regular *ABCDEFGH*.

2) A partir do lado *AB*, construir um quadrado. Traçando as retas *s* e *t* perpendiculares a *AB* por *A* e por *B*. Para isso, fazer duas circunferências de raio *AB*, com centros em *A* e em *B*, obtendo os pontos *I* e *J* sobre *s* e *t*, respectivamente. Os pontos *A*, *B*, *J* e *I* são os vértices do quadrado, o qual deverá ser traçado com régua.

3) Construir um hexágono (de centro *P*) a partir do lado *BJ* do quadrado. O centro *P* do hexágono encontra-se na intersecção das circunferências com raio *BJ* de centro em *B* e depois em *J*. A medida dos lados do hexágono será igual ao raio da circunferência. Ligar os pontos encontrados para obter o hexágono, como na figura 43. Proceder analogamente em relação ao lado *AI* para obter o hexágono de centro *O*.

4) Traçar o segmento $\overline{OP}$ (centros dos hexágonos). Baixar perpendiculares do centro dos polígonos até os lados dos polígonos que contêm os vértices *A* e *B*, para obter *M*, *N*, *K*, e *L*. A figura poligonal formada pelos pontos *MOPNBAM* e *KQLBAK* é a base procurada. Aplicar cores às regiões que são partes dos polígonos para obter a base colorida.

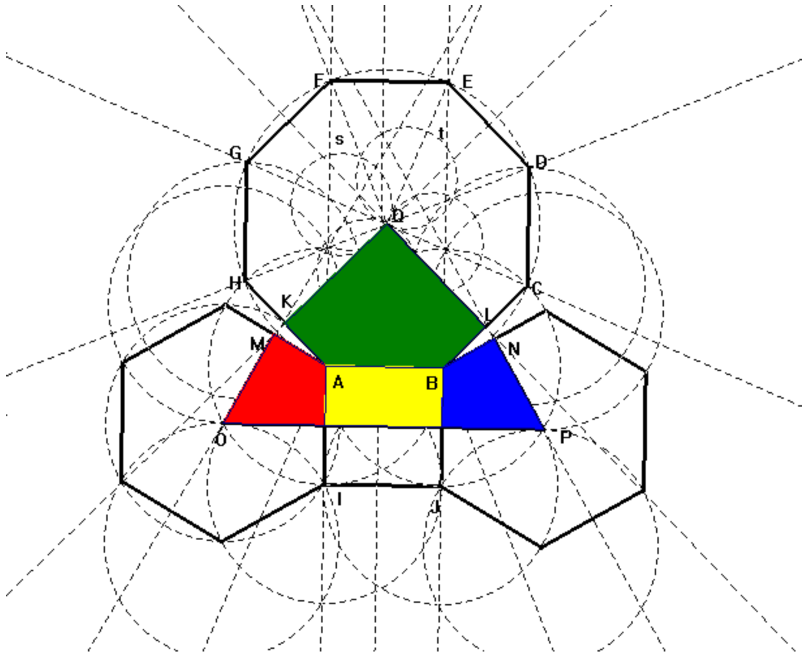


Figura 40: Base para o poliedro (4,6,8), feita com régua e compasso

- **Construção da base para o sólido (3,4,5,4), com o software Cabri-géomètre II**

Para construirmos a base para o sólido (3,4,5,4), os seguintes passos devem ser seguidos:

1) Construir um pentágono regular *ABCDE* (polígono regular), e nomear o centro deste por *Q* (rótulo).

2) A partir dos lados *AB* e *AE* do pentágono, construir dois quadrados. Traçar as retas *s, t, u* e *v* perpendiculares aos respectivos lados pelos pontos *A, B* e *E* (reta perpendicular). Fazer duas circunferências com raio *AB* e centros em *A* e *B* para determinar os pontos nomeados por *F*, *I* e *G* (ponto e rótulo) sobre as retas *u, v* e *t*, respectivamente. Com raio *AE* e centro em *E,* fazer uma circunferência para obter *H* (ponto e rótulo) sobre a reta *s*. Unir os pontos *A, B, I, F e A*; e depois *A, G, H, E e A,*

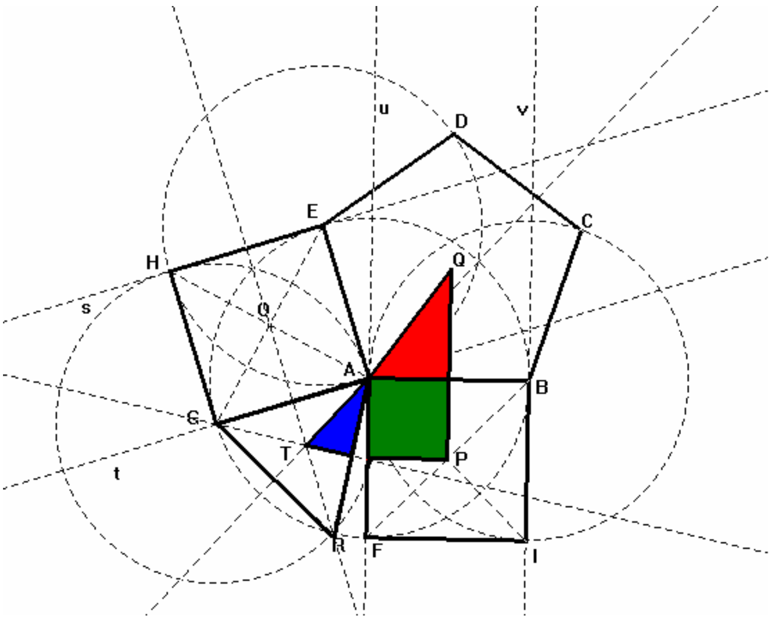
(polígono) para obter os quadrados de centro P e O (ponto e rótulo). Os centros dos quadrados são obtidos pela intersecção de suas diagonais.

3) A partir do vértice A e do lado AG do quadrado de centro O, construir o triângulo eqüilátero ΔAGR de centro T; onde o ponto R é determinado pela intersecção das circunferências de raio AG com centro em A e em G (circunferência, ponto e polígono); e o centro T é obtido pela intersecção das bissetrizes do ΔAGR (bissetriz, ponto e rótulo).

4) Encontrar os pontos médios de AF e de AR, rotulando-os como M e N (ponto médio e rótulo).

5) Com a ferramenta (polígono) unir os pontos A,M,P,Q,A e A,T,N,A, para traçar a base procurada.

6) Usando a ferramenta (preencher) pode-se colorir as partes dos polígonos que formam a base. As construções auxiliares aparecem na figura 47 com traço pontilhado.



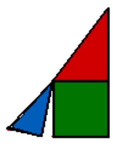


Figura 41: Base para o poliedro (3,4,5,4) construída com o software

A porção colorida na figura acima é a base caleidoscópica. O espaço em branco (12º) entre o triângulo e o quadrado é necessário para que, quando recortados, e depois unidos, os lados da base fiquem perpendiculares a todos os espelhos. Abaixo, na figura 42, temos a foto da base devidamente cortada e dobrada; na figura 43, o visual da mesma, fornecido pelo caleidoscópio generalizado de ângulos (90°, 60°, 36°), e, na figura 44, o poliedro.

Figura 42: Base recortada e dobrada

Figura 43: Visual do poliedro

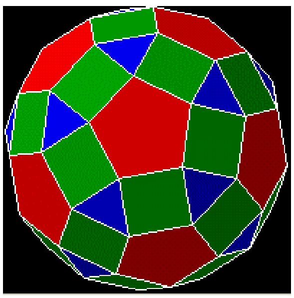


Figura 44: Poliedro (3,4,5,4)

▪ Construção com régua e compasso da base para o sólido (3,4,5,4)

Para construirmos a base para o sólido (4,6,8), os seguintes passos devem ser seguidos:

1) Fazer, com o compasso, uma circunferência qualquer de centro *O*. Dividi-la em cinco partes iguais. Isso pode ser feito através da obtenção do lado do pentágono regular inscrito em uma circunferência de raio *r*, feito separadamente, pois é sabido que o lado deste corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo que tem por catetos o próprio raio e o segmento áureo deste raio. Ligar, com a régua, os cinco pontos encontrados, obtendo-se o pentágono regular *ABCDE*.

2) Pelos lados *AB* e *AE* do pentágono, construir dois quadrados. A partir de *A* e *B,* traçar as retas *u* e *v* perpendiculares ao lado *AB*. Por *E* e *A* trace *s* e *t* (semi-retas) perpendiculares ao lado *AE*. Fazer três circunferências de raio *EA=AB* e centros em *A*, *B* e *E* para obter *I, J, K* e *L*. Os pontos *A, E, L e J* são vértices do quadrado de centro *O''* e *A ,I, K e B* do de centro *O'*. Unir esses vértices para determinar os quadrados *AELJ* e o *AIKB*. Os centros dos quadrados são obtidos pela intersecção das diagonais dos mesmos.

3) Pelo lado *AJ* construir um triângulo eqüilátero. O vértice *R* será encontrado na intersecção das circunferências de raio *AJ* e centros *A* e *J*. A intersecção das bissetrizes dos ângulos do triângulo *AJR* determinará o centro *T*.

4) Encontrar *M* e *N*, os pontos médios de *AI* e *AR*. Fazer duas circunferências de raio *AI* e centros em *A* e em *I*. Ligar, através de um

segmento, os dois pontos de intersecção dessas circunferências. O ponto em comum entre essa reta e o lado AI é o ponto médio M. Para obter N, faça duas circunferências com centros em A e R e raio AR e trace o segmento pelos dois pontos em comum entre elas. A intersecção desse segmento com o segmento AR determina o ponto N.

5) Traçar os segmentos $O'M$, $O'O$, AO, TN e TA.

A região poligonal colorida em destaque é a base planificada.

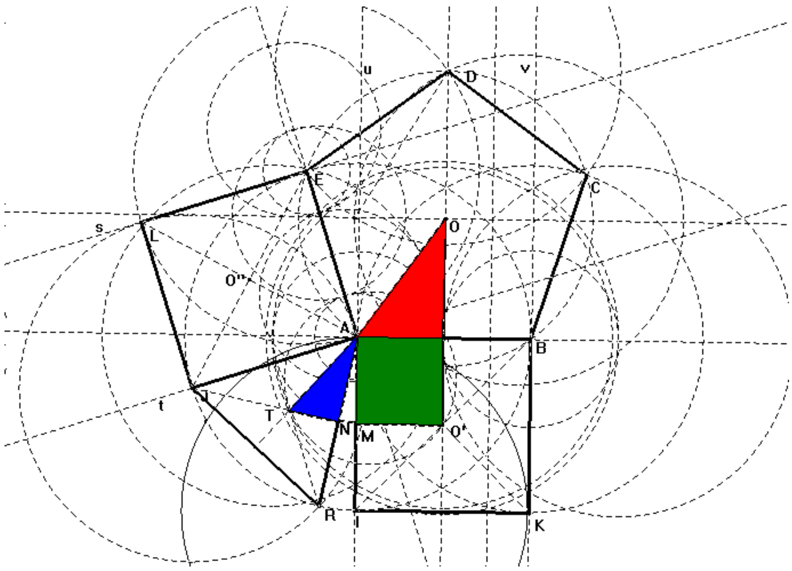


Figura 45: Base para o poliedro (3,4,5,4)

A seguir, mostraremos outras quatro bases que podem ser construídas e que fornecem o visual de poliedros semi-regulares.

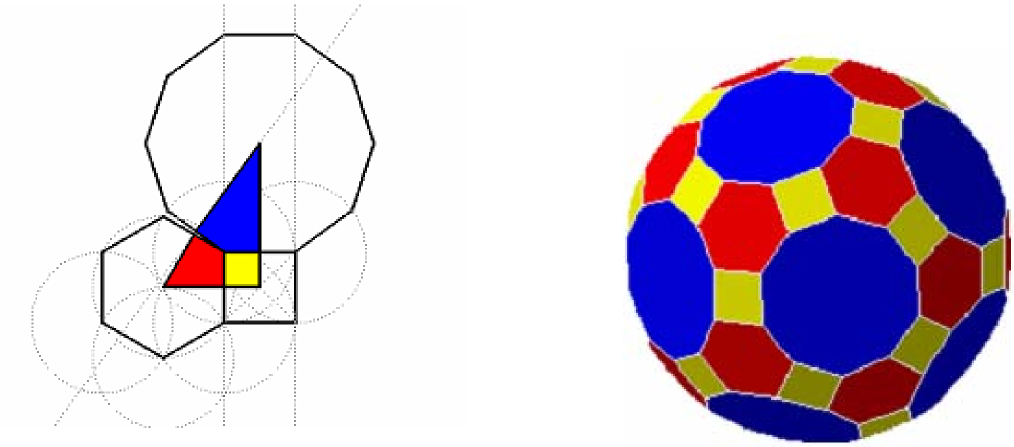
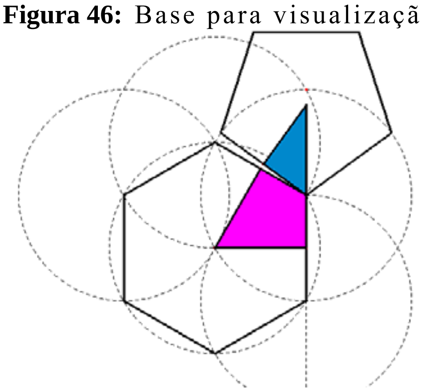


Figura 46: Base para visualização do poliedro (4,6,10)



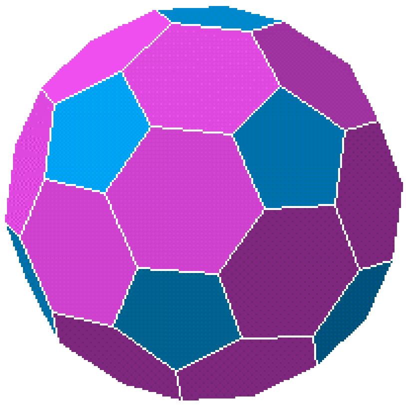


Figura 47: Base para visualização do poliedro (5,6,6)

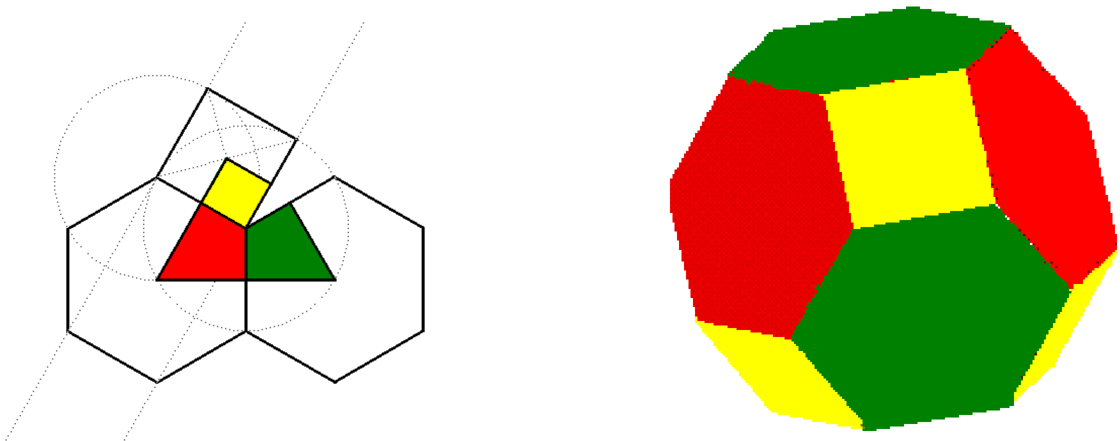


Figura 48: Base para visualização do poliedro (4,6,6)

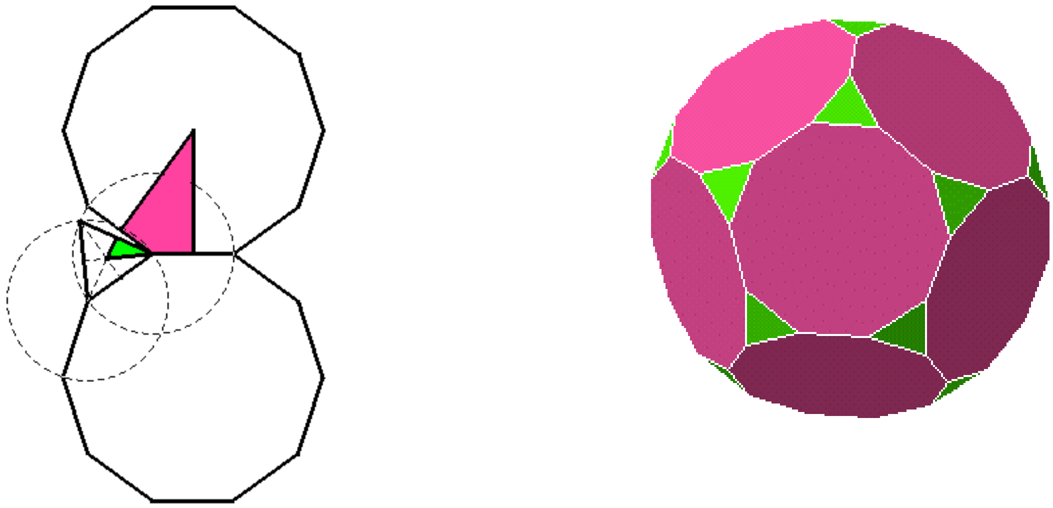


Figura 49: Base para visualização do poliedro (3,10,10)

Com as explicitações acima, mostramos que é possível visualizar poliedros de Arquimedes em caleidoscópios generalizados. Foram apresentadas quatro bases caleidoscópicas que permitem essa visualização. Implícito ao motivo principal, está a idéia de que podemos utilizar este estudo em ambientes educacionais para explorar muitos dos conceitos envolvidos na abordagem do tema *poliedros*.

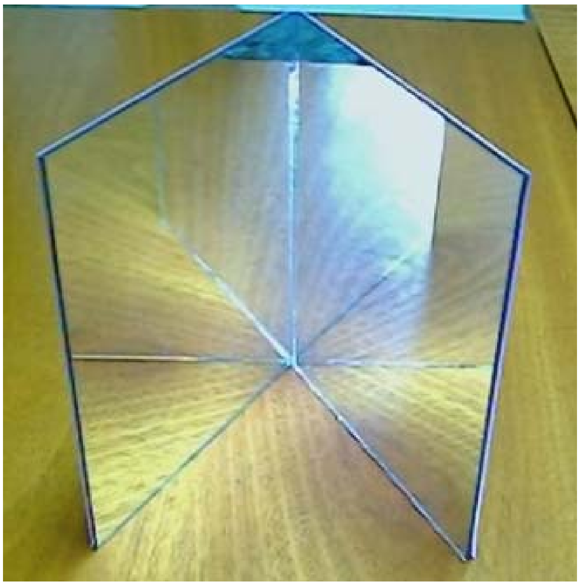
O trabalho de criação e construção de bases para visualização dos poliedros de Arquimedes é inédito na área da Educação Matemática, e visa oportunizar uma nova maneira de apresentação e estudo desse conteúdo, que possibilita uma interação entre o laboratório de ensino de Matemática e o de informática. Além disso, a construção das bases caleidoscópicas com régua e compasso e com o recurso do *software* Cabri-Géomètre II, vêm reforçar o entendimento e a aprendizagem do conteúdo abordado.

▪ O produzido

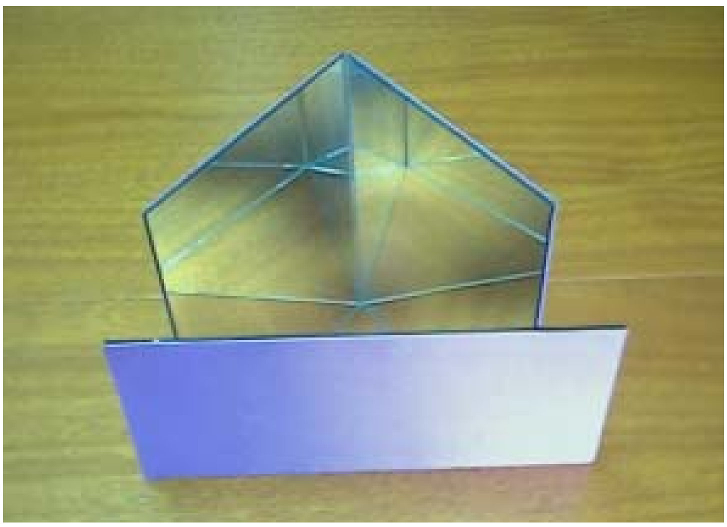
Como resultado desta investigação, foi construído o seguinte kit de espelhos, que pode ser utilizado em atividades que visem o ensino e a aprendizagem de geometria.

Nossa intenção é disponibilizar esse kit como um recurso didático para professores de Matemática, com o nome **Espelhos Planos,** construídos com material espelhado e revestidos no verso com material emborrachado, conforme as figuras abaixo.

Há ainda o espelho simples e os espelhos planos paralelos, que fazem parte do kit, mas não estão apresentados nas figuras abaixo.

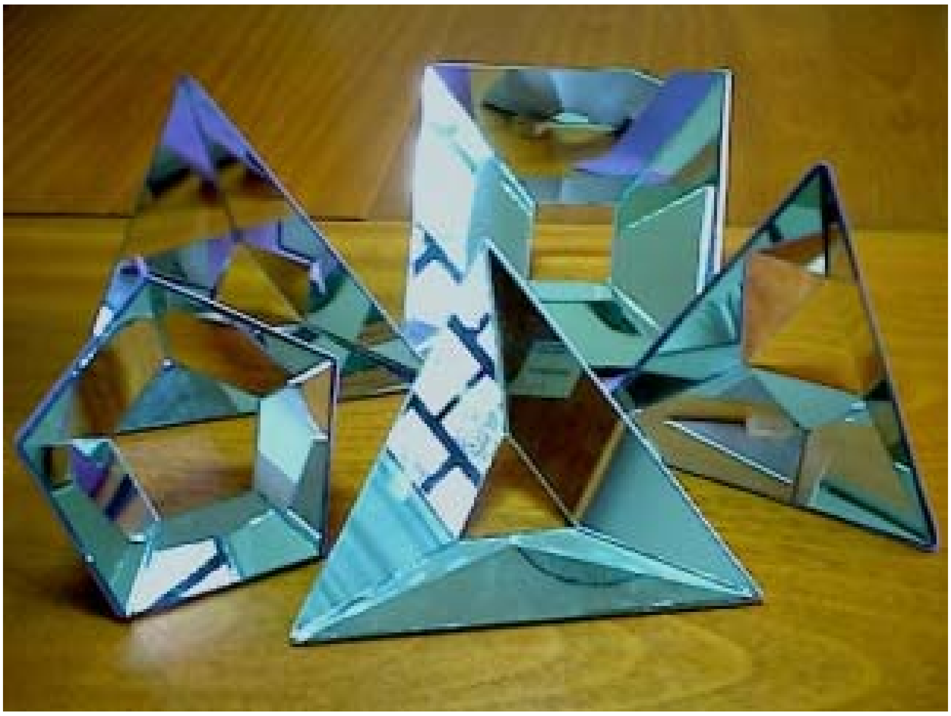


Caleidoscópio com dois espelhos



Caleidoscópio com três espelhos

Caleidoscópio com quatro espelhos



Espelhos articulados especiais

Espelho Mágico

Caleidoscópios generalizados

Figura 50: O kit de espelhos planos

Considerações finais

A presente pesquisa, norteada pela pergunta diretriz: “o que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria?”, buscou na literatura trabalhos sobre a existência de instrumentos construídos com espelhos e utilizados para o ensino de geometria, e com recursos de procedimentos da pesquisa fenomenológica, chegou-se, então, por meio da análise, a uma síntese explicativa de cada instrumento. A partir dessa síntese, pudemos prosseguir na direção da construção do kit proposto, de modo que os instrumentos encontrados na literatura fossem agrupados em um conjunto, que os contenha e que transcenda, no sentido de ir além do que já tinha sido feito, tanto na otimização do material como no que diz respeito às possibilidades de utilização destes no ensino.

Respondendo à pergunta norteadora, apresentamos, como produto deste trabalho, um kit de instrumentos feitos com espelhos planos. Estes instrumentos já existiam e até mesmo já foram ou são utilizados para o ensino de geometria. Porém, não se tem notícia do agrupamento desses instrumentos e nem mesmo das possibilidades diversas de temas, conceitos e propriedades que podem ser abordados por meio deles. O kit que apresentamos contém algumas inovações, mostradas nos capítulos quatro e cinco, quando apresentamos, respectivamente, a construção dos instrumentos, com soma e subtração de detalhes por nós sugeridos, visando a “otimização” dos mesmos, e as bases caleidoscópicas especialmente construídas para possibilitar a visualização dos poliedros de Arquimedes em caleidoscópios generalizados.

Essas bases, que permitem a visualização de tesselações espaciais por meio dos poliedros de Arquimedes, foram criadas pelo método de tentativa e erro. Na página 63 desse trabalho, apresentamos o método conhecido por “tentativa e erro” para construção de bases para tesselações planas; uma analogia foi feita para o caso das tesselações espaciais, levando-nos a encontrar as bases apresentadas.

Consideramos que o trabalho de construção de um kit de instrumentos feitos com espelho para o ensino de geometria traz contribuições importantes para a prática docente, visto que, os instrumentos podem ser utilizados como recurso didático para alunos do ensino Básico, Médio e Superior, para abordagem de conceitos e propriedades através da visualização da reflexão obtida por figuras devidamente construídas. Pode-se, por meio dos instrumentos, visualizar objetos com linhas de simetria, padrões simétricos, tesselações planas e espaciais, fazer construções geométricas, abordar conceitos como: polígonos, poliedros regulares e semi-regulares, ângulos, simetria, linhas de simetria, construções, translação, rotação, reflexão, etc.

Nas possibilidades de utilização dos caleidoscópios acima citadas, devemos ainda incluir o seu uso no estudo e visualização de ornamentos. Em nosso trabalho não exploramos muito este assunto, pois o mesmo está mais relacionado à Educação Artística, enquanto que nosso campo de aplicação, delimitado pela pergunta norteadora, está fortemente vinculado ao ensino-aprendizagem de Geometria. Porém, em BARBOSA e MURARI (1996 e 1998); MURARI (1999); MURARI, PEREZ e BARBOSA (2001) e MARTINS (2003) é possível conhecer mais sobre o assunto.

Esta dissertação toca em pedras angulares da Educação Matemática, pois é fruto de nossas angústias e insatisfações relacionadas ao ensino de Matemática. Acreditamos que os instrumentos de espelho abrem possibilidades de novas experiências de ensino e de aprendizagem, e ao pesquisarmos os arredores do fenômeno em questão nessa pesquisa – a construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria – percebemos que se esta dissertação aponta para oportunidades de pesquisa de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem através destes recursos, estamos nos envolvendo com a formação de professores, pois o ensino por meio de instrumentos que não são os tradicionais exige um diferente posicionamento do professor, cujo sistema de ensino não seja o passivo, e no qual aluno e professor devem estar no centro do processo de ensino-aprendizagem.

A fenomenologia, que não traz consigo a imposição de uma verdade teórica ou ideológica preestabelecida, foi em nosso trabalho o fio arrematador que abrilhantou a análise dos dados, possibilitou a investigação direta e a descrição do fenômeno experienciado conscientemente, sem teorias explicativas ou pressuposições.

O campo de percepções permitiu-nos compreender, interpretar e comunicar resultados, e abre, dessa forma, possibilidades de trabalhos nessa área, onde parece ser urgente a continuação de pesquisas que contribuam para impulsionar a utilização de recursos didáticos como auxílio no processo de ensino-aprendizagem que apóiem o ensino e estimulem a aprendizagem.

Referências

ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II**. 2003. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

ALSPAUGH, C. A. Kaleidoscopic geometry. **Arithmetic Teacher**, Washington, n. 17, p. 116-117, 1970.

ALVES-MAZOTI, A. J; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2001.

BALL, W.W. R; COXETER, H. S. M. **Mathematical recreations and essays**. 13. ed. New York: Dover, 1987.

BARBOSA, R. M. Estudo sobre espelhos planos angulares. **Atualidades pedagógicas**, Rio de Janeiro, n. 40, p. 5-8, abr.1957.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

BARBOSA, R. M.; MURARI, C. Aprendendo construir novos mosaicos, agora em caleidoscópios com quatro espelhos. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, n. 4, p. 57-66, 1998.

BARBOSA, R. M. Novo processo para o padrão de polígonos regulares de configuração (3,4,6,4) no caleidoscópio eqüilátero. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 1993, Bauru, 1993. **Anais...** Bauru: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1993b. p.71.

BATISTELA, R. F. Caleidoscópios generalizados para visualização de poliedros. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2003, Rio Claro, **Anais**... Rio Claro: UNESP, 2003. 1 CD-ROM.

BATISTELA, R. F.; MURARI, C. Espelhos articulados para o ensino de geometria. In: JORNADA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3.; ENCONTRO CATARINENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2003 , Concórdia. **Anais...** Concórdia: Universidade do Contestado, 2003. 1 CD-ROM.

BATISTELA, R. F. Caleidoscópios no ensino de geometria: possibilidades e limites. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. **Anais...** São Paulo: USP, 2004. 1 CD-ROM.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia**: confrontos e avanços. São Paulo: Cortez, 2000. 167 p.

BICUDO, M. A. V. Sobre a fenomenologia. In: BICUDO M. A. V. ; ESPÓSITO V.H.C. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação**: um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994. p. 15-22.

BISHOP, T. D.; FETTERS, J. K. Mathematical Reflections and reflections on other isometries. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 69, n. 5, p. 404-407, May 1976.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994. 336 p.

DAFFER, P. G. O.; CLEMENS, R. S. **Geometry***:* an investigative approach. 2. ed. Menlo Park: Addson-Wesley, 1977. 445 p.

DAYOUB, I. M.; LOTT, J. W. What can be done with a Mira? **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 70, n. 5, p. 394-399, May 1977.

FAINGUELERNT, E. K. Educação matemática: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999. 227 p.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica**: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática. 1995. 258 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GRAF K. D.; HODGSON B. R. Popularizing Geometrical Concepts: the case of the Kaleidoscope. **For the learning of mathematics**, Montreal, v. 10, n. 3, p. 42-50, nov. 1990.

GRAF K. D.; HODGSON B. R. Visions kaleidoscopiques. In: PALLASCIO, D.; LABELLE, G. (Org.). **Mathématiques d'hier et d'aujourd' hui**. Québec: Modulo, 2000. p. 130-145.

HADAMARD, J. **The psychology of invention in the mathematical field**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

HERSHKOWITZ, R. Visualização em geometria: as duas faces da moeda. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 32, p. 45-61, 1994.

JACOBS, H. J. **Geometry.** New York: W. H. Freeman, 1974.

KINGSTON, J. M. Mosaics by reflection. **The Mathematics Teacher**, Reston, p. 280-286, apr. 1957.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista-Geometria**, Blumenau, n. 4. p. 3, set. 1995.

MARTIM, G. Duplicating the cube with a Mira. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 72, n. 3, p.204-208, mar. 1979.

MARTINS, R. A. **Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais**. 2003. 246 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MURARI, C. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalhos em grupo. **Revista da Educação Matemática**, São Paulo, n. 2, p. 11-15, 1995.

MURARI, C. Pavimentação do plano de configuração (4,6,12) usando caleidoscópios eqüiláteros para colorações múltiplas. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4. 1996, São Paulo, PUC/SP. **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1996. p. 263-268.

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**. 1999. 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C.; BATISTELA, R. F. Bases para visualização dos poliedros de Arquimedes. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 8., 2004, Porto Alegre. **Anais...** Porto Alegre: 2004. 1 CD-ROM.

MURARI, C.; PEREZ, G. A geometria na ótica do caleidoscópio. **Revista da Educação Matemática**, São Paulo, n. 5, p. 43-50, 1999.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Campinas, n.1, p. 19-49, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. 1991. 2v. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1991.

PEREZ, G. A realidade sobre o ensino da geometria no 1º e 2º grau, no estado de São Paulo. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 4, p.54-62, 1995.

ROBERTSON, J. M. Geometric constructions using hinged mirrors. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 79, n. 5 p. 380-386, may 1986.

ROGER, P. M. Kaleidoscope. In: ENCICLOPÉDIA Britânica. 4. ed., Edimbourg: Editora Enciclopédia Britânica, 1824. v. 5, p. 163-171.

SARAIVA M. J. F. S, Raciocínio visual parente pobre do raciocínio matemático? **Educação e Matemática**, Lisboa, n.21, p. 3-5, 1992.

SIMIONATO, S. T. A.; MURARI, C.; BARBOSA, R. M. Número de regiões ou colorações em bases caleidoscópicas para pavimentações do plano. **Interciência-Ciências Exatas,** Catanduva, n. 2, p. 85-93, 2004.

WALTER, M. An example of informal geometry: mirror cards. **Readings in geometry from the Arithmetic Teacher**. 2. ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, 1972.

WALTER, M. One mirror, two mirrors.... **Mathematics teaching**, Derby, n. 96, p. 54-56, sept. 1981.

WOODWARD, E. Geometry with a Mira. **The Arithmetic Teacher**, Reston, v. 24, n.2. p.117-118, 1977.

Bibliografia consultada

ADAMS, P.; FORSETH, S. D. Symmetry. **Readings in geometry from the Arithmetic Teacher**. 2. ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, p. 36-39, 1972.

ALMEIDA, S. T.; BATISTELA, R. F.; MARTINS, R. A.; NAKANDAKARI, A. Um estudo sobre o processo simultâneo de geração de imagens em caleidoscópios. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 11.,1999, Araraquara. XI Congresso de Iniciação Científica, Araraquara: EdUNESP, 1999. p.29.

ARAUJO, M. A. S. Porque ensinar geometria nas séries iniciais de 1º grau. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 3, p. 12-16, 1994.

BARBOSA R. M.; MURARI, C. Mosaicos ornamentais em Caleidoscópios eqüiláteros e isósceles. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4., São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 1996. p.187-193.

BATISTELA, R. F. Instrumentos construídos com espelho: possibilidades de sua utilização para o ensino de geometria. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Londrina, **Anais**... UEL, 2004. 1 CD-ROM

BATISTELA, R. F.; MARTINS, R. A.; ALMEIDA, S. T.; NAKANDAKARI, A. Um algoritmo para determinação de bases substituíveis de caleidoscópios em pavimentações do plano. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 11.,1999, Araraquara. XI Congresso de Iniciação Científica, Araraquara: EdUNESP, 1999. p. 28.

BECHTHOLD, A. Tessellating the sphere with regular polygons. **Mathematics Teacher,** Reston, n. 3, p. 165-167, 2004.

BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C (Org). **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. 317 p.

BICUDO, M. A. V; ESPÓSITO V. H. C. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994. 233 p.

BOSI, A. Fenomenologia do olhar. In: Novaes, et al. **O olhar**. São Paulo: Companhia das Letras, 1997, p. 64-87.

CHAMIE, L. M. S. A relação aluno-matemática: alguns de seus significados, 1990. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática)-Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1990.

DENNIS, J. R. Informal geometry through symmetry. **Readings in geometry from the Arithmetic Teacher**. 2. ed. Washington: National Council of Teachers of Mathematics, p. 32-35, 1972.

DONALD, R. K. J. A geometry lesson from national assessment. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 74, n. 1, p. 26-32.

FINI, M. I. Sobre a pesquisa qualitativa em Educação, que tem a Fenomenologia como suporte. In: BICUDO, M. A. V; ESPÓSITO V. H. C. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: UNIMEP, 1994. 233 p.

GARDNER, M. Anamorphic Art. In: Time Travel and Other Mathematical Bewilderments. New York: Freeman, 1988. p. 97-109.

GRAF, K-D. Using software tools as additional tools in geometry education to ruler and compasses. Education & Computing, n. 4, p. 171-178, 1988.

HOFFER, A. Geometry is more than proof. **The Mathematics Teacher**, Reston, n. 1, v. 74, p. 11-14, 1981.

HUGO, V. **Les Misérables**. 3.ed. Paris: Librairie Hachette, 1964.

MARTINS, R. A.; ALMEIDA, S. T.; NAKANDAKARI, A.; BATISTELA, R. F. Descobrindo bases para o caleidoscópio da pavimentação 2-uniforme de configuração (3, 3, 4, 3,4; 3, 4, 6,4) In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 11.,1999, Araraquara. XI Congresso de Iniciação Científica, Araraquara: EdUNESP, 1999. p. 26.

MERLEAU –PONTY, M. **O Homem e a Comunicação**: A prosa do Mundo. 1. ed. Rio de Janeiro: Edições Bloch, 1974. 159 p. Tradução de Celina Luz.

MERLEAU –PONTY, M. O olho e o espírito. In: **Os Pensadores XLI**. São Paulo: Abril Cultural, 1975.

MIRANDA, A. E. F. Manifestação da espacialidade de pessoa desprovida de visão. 1999. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 1999.

MURARI, C.; BARBOSA, R. M.; PEREZ, G. Caleidoscópios educacionales: coloraciones múltiples. In: **Revista Uno de Didáctica de las matemáticas**, n. 27, p. 7-20, 2001.

MURARI, C.; MARTINS, R. A; BATISTELA, R. F. Tesselações Espaciais com bases caleidoscópicas. In VII ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Rio de Janeiro. Encontro Nacional de Educação Matemática, 2001.

NAKANDAKARI, A.; ALMEIDA, S. T.; BATISTELA, R. F.; MARTINS, R. A.; Um Teorema sobre o número máximo de espelho para obtenção de um caleidoscópio. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 11.,1999, Araraquara. XI Congresso de Iniciação Científica, Araraquara: EdUNESP, 1999. p.17.

PRIGOGINE, I. **O fim das certezas**: Tempo, Caos e as Leis da Natureza. São Paulo: Editora UNESP, 1996. 199 p.

SHERARD III, W. H. Why Geometry is a basic skill?. **The Mathematics Teacher**, Reston, n. 1, v. 74, p. 19-21, 1981.

STUBBS, M.; DELAMONT, S. **Explorations in Classroom observation**. London: Wiley, 1976.