UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

# PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

# EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA

MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**O PENSAR ALGÉBRICO: UMA PERSPECTIVA FENOMENOLÓGICA**

**JULIANO CAVALCANTE BORTOLETE**

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro - SP

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

JULIANO CAVALCANTE BORTOLETE

# O PENSAR ALGÉBRICO: UMA PERSPECTIVA FENOMENOLÓGICA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática

**Orientadora:** Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Rio Claro - SP

2024

B739p

Bortolete, Juliano Cavalcante

O pensar álgebrico: uma perspectiva fenomenológica / Juliano Cavalcante Bortolete. -- Rio Claro, 2024

221 p. : tabs.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo

1. Fenomenologia. 2. Álgebra. 3. Pensamento Algébrico. 4. Educação Matemática. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

JULIANO CAVALCANTE BORTOLETE

# O PENSAR ALGÉBRICO: UMA PERSPECTIVA FENOMENOLÓGICA

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo - Orientadora
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo
FEG/UNESP/Guaratinguetá (SP)

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Tânia Baier
CCEN/FURB/Blumenau (SC)

Profa. Dra. Angela Ales Bello
Pontificia Università Lateranense/Città del Vaticano

Conceito: Aprovado

Rio Claro/SP, 08 de fevereiro de 2024

**AGRADECIMENTOS**

A continuação da minha jornada acadêmica, que foi trilhada durante o desenvolvimento desta tese de doutorado foi uma experiência desafiadora, repleta de obstáculos e descobertas. Neste percurso, percebi a importância de ter pessoas excepcionais ao meu lado, que ofereceram apoio, orientação e amizade. Gostaria, assim, de expressar minha profunda gratidão a todos que tornaram esta conquista possível.

Agradeço especialmente aos membros da banca examinadora, Dra. Rosa Monteiro Paulo, Dr. Henrique Lazari, Dra. Tânia Baier, Dra. Angela Ales Bello e sua tradutora, irmã Jacinta que contribuíram de maneira valiosa para o desenvolvimento desta tese.

À minha dedicada orientadora, Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, expresso minha mais profunda gratidão. Sua orientação, amizade e comprometimento foram fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa. Agradeço por sua sabedoria e apoio constante ao longo deste percurso acadêmico.

Também quero estender meu agradecimento ao meu amigo Manoel Guaranha. Nossos estudos conjuntos, leituras compartilhadas e suas valiosas contribuições foram elementos cruciais para o sucesso desta tese. Sua amizade e parceria acadêmica são preciosidades que guardarei comigo.

Aos professores do programa, minha sincera gratidão por se dedicarem ao ensino e por terem contribuído significativamente para minha formação acadêmica e para meu crescimento como pesquisador.

Finalmente, agradeço a todos que, de alguma forma, participaram e me apoiaram nesta jornada de crescimento pessoal e acadêmico.

**RESUMO**

Nesta tese de doutorado, o autor buscou, trilhando um percurso fenomenológico inspirado em Husserl, compreender a questão fundamental de como a Álgebra se desvela em seus modos de ser. O estudo situa a Álgebra no contexto da Matemática, destacando sua inter-relação com outras áreas dessa ciência. A tese se desenvolveu em seis seções, explorando a fenomenologia, a crise nas ciências europeias, a presença da Álgebra na BNCC, a abordagem de Freudenthal sobre a Álgebra, a simbolização da Álgebra ao longo da história, e, finalmente, a teoria das multiplicidades sob a perspectiva husserliana. Nesta teoria, a Álgebra é concebida como uma área da Matemática a qual dá conta de mencionar generalidades, ao definir axiomaticamente seus objetos, que abarcam as idealidades e, portanto, aqueles objetos do pensar que são livres de qualquer posição de fato. Por fim, a tese enfatiza a necessidade de compreender a Álgebra para além de sua instrumentalização, buscando desvelar suas propriedades e sua presença na evolução do pensamento matemático.

**Palavras-chave:** Fenomenologia. Álgebra. Pensamento Algébrico. Educação Matemática.

## ABSTRACT

In this doctoral thesis, the author, following a phenomenological path inspired by Husserl, sought to comprehend the fundamental question of how Algebra reveals itself in its modes of being. The study situates Algebra within the context of Mathematics, highlighting its interrelation with other areas of this science. The thesis unfolds in six sections, exploring phenomenology, the crisis in European sciences, the presence of Algebra in the BNCC (National Curriculum Common Core), Freudenthal's approach to Algebra, the symbolization of Algebra throughout history, and finally, the theory of multiplicities from the Husserlian perspective. In this theory, Algebra is conceived as a branch of Mathematics that addresses generalities by axiomatically defining its objects, encompassing idealities and, therefore, those objects of thought that are free from any actual position. Ultimately, the thesis emphasizes the need to understand Algebra beyond its instrumentalization, aiming to unveil its properties and its presence in the evolution of mathematical thought.

**Keywords:** Phenomenology. Algebra. Algebraic Thinking. Mathematics Education.

## LISTA DE FIGURAS



## LISTA DE TABELAS

**SUMÁRIO**

## CONSIDERAÇÕES INICIAIS

> Passa uma borboleta por diante de mim
> E pela primeira vez no Universo eu reparo
> Que as borboletas não têm cor nem movimento,
> Assim como as flores não têm perfume nem cor.
> A cor é que tem cor nas asas da borboleta,
> No movimento da borboleta o movimento é que se move.
> O perfume é que tem perfume no perfume da flor.
> A borboleta é apenas borboleta
> E a flor é apenas flor.
> PESSOA (1993, p 64)

A questão “o que é Álgebra?”, no universo da Matemática, remete à busca da compreensão acerca das características inerentes às diferentes regiões da Matemática[1] ou do pensar matemático e sobre como se pode compreender esse pensar. Da minha perspectiva de estudioso da Matemática, não diviso claramente essas características específicas num primeiro momento. Se essas especificidades existem, talvez possam constituir “[o] limite [que] é (...) aquilo sem o que uma coisa não existe, mas que nem é a própria coisa, nem externo a essa coisa.” (PESSOA, 1968, p. 21). Esse limite pode ser compreendido, nesta pesquisa, como as interrelações entre a Álgebra e as outras áreas da Matemática. A Álgebra existe e existem outras áreas na Matemática que não são designadas por esse nome, mas que se entrelaçam a ela uma vez que também operam com seus conceitos. Assim, faz sentido buscar o modo pelo qual a Álgebra mostra-se em seu sendo, em seu devir, algo como já nos mostrara Heráclito, cuja doutrina centrou-se “no princípio do devir incessante das coisas”. (ABBAGNANO, 2007, p. 497).

Exemplifico essa minha perspectiva por meio de uma vivência na minha graduação em Matemática. Em 2001, no segundo ano de graduação, assistindo a uma aula do professor Janey Antônio Daccach, fui apresentado a uma estrutura intrigante, dentre muitas outras que apareceram naquele curso de Álgebra I. Tratava-se do conceito de *congruência módulo n,* que é uma relação de equivalência. Em linhas gerais, a congruência relaciona dois números inteiros, que quando divididos por um

[1] A concepção de Matemática assumida neste texto é aquela que a toma como ciência construída na historicidade da civilização ocidental e que embasa as investigações científicas e tecnológicas, tanto realizadas no mundo do ocidente, como no Oriente.

terceiro, deixam o mesmo resto. Em notação matemática, sendo $a$, $b$ e $n, n > 0$, inteiros, se o resto da divisão dos dois primeiros pelo terceiro for o mesmo, representaremos essa congruência por $a \equiv b\ (mod\ n)$[2]. Por exemplo, $3 \equiv 15\ (mod\ 12)$, uma vez que tanto o 15 quanto o 3, quando divididos por 12, deixam resto 3. A *congruência módulo* 12 é uma representante da aritmética do relógio analógico. Assim, $3 \equiv 15 \equiv 27 \equiv \ldots (mod\ 12)$ às 3h e às 15h o ponteiro das horas do relógio aponta para o mesmo algarismo. O conjunto de todos os inteiros $x$, tal que $x \equiv a\ (mod\ n)$, para um dado inteiro $a$ é chamado de classe de equivalência módulo $n$ e é denotada por $[a]$. As classes de equivalência produzem uma aritmética peculiar, vejamos um exemplo:

Vamos considerar o módulo $n = 5$. Algumas de suas classes são:

$$[1] = \{1,6,11,16\ldots\}$$
$$[2] = \{2,7,12,17\ldots\}$$
$$[3] = \{3,8,13,18\ldots\}.$$

Se multiplicarmos qualquer elemento da classe [2] por qualquer elemento da classe [3], obteremos um elemento da classe [1], isto é $[2].[3] = [1]$. Aqui há uma relação cíclica que atribui características diferentes daquela usual à multiplicação definida no conjunto dos números inteiros, em que, por exemplo, 2.3 = 6 e não 1. Se $n$ é um número que não é primo, então teremos, inclusive, a possibilidade de o produto ser zero sem que nenhuma das classes multiplicadas seja a classe do zero.

Este exemplo mostra que a Álgebra permite a construção de estruturas cujas operações sobre seus elementos podem diferir daquelas estabelecidas pelas operações usuais, por exemplo, aquelas sobre o *corpo* dos números reais. Então a Álgebra, a um primeiro olhar, poderia mostrar-se como ampliação das possibilidades do que já se conhecia e isso nos remete à questão sobre o que a Álgebra possibilita. Ao buscar esclarecer essa questão, somos levados a tecer considerações sobre o próprio pensamento algébrico como sendo aquele que enseja ou justifica a realização de operações existentes sobre novos objetos, aquele que, por assim dizer, permite a generalização.

---

[2] Para que não haja equívocos interpretativos, apresentaremos, a seguir, a definição formal de *congruência módulo n*, extraída de Lang (2008, p. 17, grifos do autor): “Definição: Seja $n$ um inteiro positivo e $x, y$ inteiros, diremos que $x$ é **congruente a** $y$ **módulo** $n$ se existir um inteiro $m$ tal que $x - y = mn$”. Isso quer dizer que $n$ divide $x - y$. É importante salientar que neste caso, estamos considerando que essa é uma operação definida no conjunto dos números inteiros.

A dúvida que apresentei no início deste texto materializa-se: congruência não constitui a totalidade da Álgebra, mas é um dos modos pelos quais a Álgebra se mostra. Neste ponto, retomamos a epígrafe desta seção, em que o poeta Fernando Pessoa apresenta a asa colorida como um entrelaçamento da asa e da cor, a flor perfumada como o entrelaçamento da forma e da matéria acontecendo ou se atualizando: asa e cor são componentes amalgamados na constituição do objeto *asa colorida*, assim como a flor e o perfume são componentes amalgamados na constituição do objeto *flor perfumada*. Asa colorida e flor perfumada são os modos como asa, cor, flor e perfume mostram-se: cor, perfume e movimento são momentos da flor e da asa. Desse modo, podemos dizer que, na vivência que descrevi, a Álgebra mostra-se nas congruências, mas não em sua totalidade. Por isso é necessário pensar em sua essência, entendida como “aquilo que se encontra no ser próprio de um indivíduo como *o que* ele é” (HUSSERL, 2006, p. 35, grifos do autor). Esse pensamento nos levou a formular as interrogações: O que seria um objeto algébrico? Como é constituído? Como é produzido, ou seja, como a Álgebra se materializa, como é sua linguagem e quais são seus modos de expressão? Quais são as invariantes de atualizações da Álgebra? Este interrogar abre espaço para reflexões que serão a base da interrogação norteadora desta pesquisa, que será apresentada e discutida mais adiante.

Nessa minha vivência inicial com a Álgebra, mesmo sem defini-la, passei a experienciá-la como esse dado que é proteiforme e, tanto na vida de estudante, quanto na de professor e de pesquisador, sempre procurei, para além de compreender suas regras, estudar, ensinar e investigar como elas, as regras, podem ser generalizadas e como a Álgebra pode ser concebida de diferentes modos em diferentes contextos.

Quando atuei como professor nos Ensinos Fundamental II e Médio, por vezes, a Álgebra era identificada como uma linguagem para descrever problemas matemáticos ou cotidianos, como provedora de métodos para resolver esses problemas e o pensamento algébrico como sendo aquele que também permite a identificação de padrões e a sua tradução na linguagem algébrica. Diversas pesquisas, entre elas D’Ambrósio (2018), Kluth (2005), Mondini (2013), Fiorentini (2016) e Freudenthal (1973), que serão comentadas mais adiante, foram e são desenvolvidas com a intenção de investigar particularidades inerentes às diferentes formas de compreensão desta área da Matemática.

Em 2009, ingressei no Mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC e tive a oportunidade de aprofundar meus estudos na vertente francesa da didática. Esse mestrado resultou na dissertação *A relação transitiva entre sociedade, tecnologia e Matemática: Aportes relativos à formação profissional em um curso de informática* (BORTOLETE, 2011). Nessa pesquisa, procurei fazer uma leitura crítica sobre a Matemática, sobre Educação Matemática e, por fim, compreender qual era a importância que alguns alunos de um curso de graduação em Análise de Sistemas atribuíam a essa área do conhecimento para as suas formações.

Em 2015, ingressei no mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, na Universidade de Campinas, UNICAMP, cuja pesquisa resultou na dissertação: *Empacotamento de círculos usando otimização não linear* (BORTOLETE, 2016). Nesse curso, pude estudar Modelos e Métodos Matemáticos e aprofundar os estudos em áreas como o Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, Análise Real, Métodos de Otimização Linear e não Linear, disciplinas que basicamente compõem um programa de Matemática Aplicada.

Simultaneamente, nos últimos dez anos, fui professor de cursos de graduação, na área de Análise e Desenvolvimento de Sistemas, na Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo - FATEC e, mais especificamente, em 2018 e 2019, atuei como professor do curso de Licenciatura em Matemática no Instituto Federal de São Paulo, IFSP, instituição em que ingressara, atuando como professor do Ensino Médio, no ano de 2016.

Neste percurso acadêmico-profissional, revivi muitas das inquietações que experienciei nas aulas do professor Janey a respeito da Álgebra. É verdade que, se por um lado, ainda tenho incertezas a respeito dessa área do conhecimento, por outro, pude adquirir, na trajetória vivida, alguma maturidade matemática e científica que agora me motivam a propor a pergunta de pesquisa: *Como a Álgebra se desvela em seus modos de ser*? Esta investigação foi desenvolvida no âmbito do Grupo de Pesquisa Fenomenologia em Educação Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, o que justifica, de agora em diante, na escrita deste texto, o uso da primeira pessoa do plural.

Essa é uma pergunta também de caráter filosófico porque ela interroga o modo de ser da Álgebra. Nesse sentido, ela se refere à interrogação fundante da Ontologia, ou seja, o que é? o que existe? No percurso da história da Filosofia Ocidental, essa interrogação foi respondida de diferentes modos, um dos quais procurou compreender o que o ser é em sua totalidade, por exemplo Parmênides (530 a.C. - 460 a. C.) e Platão (428 a.C. - 347 a.C.) entre outros, descrevendo-o em uma generalidade. Não é essa a resposta que almejamos ou que temos em vista, porém a que busca compreender como a Álgebra se mostra em seus modos de ser. Em termos filosóficos, não assumimos uma visão de ser absoluto e totalizante, porém o assumimos no seu movimento de ser heraclitiano, ou seja, em seu *sendo*.

A interrogação subjacente a esta pesquisa, certamente, é um projeto que vai além de uma pesquisa de doutorado e mesmo além das possibilidades de um pesquisador. Disso decorre que, para dar conta dele, é necessário colocá-lo em perspectiva, explicitar o que essa interrogação interroga.

Uma dessas perspectivas seria investigar como legisladores oficiais pensam ou pensaram a Álgebra materializando esse pensamento no discurso legal e, assim, considerar os objetos inseridos nesse campo de estudo, buscando, fenomenologicamente, compreender como a Álgebra tem se apresentado na legislação escolar brasileira. Essa perspectiva foi estudada por Mondini (2013) que tomou como dados os textos legais que normatizaram os conteúdos que deveriam ser ensinados sobre a Álgebra, desde o início da organização escolar no Brasil até a década de 1980.

Outra perspectiva seria ver como as diferentes concepções de Álgebra, que ocorreram ao longo da sua história, influenciaram o modo como professores e alunos, no dia a dia das escolas, refletem ou refratam os conceitos algébricos e as operações com os seus objetos. Desse modo, seria possível compreender em que medida o ensino caminha paralelamente ao desenvolvimento da Ciência e em que medida ele fica estacionado em concepções antigas. Essa perspectiva foi estudada por Fiorentini (2016, p. 78) que procurou apresentar elementos que permitissem repensar a educação algébrica elementar por meio

> de uma análise comparativa entre concepções de educação algébrica que se manifestaram ao longo da história do ensino da Matemática e as concepções de Álgebra subjacentes às leituras mais frequentes do desenvolvimento histórico desse campo do conhecimento matemático.

Uma terceira perspectiva seria fazer uma análise histórica do desenvolvimento de conceitos da e sobre a Álgebra, ressaltando as particularidades de cada uma dessas concepções em relação ao contexto cultural em que foram construídas e, nelas, os objetos que foram e são tratados e como foram e são tratados, como fez Kluth (2005), ao colocar em *epoché* o movimento da construção do conhecimento das estruturas da Álgebra, analisando três categorias: os modos de doação das estruturas da Álgebra; as estruturas das presenças - estruturas da Álgebra-ser humano; e o modo de ser matemático do ser humano. Feito isso, direcionou esse entendimento para o fazer do professor de Matemática, a fim de considerar a possibilidade de uma Pedagogia fenomenológica da Educação Matemática.

Uma quarta perspectiva poderia ser a Etnomatemática, que investiga "as práticas matemáticas no cotidiano de profissionais, artesãos, do homem comum, da sociedade invisível" (D'AMBRÓSIO, 2018, p. 193). Esse tipo de estudo evidencia a aproximação entre a Matemática e a vida, revelando como ela ultrapassa o terreno da escola e, livrando-se dos preconceitos que a tornam enigmática para o senso comum, ou seja, desmistificando-a, deve ressaltar as apropriações que diferentes culturas, não apenas aquelas eurocêntricas, fazem de conceitos algébricos, por exemplo, de modo quase intuitivo e não formal para resolver problemas, dentre eles, aqueles que envolvem transações comerciais, de estabelecimento de medidas entre outras.

Finalmente, entre outras perspectivas possíveis, destacaremos aquela assumida por Freudenthal (1973) em que, ao questionar o movimento da Matemática Moderna e suas influências nos processos de ensino e aprendizagem da disciplina, empreende uma rigorosa análise descritiva de objetos matemáticos apresentando-os de diversas perspectivas e afastando-se, desse modo, de uma visão mecânica e algorítmica desses conceitos e das aplicações deles. Em nossa pesquisa, temos a intenção de, justamente, buscar ampliar essa análise rigorosa que Freudenthal faz dos objetos matemáticos para os que pertencem ao domínio da Álgebra. Para o pesquisador, as expressões algébricas são estruturas linguísticas peculiares, por isso, cabe ao professor desenvolver uma consciência acerca dessas peculiaridades. Esse trabalho, em certo sentido, remete-nos a uma investigação rigorosa dos objetos matemáticos convidando os leitores à reflexão sobre o modo de ser de suas aparições em diferentes contextos. Nesse sentido, o autor tece considerações sobre como um processo de iniciação à Álgebra, historicamente desenvolvido, fora abruptamente interrompido pela chamada Nova Matemática que, na concepção de Freudenthal, era propagada por autores ignorantes ou com espírito comercial, a quem chamou de "parasitas da Nova Matemática" (FREUDENTHAL, 1973, p. 290, tradução nossa)[3]. O modo de investigar a Álgebra desse matemático conserva afinidade com os caminhos que nos levam às compreensões que buscamos por meio da indagação desta pesquisa, por isso vamos dedicar uma seção desta tese à análise de seu trabalho, considerando-o como um exemplo de procedimento que nos permite desvelar as propriedades essenciais do pensar algébrico.

A natureza deste estudo requer uma pesquisa qualitativa, uma vez que ela é a que melhor dá conta das expectativas desta investigação, não por escolha pessoal do investigador, mas pela característica do objeto investigado:

> Sobre a Pesquisa Qualitativa. [...] não se trata de uma oposição: qualitativo *versus* quantitativo, prós e contras. Não. Ambos são, tão somente modos de investigar não dependentes de uma escolha fortuita, embasado no querer que traz consigo o prazer ou o receio de não precisar trabalhar com números, com a ideologia da exatidão, da neutralidade e objetividade. Porém, a escolha tem a ver com o objeto investigado. (BICUDO e COSTA, 2019, p. 14).

Considerando a necessidade entre a escolha do método e a natureza do objeto investigado que foi apontada por Bicudo e Costa, observamos que nossa pesquisa, em última instância, diz respeito à Matemática pura que, segundo Husserl (2006, p. 42, grifos do autor), trata-se de uma das ciências de essências que são "inteiramente puras de quaisquer posições de fatos; ou, o que é equivalente, *nelas nenhuma experiência como experiência*, isto é, como efetividade, como consciência que apreende ou põe existência, *pode assumir a função de fundação".* Disto decorre que, os estudiosos dessas ciências de essências não investigam "efetividades, nem estados de efetividades, mas 'possibilidades ideais' e estados-de-essência, não é a experiência, mas *a apreensão intuitiva de essência o ato fundante último*" (HUSSERL, 2006, p. 42-43, grifos do autor). Em suma, lidam com aqueles objetos ideais, dos quais trataremos mais especificamente na seção seis deste trabalho, "A Álgebra na perspectiva Husserliana: a Teoria das Multiplicidades". Essa visão da Matemática como uma ciência das essências é que nos conduz ao método qualitativo e, amparados pela perspectiva husserliana da crítica do conhecimento, inclusive do conhecimento matemático, mais precisamente, nos conduz ao método qualitativo fenomenológico. Para dar conta de responder à questão norteadora desta pesquisa,

---

[3] parasites of New Maths.

empreenderemos um percurso que compreenderá, além destas considerações iniciais e das finais, seis seções.

Na primeira seção, “Fenomenologia: uma visão do conhecimento inspirada na Matemática”, buscaremos articular e compreender o caminho husserliano para o desenvolvimento da Fenomenologia, destacando os principais conceitos desenvolvidos e aprimorados ao longo de sua trajetória, todos eles voltados para desvelar como se dá o conhecimento. Esta seção norteará nossas análises posteriores sobre a Álgebra ao trazer alguns conceitos basilares da Fenomenomelogia, quais sejam: a consciência; a intencionalidade; as relações *cogito* e *cogitatum*, *q*ue representam um ir além de Husserl em relação a Descartes e que se relaciona com a proposição fenomenológica *toda consciência é consciência de algo;* as reduções fenomenológicas; as relações noetico-noemáticas; o fluxo das vivências; e a questão da imanência e da transcendência. Esses conceitos não serão tratados em uma ordem pré-estabelecida, mas à medida que forem solicitados no movimento de articulação desta escrita.

Na segunda seção, “A Fenomenologia no e do contexto da crise das ciências europeias”, discutiremos, preliminarmente, como o pensamento fenomenológico orienta as reflexões husserlianas que tematizam a referida crise, decorrida, em parte, do privilégio que se dá ao método de estudo da natureza em detrimento da própria natureza. Nesse contexto, destacaremos o papel que a Álgebra exerceu na matematização empreendida por Galileu Galilei (1564-1642) que resultou naquela tecnicização e que conferiu centralidade ao método. Por conta das nuances e da complexidade desse processo, a partir deste ponto, a seção terá duas subseções. Na primeira delas, “Do Pensamento pré-científico à matematização empreendida por Galileu”, abordaremos, consoante a visão de Husserl, as raízes históricas do processo que contribuiu para a crise das ciências apontada pelo filósofo. Na segunda subseção, “A Presença da linguagem algébrica no processo de tecnicização”, analisaremos, justamente, a contribuição da Álgebra na construção do método, cujo resultado foi o afastamento da investigação científica da própria natureza, o que nos remeterá à próxima seção, relacionada à Educação Matemática na atualidade.

Na terceira seção, “O Pensar Algébrico na BNCC: sentidos e significados que se abrem”, faremos uma leitura crítica da BNCC (Base Nacional Comum Curricular), buscando compreender a concepção que nela se apresenta a respeito da Álgebra e do respectivo pensar algébrico e, também, problematizando a excessiva tecnicização vinculada a esse pensar que se evidencia nas práticas sugeridas pelo documento, bem como pelo modo de abordagem dos conteúdos. Simultaneamente, buscaremos refletir sobre outros modos possíveis de tratar o ensino da Álgebra na Educação Básica, num movimento de compreendê-la não apenas pelas regras operatórias de seus símbolos, mas de desvelar aquilo que se menciona por meio deles, ou seja, buscando superar a mera instrumentalização da Álgebra, aquela que a vê somente como uma ferramenta para a resolução de problemas do cotidiano.

Na quarta seção, “A Álgebra como uma tarefa educacional”, analisaremos a obra de Freudenthal (1973). Apesar de esse matemático tê-la produzido em um contexto bastante específico, em que criticava a ascensão da Nova Matemática, o modo como desenvolve suas ideias desvela uma visão fenomenológica do ensino da Álgebra: aquela que prioriza o seu entendimento em detrimento à mera aplicação técnica. Essa leitura permitirá estabelecermos um diálogo com as sugestões que apresentamos quando analisamos a BNCC, no sentido de compreender as potencialidades de um ensino matemático voltado para um pensar que, ainda que não despreze a prática, busque compreender a Álgebra para além de sua instrumentalização.

Na quinta seção, “Caminhos para uma dessedimentação da Álgebra: do *anzahl* para o *zahl*, um conceito simbólico”, apresentaremos um estudo sobre os processos de simbolização da Álgebra. A obra de Jacob Klein (1899-1978), *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra*, traduzida por Eva Brann como *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, será a principal referência desta seção. Guiados por esta obra, destacaremos a diferença entre a concepção grega de *arithmos* (um número utilizado para contar coisas específicas) e a concepção moderna de *Zahl* (número como um conceito simbólico). Nesta seção, mostraremos ainda que o processo de simbolização da Álgebra ocorreu em um movimento entrelaçado à própria evolução conceitual do número. Para uma compreensão dos diferentes momentos históricos e filosóficos desse processo de simbolização, a seção será dividida em 7 subseções, são elas: “As origens historicizadas das ideias que estruturam a Álgebra”; “Conceitos de número e suas implicações no desenvolvimento da Álgebra simbólica”; “Conceitos de número: *arithmos* e mônadas”; “A Álgebra de Diofanto e sua concepção de número”; “A contribuições da cultura medieval para a divulgação das ideias matemáticas: uma ênfase no mundo árabe”; “Viète e a volta aos gregos: contribuições para o desenvolvimento da Álgebra simbólica - a Logística

Especiosa“; e “Descartes e a volta aos gregos: contribuições para o desenvolvimento da Álgebra simbólica: a Mathesis Universalis”.

Finalmente, na sexta seção, “A Álgebra sob a perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”, articularemos os conceitos investigados nas seções anteriores e trataremos do entendimento de Husserl acerca da Lógica; da formação dos juízos, da sua dupla natureza: ontológica e apofântica. Trilharemos, assim, um percurso investigativo que possibilitará a compreensão de como o filósofo desenvolveu a sua Teoria das Multiplicidades, bem como evidenciaremos uma aproximação entre ela e a Álgebra para, então, mostrar como a Álgebra pode desvelar-se, entre os seus modos de ser, como uma multiplicidade, como uma área da Matemática que dá conta de mencionar as objetividades gerais, aquelas que se mostram por meio de sua axiomatização e são objetos do pensamento, objetos intuíveis segundo suas formas puras, livres de qualquer posição de fato e que se mostram como uma generalidade indeterminada. Para tanto, esta seção foi dividida em quatro subseções. Na primeira delas, “A constituição lógica das objetividades em geral”, trataremos da formação lógica dos juízos, formação em que figuram as relações entre apofântica e ontologia. Na segunda, “Aproximação entre Álgebra e teoria das multiplicidades”, buscaremos compreender uma das características da Álgebra, aquela que dá conta de desvelar as objetividades em geral. Como aporte para nossas reflexões, trataremos, na terceira subseção, das “Fases do desenvolvimento da linguagem algébrica e suas relações com o desenvolvimento da própria Álgebra”. Nela, evidenciaremos o salto teórico da Álgebra em que ela deixou de tratar exclusivamente das equações e das operações sobre quantidades generalizadas e passou a investigar operações quaisquer definidas sobre objetos gerais, isto é, em que a própria noção de operação foi generalizada, de tal modo que os símbolos $+$ e $\times$, por exemplo, deixaram de ser unicamente os sinais usuais da adição e multiplicação da Aritmética e passaram a ser entendidos como enlaces regidos por uma axiomática. Na quarta e última subseção, “Teoria dos *Grupos*: um caso de multiplicidade algébrica”, trataremos mais especificamente de objetos do pensamento que são definidos por sua axiomática, em sua generalidade lógica, que constituem um caso específico de multiplicidades algébricas.

O tratado nessas seções articula-se e dá conta do indagado na pergunta diretriz desta tese, qual seja, *Como a Álgebra se desvela em seus modos de ser*? Além disso, permite que avancemos pelos questionamentos, críticas e indagações a respeito do pensamento algébrico, um dos temas significativos presentes na Educação Matemática.

Posto isso, a título de uma síntese compreensiva do investigado, apresentaremos nosso entendimento e articulações possíveis sobre: o modo pelo qual a Álgebra se mostra em seus modos de ser no âmbito da própria Matemática, evidenciando o pensamento algébrico; o modo pelo qual ela é tratada nos diferentes níveis de ensino do sistema educacional brasileiro (educação básica e ensino superior), em que são visíveis rupturas epistemológicas; o pensamento algébrico e suas possíveis compreensões no âmbito da Educação Matemática.

# 1. FENOMENOLOGIA: UMA VISÃO DO CONHECIMENTO INSPIRADA NA MATEMÁTICA

Talvez a exposição deste tema pareça um tanto esquemática para alguns ou excessivamente didática para outros já conhecedores da Fenomenologia. Esta pesquisa trata-se, contudo, de um trabalho na área de Educação Matemática levada a cabo por um educador matemático que, por conta da pesquisa empreendida, ingressou nos campos da Filosofia e da Fenomenologia, e não por um filósofo. Nesse sentido, buscou-se percorrer os caminhos labirínticos do pensar fenomenológico e husserliano, tentando ligar os fios que tecem o discurso de idas e vindas do filósofo, ainda hoje considerado um autor cujos textos são herméticos e que, segundo Nolasco (2019, p. 15), exige dos leitores que estejam “dispostos a construir, a partir das indicações do que se lê, um ‘experimento de pensamento’ dos mais complexos e emaranhados de que a história da filosofia tem notícia”. Estas considerações são escritas, portanto, como um hipertexto em que certos conceitos remetem a outros e que retornam a si mesmos à medida que o pensamento progride, não de modo linear, antes de modo entrelaçado.

Além disso, como a atitude fenomenológica é diferente da atitude natural, em diversos pontos deste trabalho as características de ambas frente ao conhecimento serão retomadas para estabelecer diferenças entre as duas atitudes (natural e fenomenológica). À maneira do método fenomenológico, este estudo pretende ser um olhar para os conceitos, um modo de vê-los, o voltar-se da consciência para eles. Será essa a orientação adotada em nossa pesquisa sobre como se dá o pensar algébrico.

Como argumento que sustenta a proposição apresentada no título desta seção, acerca da inspiração matemática da Fenomenologia, teceremos aqui um breve, porém, esperamos, profícuo, panorama da trajetória de Edmund Husserl (1859 - 1938), para compreender as convicções que direcionam esta pesquisa. Husserl trilhou um caminho que se iniciou com uma tentativa de fundamentação da Aritmética e culminou no desenvolvimento da Fenomenologia. Em suas primeiras pesquisas, o filósofo teve um particular interesse pela origem do conceito de números. Segundo Bicudo (2020), o conceito de origem permeia toda a obra do filósofo e “pode indicar uma das pontas dos muitos fios pelos quais se pode começar a compreender o sentido da obra de Husserl" (2020, p. 416, tradução nossa)[4]. Especificamente sobre a origem dos números, tema também tratado por Bicudo (2020), essa investigação é importante para a Matemática uma vez que:

> Os números são conceitos fundamentais do conhecimento humano em geral e, como tal, reivindicam um interesse filosófico especial, notadamente porque as consideráveis dificuldades inerentes ao seu entendimento sempre deram origem a erros perigosos e disputas sutis. Essas dificuldades estão intimamente ligadas a certas peculiaridades da constituição psicológica dos conceitos mencionados, em cuja elucidação a psicologia também tem um interesse especial. A tarefa das análises a seguir é satisfazer não apenas aqueles interesses aritméticos, mas acima de todos esses, interesses lógicos e psicológicos. (HUSSERL, 1891, p.7, tradução nossa)[5] .

O filósofo estava interessado em uma fundamentação da Aritmética e entendia poder encontrar suporte para isso no campo da Psicologia. Uma questão que o intrigava era saber como é possível ter êxito um procedimento que não lida com a coisa mesma, o número, mas com suas representações simbólicas. Nesse sentido, a seguinte questão foi formulada por ele: "Mas como entender conceitos que realmente não temos, e como não é absurdo que a mais certa de todas as ciências, a Aritmética, baseie-se em tais conceitos?" (HUSSERL, 1891, p. 214, tradução nossa)[6]. Para responder a essa questão, recorreu à teoria das Representações Própria e Imprópria de Franz Brentano (1838 – 1917).

> Uma representação simbólica ou imprópria é, como o próprio nome sugere, uma ideia [expressa ou representada] por meio de signos. Se um conteúdo não nos é dado diretamente como o que é, mas apenas indiretamente por meio de signos que o caracterizam de maneira única, então temos uma representação simbólica dele em vez de uma representação real. (HUSSERL, 1891, p. 215, tradução nossa)[7].

---

[4] the concept of origin can point to one of the tips of the many threads Through which one can begin to comprehend the meaning of Husserl's work.

[5] Anzahl sind Fundamentalbegriffe der menschlichen Erkenntnis überhaupt, und beanspruchen als solche ein besonderes philosophisches Interesse, zumal die erheblichen Schwierigkeiten, die ihrem Verständnisse anhaften, jederzeit zu gefährlichen Irrthümern und subtilen Streitigkeiten Anlass gegeben haben. Diese *Schwierigkeiten hängen innig zusammen mit gewissen Eigenthümlichkeiten der psychologischen Constitution der genannten Begriffe, an deren Aufhellung auch die Psychologie ein specielles Interesse nimmt. Nicht bloss jene arithmetischen, sondern vor allem diese logischen und psychologischen Interessen zu befriedigen, bezeichne ich als die Aufgabe der nachfolgenden Analysen.*

[6] Wie kann man aber von Begriffen sprechen, die man eigentlich nicht hat, und wie ist es nicht absurd, dass auf solchen Begriffen die sicherste aller Wissenschaften, die Arithmetik, gegründet sein soll?

[7] Eine symbolische oder uneigentliche Vorstellung ist, wie schon der Name besagt, eine Vorstellung durch Zeichen. Ist uns ein Inhalt nicht direct gegeben als das, was er ist, sondern nur indirect durch Zeichen, die ihn eindeutig charakterisiren, dann haben wir von ihm, statt einer eigentlichen eine symbolische Vorstellung.

Husserl, assim como seu professor Weierstrass (1815 - 1897), entendia que a "Aritmética pura (ou análise pura) é uma ciência que se baseia exclusivamente no conceito de número" (HUSSERL, 1891, p. 5, tradução nossa)[8]. É, portanto, na Teoria das Representações Impróprias de Brentano que Husserl busca a fundamentação necessária para compreender como um sistema de signos que representa simbolicamente os números pode produzir resultados idênticos aos que seriam produzidos a partir da coisa mesma.

O filósofo, então, desenvolveu sua argumentação mostrando que há uma relação de equivalência entre uma representação própria e uma representação simbólica, que autoriza, portanto, a operar a partir dos símbolos. Mais especificamente, o autor empenhou-se em mostrar, por meio dessa relação de equivalência, que é possível trazer à intuição os números por meio de seus símbolos. Em linhas gerais, Husserl tomou como intuitivo[9] os primeiros números naturais, tais como, 1, 2, …,10, tratando-os como a cardinalidade de conjuntos com um objeto, dois objetos, ..., dez objetos. Podemos ver um conjunto com 2 objetos, podemos, portanto, intuí-lo, mas seria difícil intuir um conjunto com 1000 objetos. No entanto, é possível considerá-lo como a união de conjuntos com 10 objetos, por exemplo. Desta forma, estabelece-se uma conexão entre os números não intuídos e os intuídos, o que legitimaria suas existências e a possibilidade de operar a partir deles. Mais detalhes sobre essa argumentação podem ser encontrados no trabalho de Husserl (1891).

Isso pode se manter para números naturais. Porém, há os números imaginários[10], entre outros, que têm apenas representações impróprias, vale dizer, não podem ser intuídos nem mesmo por operações realizadas sobre eles próprios, como as decomposições e as somas que poderiam ser realizadas para conectar um número não intuído, o 1500 por exemplo, a números intuídos, os da série 0 a 10. Essa ideia tem estreita relação com uma reflexão sobre o conceito de número do próprio Husserl:

> [...] Em primeiro lugar, será útil lidar com uma dificuldade lógica que surge em relação a todos os cálculos. Eles [os aritméticos] dizem que

[8] Die reine Arithmetik (oder reine Analysis) ist eine Wissenschaft, die einzig und allein auf den Begriff der Zahl basirt ist.
[9] Neste texto de Husserl, "intuitivo" está sendo tomado como uma intuição sensorial direta.
[10] Neste exemplo, estamos falando de números imaginários, tal como os compreende a Matemática moderna, aqueles que compõem os números complexos, da forma $a + bi$, em que $a$ e $b$ são números reais. Husserl, no entanto, refere-se, nesta obra (HUSSERL, 1891), a números imaginários não apenas nesse sentido, mas considera, como imaginário a um determinado conjunto numérico, todo número que não pertence a ele. O número -2, por exemplo, seria imaginário para o conjunto dos números naturais.

> 2 e 3 são 5; mas o conceito 2 e o conceito 3 sempre permanecem o conceito 2 e o conceito 3, nunca se tornam o conceito 5. E que sentido haveria para falar em cálculos com números iguais, de sua adição, multiplicação etc.? Ouro e ouro são sempre ouro; por que 5 e 5 não permanecem 5 novamente? Então, como alguém poderia ligar operacionalmente os conceitos de números, uma vez que cada um permanece identicamente o que é; e uma vez que cada conceito em si é apenas um, como devemos combinar os mesmos conceitos?
>
> A resposta é óbvia. O aritmético não opera de forma alguma com os conceitos de número como tais, mas com os objetos geralmente apresentados desses conceitos; os signos que eles conectam na aritmética têm o caráter de signos gerais formados com base em conceitos numéricos. Portanto, 5 não significa o conceito (o abstrato) cinco, mas 5 é um nome geral (ou um símbolo matemático) para qualquer conjunto que se enquadre no conceito cinco como tal. 5 + 5 = 10 significa algo como: um (qualquer um, qualquer) conjunto abrangido pelo conceito cinco e qualquer outro conjunto abrangido pelo mesmo conceito. O montante combinado resulta em um conjunto abrangido pelo conceito dez. (HUSSERL, 1891, p. 201 - 202)[11].

Pode-se dizer, então, parafraseando Husserl, que um número imaginário não é um conceito abstrato que veste algo que seja passível de ser intuído pelos sentidos, mas é um nome geral para qualquer objeto que tenha as propriedades de um número imaginário, ou seja, qualquer um que surja de uma predicação, uma axiomática e, portanto, constitui um objeto ontológico o que nos remete ao conceito de multiplicidades tal como explicaremos na seção 6 deste trabalho, “A Álgebra na perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”.

Na obra *Filosofia da Aritmética* (1891), Husserl buscava fundamentar essa área da Matemática a partir de concepções psicologistas, o que equivalia à tarefa de clarificar a origem do conceito de número "investigando os atos psicológicos que os originam” (BICUDO, 2020, p. 389, tradução nossa)[12]. Essa investigação objetivava

---

[11] Es wird zunächst nützlich sein, eine logische Schwierigkeit, die sich bezüglich allen Rechnens aufdrängt, zu erledigen. Man sagt 2 und 3 ist 5; aber der Begriff 2 und der Begriff 3 bleibt doch immer der Begriff 2 und der Begriff 3, und nie wird der griff 5 daraus. Und welchen Sinn hätte es gar von einem Rechnen mit gleichen Zahlen, von ihrer Addition, Multiplication etc. zu sprechen? Gold und Gold bleibt doch immer wieder Gold; warum bleibt 5 und 5 nicht wiederum 5? Wie könnte man also Zahlb egriffe operativ, verknüpfen, da jeder identisch das bleibt, was er ist; und da jeder Begriff an und für sich nur ein einziger ist, wie sollte man gar gleiche Begriffe verknüpfen?
Die Antwort liegt nahe. Der Arithmetiker operirt überhaupt nicht mit den Zahlbegriffen als solchen, sondern mit den allgemeins vorgestellten Gegenständen dieser Begriffe; die Zeichen, die er rechnend verbindet, haben den Charakter auf Grund der Zahlbegriffe gebildeter allgemeiner Zeichen. So bedeutet 5 nicht den Begriff (das Abstractum) Fünf, sondern 5 ist ein allgemeiner Name (resp. ein Rechenzeichen) für irgend eine beliebige unter den Begriff Fünf fallende Menge als solche. 5 + 5 = 10 heisst soviel als: eine (irgend eine, welche auch immer) unter den Begriff Fünf fallende Menge und irgend eine andere unter denselben Begriff fallende Menge ergeben vereinigt eine unter den Begriff Zehn fallende Menge.

[12] looking into the psychological acts which originate it.

buscar “a origem do número na subjetividade dos atos psicológicos realizados pelo sujeito” (BICUDO, 2020, p. 401, tradução nossa)[13]. A análise da origem, segundo Moura (1989, p. 58), tem uma dupla função: “dar um conteúdo claro aos conceitos e, ao investigar os conceitos das ciências normativas, fundamentá-las através dessa clarificação”. Mais tarde, Husserl percebeu que essas fundamentações seriam encontradas no campo da Fenomenologia. Contudo, a busca das origens estava já nessa tarefa inicial do filósofo e se manteve posteriormente, o que significa que, quanto a este aspecto, não houve uma ruptura em suas ideias, mas um amadurecimento. A Fenomenologia, ao tratar a questão dos números, quer naturais ou imaginários, procura apreender suas essências, intencionalmente, pela consciência. Logo, conforme compreendemos, para desenvolvê-la, Husserl inspirou-se na Lógica e na Matemática, quando buscou compreender “os problemas radicais de esclarecimento dos conceitos lógicos e matemáticos básicos e, portanto, de uma fundamentação realmente radical da lógica e da matemática [que] motivaram o início da fenomenologia.” (HUSSERL, 1968, p. 366, tradução nossa)[14].

Ao longo do desenvolvimento de suas análises e reflexões, que culminaram na Fenomenologia, Edmund Husserl promoveu uma radical mudança que representou uma contraposição à prevalente visão positivista de seu tempo, que era marcada por uma atitude natural. Podemos dizer com Moura (1989, p. 140), que a Fenomenologia, entre suas questões, compreende também “[u]ma ‘crítica da razão’ que apreende o conhecer como atividade subjetiva, com pretensão à validade objetiva, [e] explicita o conhecimento como uma concordância entre o visar o objeto e esse próprio objeto”. Os conceitos relacionados a esse ideário serão tratados na sequência deste nosso texto, tanto quanto possível rigorosamente, em busca de clarificar os pontos que irão auxiliar-nos em nossa investigação sobre como se dá o pensamento algébrico. Iniciaremos esta tarefa tratando das diferenças entre as atitudes natural e fenomenológica.

Ao caracterizar o conhecimento sob a perspectiva das ciências naturais, Husserl afirma que ele é tido por elas, ingenuamente, como algo óbvio, pois o próprio conhecimento não é tomado como um problema em si, ou seja, a atitude natural

---

[13] the origin of the number in the subjectivity of psychological acts performed by the subject.
[14] die radikalen Probleme einer Klärung der logischen und mathematischen Grundbegriffe und damit einer wirklich radikalen Begründung einer Logik und Mathematik den Anfang der Phänomenologie motiviert hatten.

assume-o sem o questionar: "O pensamento natural, que atua com uma fecundidade ilimitada, e progride, em ciências sempre novas, de descoberta em descoberta, não tem nenhum ensejo para lançar a questão da possibilidade do conhecimento em geral" (HUSSERL, 1989, p. 41). Assim, o conhecimento enquanto tal não constitui um problema para a atitude natural que apenas admite que se conhece. Para essa atitude,

> O conhecimento é um facto da natureza, é vivência de seres orgânicos que conhecem, é um *factum* psicológico. Pode-se, como qualquer *factum* psicológico, descrever-se segundo as suas espécies e formas de conexão e investigar-se nas suas relações genéticas. (...)
>
> O conhecimento é, em todas as suas configurações, uma vivência psíquica: é conhecimento do sujeito que conhece. Perante ele estão os objectos conhecidos. (HUSSERL, 1989, p. 41-42).

Na esfera das ciências naturais, acredita-se que estamos seguros de nos encontrar na posse da verdade objetiva, fundamentada por métodos fidedignos, que realmente atingem a objetividade. Nessa esfera, adota-se o conhecimento como um dogma, sem questioná-lo ou refletir sobre sua possibilidade e, a partir do dado avança-se, ingenuamente, em direção ao não dado: "inferimos o não experimentado a partir do directamente experimentado" (HUSSERL, 1989, p. 39-40), fazemos generalizações e, por meio delas, extraímos resultados para os casos particulares, isso tudo efetuado de modo irrefletido. Fundamentada nessa pretensa objetividade[15], do domínio das ciências naturais, uma ciência pode edificar-se sobre outra e servir como modelo teórico para outra. O conhecimento seria desenvolvido progressivamente. Husserl, no entanto, compreende que o conhecimento não se doma pelos métodos desenvolvidos pelas ciências naturais. Em contraposição à atitude natural, o filósofo propõe uma teoria crítica do conhecimento que tem duas tarefas, uma refutativa, outra afirmativa. A primeira, refutativa, consiste em

> denunciar os absurdos em que, quase inevitavelmente, se envencilha a reflexão natural sobre a relação entre conhecimento, sentido do conhecimento e objeto do conhecimento, *ergo*, tem de refutar as teorias abertas ou ocultamente cépticas sobre a essência do conhecimento mediante a demonstração do seu contrassenso. (HUSSERL, 1989, p. 45).

A segunda tarefa dessa teoria crítica do conhecimento, a afirmativa, seria "resolver os problemas concernentes à correlação entre conhecimento, sentido do

[15] A respeito da objetividade autêntica, considerada por Husserl no campo da Fenomenologia, ler a página 34 deste trabalho, além das páginas 176, 181 e 202 da seção 6: "A Álgebra na perspectiva husserliana: a Teoria das Multiplicidades".

conhecimento e objeto do conhecimento, graças à inquirição da essência do conhecimento" (HUSSERL, 1989, p. 45). As essências constituem, por assim dizer,

> um poder para dar significação à realidade (...) [e são produzidas pela consciência]. A consciência a que se refere o filósofo é o sujeito do conhecimento, como estrutura e atividade universal e necessária do saber (...) é uma pura atividade, o ato de constituir essências ou significações dando sentido ao mundo ou as coisas. (CHAUÍ, 2002, p. 237)[16].

A respeito das essências, Husserl as conceitua como teor racional de toda e qualquer efetividade (HUSSERL, 2012b, p. 19) e, para cada uma dessas efetividades "está aberto o caminho que leva ao reino da possibilidade ideal ou pura e, com isso, ao reino do pensamento apriorístico" (HUSSERL, 2012b, p. 20).

Sobre o pensamento apriorístico e suas relações com o adjetivo "racional" é preciso considerar, no universo do pensamento husserliano, que o filósofo, muitas vezes, redimensiona ou ressignifica termos correntes da Filosofia para dar conta da expressão de suas ideias. Assim acontece com o pensamento apriorístico, considerado aquele que carrega em si, potencialmente, toda facticidade. Por sua vez, toda facticidade, toda aparição das coisas, corresponde, em si, a uma essência, mas nem toda essência corresponde a uma facticidade, e sim a possibilidades: "toda e qualquer efetividade alberga em si, de modo evidente, possibilidades puras" (HUSSERL, 2012b, p.18). Dito de outro modo, "cada objeto individual tem uma composição eidética como *sua* essência, assim como, inversamente, a cada essência correspondem indivíduos possíveis que seriam suas singularizações fáticas" (HUSSERL, 2006, p. 42, grifo do autor). Leis de essências, leis apriorísticas ou de possibilidades puras são, por assim dizer, sinônimas à medida que "ajuizar as efetividades segundo as leis da possibilidade pura, ou ajuizá-las segundo 'leis de essência', segundo leis apriorísticas, é uma tarefa *universal"* (HUSSERL, 2012b, p. 19). Deste nexo entre facticidade e essência surge, então, por necessidade lógica, uma relação entre ciências dos fatos e ciências das essências, sendo que as primeiras dão conta apenas dos fatos e não abarcam as essencialidades, enquanto as outras abrangem, para além da experiência factual, as essências.

Especificamente, o teor racional de toda efetividade consiste em sua essência, em seu conhecimento exato: "*Toda e qualquer efetividade* tem a sua 'essência'

[16] O conceito de consciência é central na Fenomenologia e será tratado neste trabalho, mais especificamente, nas páginas 33 e seguintes.

enquanto seu teor racional, toda e qualquer uma [efetividade] torna possível e exige o seu conhecimento racional ('exato')" (HUSSERL, 2012b, p. 19, grifos do autor). A autêntica racionalidade é, portanto, aquela que "enquanto conhecimento a partir de 'princípios', é, precisamente, conhecimento a partir de leis de essência, é conhecimento de efetividades a partir das leis da pura possibilidade" (HUSSERL, 2012b, p. 20). Essa racionalidade autêntica contrasta com o "racionalismo extraviado" (HUSSERL, 2012b, p. 141) que Husserl identifica como base da crise da humanidade europeia, tópico que discutiremos na seção 2 deste trabalho, "A Fenomenologia no e do contexto da crise das ciências europeias".

O interesse e o direcionamento do filósofo em relação às essências nascem da vocação matemática de Husserl, uma vez que o lugar originário da investigação pura de essência é a Matemática, ainda que ela não seja a única instância para investigar os conceitos puros (HUSSERL, 2012b, p. 12). Nesse sentido, sempre a Matemática investiga essências, mas nem todas as leis de essência são investigadas matematicamente. A tarefa de clarificar todas as ciências apriorísticas cabem à plena e autêntica *Mathesis Universalis*, à fenomenologia transcendental que abriga em si a totalidade das ciências de essências e que, além disso, põe "em interconexão toda a consciência e ser possíveis" (HUSSERL, 2012b, p. 22).

A atitude fenomenológica é, portanto, diferente da atitude natural. A primeira investiga as essências; a segunda, as efetividades, aquela atitude vinculada às ciências naturais, ou seja, constitui a parte do nosso universo intelectual "em que nos situamos espontaneamente em nossa vida cotidiana, quando nos dirigimos às coisas para manipulá-las" (MOURA, 2006, p. 16), e, além disso, compreende "a orientação em que se situa o cientista, quando este se dirige às coisas ou ao mundo para conhecê-los, discernindo suas propriedades e relações 'objetivas'" (MOURA, 2006, p. 16). Já na orientação fenomenológica, o interesse não é dirigido às "coisas", e sim aos fenômenos, graças aos quais temos consciência dos objetos. Desse aspecto decorre a subjetividade da percepção dos fenômenos, a qualidade de serem sentidos e vivenciados na carnalidade do corpo-vivente, o qual percebe as doações de determinados objetos sempre reportadas a um ponto de vista, por princípio, unilateral e variável. Na obra *A Ideia da fenomenologia* (1989), Husserl propõe que essa abordagem filosófica, perante todo o conhecimento natural, "encontra-se numa dimensão completamente nova" (HUSSERL, 1989, p. 47) a qual, ainda que tenha conexões com as antigas dimensões das ciências naturais, exige um novo método que se contrapõe aos métodos destas.

Problematizar a possibilidade do conhecimento é um desafio que foi evidenciado por Husserl quando questionou: como pode a teoria crítica do conhecimento "encetar-se, já que cada conhecimento escolhido como ponto de partida é, enquanto conhecimento, posto em questão?" (HUSSERL, 1989, p. 22). Para resolver esse problema, há que se aceitar um ponto absoluto, de onde possam partir as investigações. Esse ponto Husserl encontra na *cogitatio* de Descartes: assim como a existência das vivências são indubitáveis enquanto se experiencia, tem-se que "o apreender e o ter intuitivos e diretos da *cogitatio* são já um conhecer; as *cogitationes* são os primeiros dados absolutos" (HUSSERL, 1989, p. 23, grifos do autor). Husserl justifica a inquestionabilidade das *cogitationes* pelo par conceitual imanência-transcendência, que será ressignificada pela Fenomenologia[17].

Assim, Husserl foi descrevendo o apreender e o ter intuitivos e diretos da *cogitatio.* O pensar e o intuir diretos já revelam um conhecer, conforme Husserl explicita. De modo atento, ele vai realizando a articulação das descrições dos atos de pensar e de intuir, interrogando-os passo a passo, durante toda sua vida, e, assim, vai explicitando o seu modo de compreender. É para essa trajetória que lançaremos nosso olhar nesta seção introdutória, objetivando compreendê-la, sem desconsiderar que, mesmo Husserl, em sua obra *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*, de1913, considerava-a ainda no início:

> a fenomenologia se dá em nossas exposições como ciência *que está em seu início*. Só o futuro há de ensinar o quanto dos resultados das análises aqui tentadas é definitivo. Com certeza, muito daquilo que descrevemos terá de ser descrito de maneira diferente *sub specie aeterni*. (HUSSERL, 2006, p. 221, grifos do autor).

Portanto, para assumirmos uma atitude fenomenológica, não podemos compreender a Fenomenologia de modo dogmático. Logo, essa atitude exige um entendimento das possibilidades interpretativas dos conceitos Fenomenologia e fenômeno, que pode ser encontrado no texto de Husserl:

> A fenomenologia do conhecimento é ciência dos fenômenos cognoscitivos neste duplo sentido: ciência dos conhecimentos como fenômenos (*Erscheinungen*), manifestações, actos da consciência em que se exibem, se tornam conscientes, passiva ou activamente, estas e aquelas objectalidades; e, por outro lado, ciência destas

[17] O par conceitual imanência-transcendência será tratado nas páginas 34, 48 e seguintes deste trabalho.

> objectalidades enquanto a si mesmas se exibem deste modo. A palavra “fenômeno” tem dois sentidos em virtude da correlação essencial entre *o aparecer* e *o que aparece*. (HUSSERL, 1989, p.34-35, grifos do autor).

Essa correlação essencial entre o aparecer e o que aparece é entendida pela Fenomenologia como objeto do conhecimento e não como um objeto mundano, empírico. Trata-se, de outro modo, do objeto intencional, aquele que é captado no fluxo de suas aparições, o que implica um deslocamento do problema do conhecimento para o próprio conhecimento, colocado como centro da investigação, ou seja, há que se estabelecer uma diferenciação “entre a explicação científico-natural (psicológica do conhecimento) como fato natural e a elucidação do conhecimento quanto às possibilidades essenciais da sua efetuação” (HUSSERL, 2008, p. 25). A Fenomenologia irá concentrar-se, justamente, no campo da segunda perspectiva, aquela que diz respeito às possibilidades essenciais da efetuação do conhecimento. Desse modo, para investigar “o sentido da pergunta por aquela possibilidade [a possibilidade de compreender o sentido do aprender e não do aprendido], precisa-se da *redução fenomenológica*” (HUSSERL, 2008, p. 25, grifos do autor). Trata-se, a redução fenomenológica, do princípio da ausência de pressupostos, *epoché*[18]. A compreensão desta redução requer que se considere que a Fenomenologia lida com essências, conforme mencionado neste texto. Logo, aquilo que existe na realidade empírica não constitui o objeto de sua investigação, nem é intenção do fenomenólogo fazer afirmações sobre as existências, o que implica o fato de ele não se valer dos pressupostos das ciências naturais. Essa atitude será mais bem compreendida a partir da clarificação do que é a consciência pura[19] como campo da Fenomenologia e, consequentemente, para a orientação fenomenológica, a qual se distancia do psicologismo, que é centrado em uma atitude natural.

Sob a perspectiva fenomenológica, Husserl abandona o terreno do psicologismo, “*o solo da psicologia, inclusive o da psicologia descritiva*” (HUSSERL, 1989, p. 26, grifo do autor). Nesse intento, redimensiona a pergunta “Como eu posso, este homem, atingir nas minhas vivências um ser em si, fora de mim?” (HUSSERL, 1989, p. 27), questão que equivalia à oposição entre imanência e transcendência tal como a atitude natural a concebia, para aquela outra que terá como objetivo

[18] O tema da redução fenomenológica será retomado nas páginas 36 e seguintes deste trabalho.
[19] O conceito de consciência é central na Fenomenologia e será tratado neste trabalho, mais especificamente, nas páginas 33 e seguintes.

problematizar as essências: “Como pode o fenômeno puro do conhecimento atingir algo que lhe não é imanente, como pode o conhecimento (absolutamente dado em si mesmo) atingir algo que não se dá em si absolutamente? E como pode compreender-se esse atingir?” (HUSSERL, 1989, p. 27).

Husserl, para dar conta desse problema, compreende “a fenomenologia (...) [como] a doutrina universal das essências, em que se integra a ciência da essência do conhecimento” (HUSSERL, 1989, p. 22). Os termos *universal* e *essência* já apontam para a perspectiva assumida pelo método fenomenológico: nele não estará em questão o conhecimento sobre qualquer coisa mundana, mas as “possibilidades cognitivas que, como tais, são indubitáveis e, claro está, conhecimentos no sentido mais estrito”. Esse sentido estrito do conhecimento é aquele que se debruça sobre “a apreensibilidade, e [sobre] sua própria possibilidade cognitiva, (...) [que] é absolutamente indubitável.” (HUSSERL, 1989, p. 23). A indubitabilidade se, por um lado, remete-nos ao “[Eu] *Penso, logo existo*” (DESCARTES, 2019, p. 64), por outro abrirá um campo de reflexões que apontam para aquém ou além desse pensar cartesiano. *Aquém* porque o *cogito* em Descartes aparece, por assim dizer, como indubitável e, “antes de mais, já a *cogitatio* cartesiana necessita da redução fenomenológica [porque Descartes ainda estava preso ao eu psíquico e] o eu que vive (...) [,] o homem no tempo mundano [,] (...) não é nenhum dado absoluto” (1989, p. 26). Antes de mais, esse “eu*”* necessita da purificação obtida pela redução transcendental. Por isso,

> [e]m oposição a Descartes, aprofundamo-nos na tarefa da abertura (*Freilegung*) do campo infinito da experiência transcendental. A evidência cartesiana, aquela da proposição *Ego cogito*, *ego sum*, resta estéril, pois ela não apenas negligencia [a tarefa] de clarificar o sentido puramente metodológico da *εποχή* transcendental, mas negligencia também [o intuito de] direcionar a atenção ao fato de que o *Ego* pode abrir a si mesmo ao infinito e sistematicamente por meio da experiência transcendental. (HUSSERL, 2019, p. 60, grifos do autor, inserções do tradutor).

Essa falta de disposição para colocar o próprio “eu” fora de circuito tem como consequência o desenrolar da cadeia das *cogitationes* não despida de preconceito:

> Descartes mesmo tinha previamente um ideal de ciência, o da geometria, *i.e.,* da ciência matemática da natureza. (...) Era para Descartes de antemão uma autoevidência que a ciência universal precisasse ter a figura de um sistema dedutivo; em virtude desse sistema, toda construção precisaria assentar-se sobre um fundamento axiomático, que fundamenta absolutamente a dedução. (HUSSERL, 2019, p. 37).

Trata-se de uma atitude que fere o princípio da ausência de pressupostos, aquela *epoché* que fora intentada pelo filósofo francês, mas que não fora levada às últimas consequências. Nesse sentido, Husserl afirma que:

> precisamos nos guardar já contra aquele preconceito (...) oriundo da admiração pelas ciências matemáticas da natureza e que nos determina a nós mesmos como antiga herança; precisamos nos guardar contra ele tal como se tratasse, sob o título *ego cogito*, de um "axioma" apodítico que, em associação com outras hipóteses a serem exibidas, e, além dessas, hipóteses eventualmente fundamentadas indutivamente, haveria de fornecer o fundamento para uma ciência secular que se esclarecesse dedutivamente, uma ciência nomológica, uma ciência *ordine geométrico*, justamente semelhante à ciência matemática da natureza. (HUSSERL, 2019, p. 52-53).

Consequentemente, na perspectiva fenomenológica, o próprio *ego cogito* não pode ser tomado como um axioma autoevidente, pois a reflexão inclui também em si o "eu" que medita como seu objeto intencional:

> Desta maneira, pode o eu que medita fenomenologicamente tornar-se espectador desinteressado de si mesmo não apenas a respeito das singularidades, mas [também] universalmente; e, incluso nisso, [pode tornar-se espectador desinteressado] de toda objetividade que há para ele, e tal como ela é para ele. (HUSSERL, 2019, p. 65, inserções do tradutor).

Enfim, ao não exercer a *epoché* transcendental, aquela que parentetiza o eu empírico, Descartes teria também negligenciado a possibilidade de o *Ego* abrir-se à subjetividade transcendental: "Nisso Descartes errou, e assim ocorre que ele se encontra diante da maior de todas as descobertas - já, de certa maneira, a descobriu e, porém, não capta o seu sentido autêntico, *i.e.*, o sentido da subjetividade transcendental" (HUSSERL, 2019, p. 53). A *cogitatio* cartesiana não capta o sentido da subjetividade transcendental por aceitar, de modo ingênuo[20], a existência do eu empírico, não o submetendo à *epoché* radical. Já para Husserl (1989, p. 26), "o eu que vive, este objeto, o homem no tempo mundano, esta coisa entre as coisas etc., não é nenhum dado absoluto", isso porque suas asserções são singulares e não captam a essência do conhecimento buscada por Husserl, aquele campo do conhecimento absoluto em que "ficam indecisos o eu, o mundo, Deus e as multiplicidades matemáticas e todas as objetividades científicas" (HUSSERL, 1989, p. 29). A dúvida teve uma significação histórica nas meditações de Descartes, mas não se constituiu como aquela dúvida radical, da *epoché* fenomenológica, e, nesse

---

[20] Ingênuo é compreendido aqui por algo em que há "ausência de reflexão" (MOURA, 1989, p. 117).

sentido, “em Descartes, descobri-la e perdê-la foi tudo a mesma coisa” (HUSSERL, 1989, p. 29).

Se dissemos que Husserl parte de um lugar aquém da perspectiva cartesiana a respeito do *ego cogito*, que não pode ser tomado como axioma, podemos afirmar também que seu pensamento vai além dela, porque irá propor-se a descrever esse mesmo pensar, as *cogitationes*, de modo rigoroso a fim de clarificá-lo em sua essência como atos intencionais de uma consciência cujos objetos intencionais estão correlacionados aos objetos intuídos, em conexões noético-noemáticas que decorrem da *epoché* fenomenológica:

> ao invés de querer dar valor ao *ego cogito* como premissa apoditicamente evidente para conclusões a serem pretensamente deduzidas sobre uma subjetividade transcendente, desviamos nosso olhar atento ao fato de que a *εποχή* fenomenológica abre (a mim, ao filósofo que medita), uma esfera de ser infinita, inovadora, como uma esfera de um novo tipo de experiência: a transcendental. (HUSSERL, 2019, p. 57).

Trata-se, portanto, de uma nova postura frente ao conhecimento, por meio da qual o eu vê “que pela primeira vez o tudo-do-mundo, e assim tudo o que naturalmente é em geral, só é para mim se a mim é válido em cada sentido seu enquanto *cogitatum* das minhas *cogitationes”* (HUSSERL, 2019, p. 65), vale dizer, enquanto estruturas noético-noemáticas[21], ou ainda, enquanto o que é pensado em correlação ao pensar. Desse modo, Husserl acrescenta ao *ego cogito* o *cogitatum* indo, assim, além de Descartes. Dito de outra forma: “todo *cogito* (...) traz em si mesmo (...) [na] maneira do visado, o seu respectivo *cogitatum*” (HUSSERL, 2019, p. 62). Logo, a parelha conceitual consciência e intencionalidade constitui o ponto central da Fenomenologia, uma vez que “ser consciência de algo, (...) [significa], trazer em si, enquanto *cogito*, o seu próprio *cogitatum* (HUSSERL, 2019, p. 62).

A centralidade da consciência, ponto fulcral da Fenomenologia[22], levará Husserl a analisar sua estrutura essencial: a de ser consciência de algo por estar dirigida para um objeto, vale dizer, ter uma propriedade, que é a intencionalidade. Para ele, “[a] intencionalidade é aquilo que caracteriza a *consciência* no sentido forte, e que justifica ao mesmo tempo designar todo o fluxo de vivido como fluxo de consciência e

---

[21] A respeito das relações noético-noemáticas remetemos o leitor à página 45 deste trabalho.

[22] O conceito de consciência, desenvolvido nas próximas páginas, será referenciado em diversos pontos deste trabalho e nessas ocasiões, remeteremos o leitor para cá.

como unidade de uma *única* consciência" (HUSSERL, 2006, p. 190, grifos do autor). Assim,

> [s]ó a fenomenologia, pelo retorno às fontes da intuição em consciência transcendental purificada, pode nos tornar claro o que está propriamente em jogo quando falamos, ora das condições formais de verdade, ora das condições formais do conhecimento". (HUSSERL, 2006, p. 326).

Para uma abordagem fenomenológica, tal como proposta por Husserl, é importante ter em vista a noção de "objeto intencional [, aquele que] não cessa de ser trazido à consciência (...) [e que] se 'dá' sempre 'de outro modo'; ele é '*o mesmo*', apenas dado em outros predicados" (HUSSERL, 2006, p. 291, grifo do autor), manifesta-se, portanto, sempre por diferentes modos de doação. A perspectiva fenomenológica, ao desvendar a ingenuidade da atitude natural, privilegia os atos por meio dos quais os objetos aparecem ao sujeito e não o objeto empírico:

> A atitude fenomenológica é determinada apenas pela conversão dos próprios atos em objetos, atos que permaneciam anônimos na "atitude natural". É em função dessa oposição [atitude natural *versus* fenomenológica] que surge o primeiro modelo da "ingenuidade" da atitude natural: essa atitude é "ingenuamente objetiva" enquanto nela o olhar se dirige aos objetos e apenas "vive" nos atos intencionais, ao invés de refletir sobre eles. Agora, se os objetos são vistos, mas não os atos através dos quais eles aparecem ao sujeito, a ingenuidade é sinônimo da ausência de reflexão (...), e a fenomenologia é a neutralização de toda e qualquer ingenuidade. (MOURA, 1989, p. 117).

A crítica que Husserl faz às ciências naturais e à atitude natural formula-se, então, na constatação de que nada do que temos como certeza é, efetivamente, certo. Disso decorre a importância da reflexão como antídoto à ingenuidade.

Na atitude natural, o imanente é o que está em mim e o transcendente é o que está fora de mim[23]. Nela, se por um lado o objeto é "pensável como estando além de sua manifestação, como um conteúdo pensável independente de uma perspectiva, de um ponto de vista" (MOURA, 1989, p. 165) isto é, pensável como sendo a coisa em si, por outro lado, nesta mesma atitude, "[a] consciência (...) [é] apreendida como parte do mundo, [logo] será inevitavelmente vista como uma região no interior da totalidade do mundo, região limitada por outras regiões e que por isso terá inevitavelmente um exterior a si" (MOURA, 1989, p. 165). Desse modo, estabelece-se uma oposição entre

[23] O par conceitual imanência-transcendência será tratado também nas páginas 48 e seguintes.

mundo e manifestação: "é por isso que a oposição entre mundo e representação está inscrita na atitude natural" (MOURA, 1989, p. 165). Isso significa que se existe uma região que é a consciência e outra que é a região mundana, o conhecimento torna-se um problema, assim enunciado por Husserl: "Ora, como há, como pode haver separação entre a *consciência mesma*, como um *ser concreto em si*, e o ser nela trazido à consciência, o *ser percebido*, como aquele que está *"contraposto"* à consciência e como sendo "*em-si e por-si*"? (HUSSERL, 2006, p. 95, grifos do autor). A citação, se parafraseada, diz respeito ao fato de ser um enigma para a compreensão do conhecimento a dualidade consciência/mundo, consciência/ser-em-si. A solução da Fenomenologia é superar essa dualidade por meio da ideia de consciência transcendental, aquela que se visualiza via redução transcendental:

> a consciência, considerada em sua "*pureza*", tem de valer como *uma concatenação de ser fechada por si*, como uma concatenação do *ser absoluto*, no qual nada pode penetrar e do qual nada pode escapulir; que não tem nenhum lado de fora espaço-temporal e não pode estar em nenhum nexo espaço-temporal, que não pode sofrer causalidade de coisa alguma, nem exercer causalidade sobre coisa nenhuma. (HUSSERL, 2006, p. 116, grifos do autor).

Dado que a consciência é fechada em si e, portanto, inexiste um exterior a ela, "*o mundo da* 'res' *transcendente é inteiramente dependente da consciência*" (HUSSERL, 2006, p. 115, grifos do autor). Nas palavras de Moura (1989),

> A consciência, que se apresentava como dependente do mundo em que estava inscrita, mostrar-se-á independente, enquanto o conjunto de seus objetos passará a ser visto como dependente e relativo a esse absoluto, que não será mais uma região limitada por outras regiões (...) e que por isso será chamada de região originária. (p. 166).

Dizer que a consciência é uma região originária não significa dizer que ela crie os objetos do mundo, porém, que todo e qualquer objeto para ser conhecido é enlaçado pela intencionalidade e só faz sentido para o sujeito mediante os atos da consciência. É por isso que se pode afirmar que não há nada conhecido que não seja um conhecimento de uma consciência que conhece. Dito de outro modo, "a consciência é o "absoluto em relação ao qual todo fenômeno é relativo" (SARTRE, 1997, p. 29). Entretanto, também é importante esclarecer que ela é absoluta no que tange ao se voltar para, de modo intencional, indagando pelo que vê e pelo sentido que faz. Portanto, seu caráter de ser absoluto não diz de ela ser uma totalidade imutável, uma vez que, no âmbito da Fenomenologia transcendental, a consciência é fluida e está presente na totalidade do corpo-vivente. Se na atitude natural há uma primazia do objeto para o conhecimento, na fenomenológica a primazia é atribuída à consciência. Husserl, nas *Investigações Lógicas*, trata de uma plurivocidade do termo consciência, apresentando três modos de compreendê-la:

> 1. consciência como a consistência fenomenológica real conjunta do eu empírico, enquanto entrelaçamento das vivências psíquicas na unidade da corrente de vivências [fluxo dos vividos]. 2. Consciência como o eterno dar-se conta das vivências psíquicas próprias. 3. Consciência como designação global para todo e qualquer tipo de “atos psíquicos” ou “vivências intencionais”. (HUSSERL, 2012a, p. 295).

Se nessa obra, ponto intermediário da trajetória intelectual de Husserl, encontramos traços de um “eu empírico” na concepção de consciência, cabe esclarecer que não se refere a um eu em particular, pois segundo Moura (1989, p. 103, grifos do autor), essas definições, “eu empírico”, “vivências psíquicas próprias”, por exemplo, “não se referiam a *pessoas*, não se referiam ao *eu* ou ao *outro*, não falavam de *meus* vividos ou de vividos *dos outros*”, mas se referiam ao que é dado em sentido mais estrito, o vivido tal como ele é nele mesmo. Será a partir do terceiro sentido de consciência que Husserl irá desenvolver a correlação entre consciência e intencionalidade, a qual compreende o fato de pertencer à “essência de todo *cogito* atual ser consciência *de* algo” (HUSSERL, 2006, p. 89, grifos do autor), que toda consciência é intencional por efetivamente direcionar-se para algo, de que toda consciência é consciência de um objeto intencional de uma visada: “[t]odos os vividos que têm em comum essas propriedades eidéticas também se chamam ‘*vividos intencionais*’ (...); uma vez que são consciência de algo, eles são ditos ‘*intencionalmente referidos*’ a esse algo” (HUSSERL, 2006, p. 89, grifos do autor).

Assim, ao longo do desenvolvimento da Fenomenologia, Husserl desvela a ideia de uma consciência transcendental que se abrirá mediante a redução fenomenológica, aquela consciência, negligenciada por Descartes, enquanto “ser absoluto (...) protocategoria do ser em geral” (HUSSERL, 2006, p. 165). Essa consciência transcendental, descrita nas *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica,* também é tratada na *Crise das ciências europeias*:

> Se se fala de uma “consciência transcendental” em geral, se não posso ser eu, como este singular-individual, o portador do entendimento constituinte da natureza, não tenho de perguntar como posso ainda ter, acima da minha autoconsciência individual, uma consciência geral, transcendental-intersubjetiva? (HUSSERL, 2012, p. 164).

Em outros termos, com a “devida modificação introduzida pelos parênteses [pela *epoché*], o mundo inteiro, com seus indivíduos psíquicos e com os vividos psíquicos deles, faz parte da fenomenologia: tudo isso como correlato da consciência absoluta” (HUSSERL, 2006, p. 166). Vale dizer, que a suspensão do mundo inteiro com seus indivíduos que se dá pela *epoché* permite que se capte as essências, que não são objetos circunstanciais, mundanos, se fenomenologicamente considerados:

> na *epoché*, ele [o mundo] torna-se fenômeno, e o que resta, então, não é uma pluralidade de mentes separadas, cada uma reduzida a sua pura interioridade, mas: assim como há uma única natureza universal, como uma conexão de unidade encerrada em si, assim há também uma única conexão mental, uma conexão integral de todas as mentes, unidas todas, não exterior, mas interiormente, a saber, pelo entrelaçamento intencional da comunidade da sua vida. (HUSSERL, 2012, p. 206, inserção nossa).

Nessa passagem, evidenciamos que Husserl está preocupado com o transcendental, que não se confunde com o transcendente. Trata-se de se chegar pela redução transcendental ao “puro sujeito da sua intencionalidade que, pela redução radical é intencionalidade universal e pura” (HUSSERL, 2012, p. 207). Assim, a consciência transcendental não se confunde com a empírica, mas ela é aquela à qual podemos ascender/compreender por meio da redução transcendental sendo, portanto, universal.

Essa redução radical a que se refere Husserl é a redução fenomenológica, pedra de toque do método, que se caracteriza pela suspensão da tese geral da atitude natural. Embora possa ser colocada no singular, ela é plural uma vez que se pode falar “de *reduções fenomenológicas* (ou, antes, unindo-as, *da* redução fenomenológica, tendo em vista a unidade de seu conjunto)” (HUSSERL, 2006, p. 85). Assim, podemos dizer que há esferas de redução: a eidética e a transcendental. A primeira, corresponde à redução do objeto a um puro noema; a segunda, à redução em que se alcança o “eu puro”, concomitante à consciência pura (HUSSERL, 2006, p. 133), transcendental. Ambas são desdobramentos da *epoché* fenomenológica, o método de parentetização, já presente no cartesianismo, agora submetido “a uma determinada restrição” (HUSSERL, 2006, p. 81) assim descrita por Husserl:

> *Colocamos fora de ação a tese geral inerente à essência da orientação natural*, colocamos entre parênteses tudo o que é por ela abrangido no aspecto ôntico: isto é, todo esse mundo natural que está constantemente “para nós aí”, “a nosso dispor”, e que continuará sempre aí como “efetividade” para a consciência, mesmo quando nos aprouver colocá-la entre parênteses.

> Se assim procedo, como é de minha plena liberdade, então não *nego* este “mundo”, como se eu fosse sofista, *não duvido de sua existência*, como se fosse cético, mas efetuo a *εποχή* “fenomenológica”, que me impede totalmente de fazer *qualquer juízo sobre existência espaço-temporal*. (HUSSERL, 2006, p. 81, grifos do autor).

Se na orientação natural, conforme explicado anteriormente, a consciência é uma região que comporta um exterior e o objeto é considerado como um ser-em-si, na orientação fenomenológica, colocar entre parênteses tudo o que é abrangido por essa tese, significa isolar os pressupostos, as asserções sobre o objeto e sobre o sujeito, satisfazendo com isso “o ‘*princípio da ausência de pressupostos*’ (...) [aquele que] não pode querer dizer mais do que a rigorosa exclusão de todas as asserções que não possam ser completa e totalmente realizadas *fenomenologicamente*” (HUSSERL, 2012a, p. 17). O objeto será submetido à redução eidética e o sujeito à redução transcendental. Nesta nova orientação,

> O mundo, que se mostrava como um todo formado pelas partes consciência e objeto, vai revelar-se como sendo apenas uma parte de um todo formado pelas partes consciência e objeto, vai revelar-se como sendo uma parte de um todo inédito denominado “subjetividade transcendental”. (MOURA, 1989, p. 166).

Em suma, o princípio de ausência de pressupostos significa “a rigorosa exclusão de todas as asserções que não possam ser completa e totalmente realizadas *fenomenologicamente*” (HUSSERL, 2012a, p.17, grifo do autor). Essa *epoché* fenomenológica equivale àquela ampliação da *epoché* cartesiana, a qual Husserl fez reparos, conforme já discutimos neste trabalho, e que nos permite compreender a subjetividade transcendental.

A redução eidética, por sua vez, é aquela que coloca fora de ação o mundo natural e conduz à essência sobre “*o que é o ‘percebido como tal’, que momentos eidéticos ele abriga em si mesmo enquanto este noema de percepçã*o” (HUSSERL, 2006, p. 205, grifos do autor). Devemos, portanto, nos entregar puramente ao dado eidético, e “descrever fielmente, em perfeita evidência, ‘aquilo que aparece como tal’” (HUSSERL, 2006, p. 205) ou, de outro modo, “‘descrever a percepção em enfoque noemático’” (HUSSERL, 2006, p. 205). Essa descrição, restrita à esfera do fenômeno, no sentido de que ela deixa fora de circuito qualquer outra coisa que não seja pertinente a ele, é o que confere rigor à Fenomenologia: ela não faz pressuposições, não faz previsões, não estabelece relações de causa e consequência, mas atém-se aos modos de aparição do ser no fluxo dos vividos. O "percebido", o noema[24], não possui propriedades físico-químicas, aquelas oriundas das ciências naturais que são, por assim dizer, os conhecimentos indiretos, e, portanto, não entram na descrição fenomenológica. Esse caráter rigoroso, ou seja, a descrição pura, pode ser notado na fala de Husserl (2006):

> é preciso ter nitidamente diante dos olhos que o "percebido", enquanto sentido, não encerra nada em si (portanto, nada tampouco lhe pode ser imputado com base em "conhecimentos indiretos") além daquilo que, no caso dado, "aparece efetivamente" na aparição perceptiva, e aparece exatamente no modo, na maneira de se dar pelo qual justamente se tem consciência dele na percepção. Uma *reflexão de tipo próprio* sempre pode se dirigir a esse sentido imanente à percepção, e o juízo fenomenológico tem de se ajustar, em expressão fiel, somente àquilo que nela é apreendido. (p. 206, grifos do autor).

Além disso, o filósofo enfatiza a efetividade do fenômeno puro como base do método: "em toda a parte na fenomenologia, em vez de conferir uma interpretação àquilo que pode ser efetivamente visto no fenômeno, temos de ter coragem de tomá-lo justamente como ele se dá, descrevendo-o honestamente" (HUSSERL, 2006, p. 242). Fica evidente, então, em que consiste o rigor fenomenológico: a descrição que é fiel ao que se mostra, nos modos pelos quais o mostrar-se se dá.

A Fenomenologia concentra-se, desse modo, na região das ideias, das essências, não como "construtos psíquicos [, mas como] consciência que resulta (...) das essências [que não pode ser confundida] com essas essências mesmas" (HUSSERL, 2006, p. 138-139), ou seja, a consciência da essência não pode ser confundida com a essência mesma. Tomando a cor como exemplo, não se pode confundir a consciência que resulta da essência de cor com essa essência mesma percebida no objeto em que a cor se manifesta[25]. A consciência da cor, no sentido fenomenológico, é resultado de operações da consciência com base em intuições sensíveis. Por isso, não se deve confundir a consciência da cor com a essência de cor em-si:

> De um lado, estão essências de configuração da própria consciência [essências imanentes]; de outro, essências de eventos individuais transcendentes à consciência, ou seja, essências daquilo que apenas se "anuncia" nas configurações da consciência, aquilo que se constitui,

[24] A respeito das relações noético-noemáticas remetemos o leitor à página 45 deste trabalho.

[25] O poema de Fernando Pessoa, presente na epígrafe deste trabalho, sugere essa relação entre a consciência da essência e a essência mesma, que se dá na percepção: "A cor é que tem cor nas asas da borboleta".

> por exemplo, por aparições sensíveis na consciência. (HUSSERL, 2006, p. 139).

No desvelamento das essências, o método fenomenológico compreende algumas atitudes descritas por Husserl na seção “Considerações metodológicas preliminares” da obra *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica* (parágrafos 63 a 75) (2006, p.143-164). A primeira dessas atitudes é a autoexclusão. O pesquisador, para obter uma consciência “pura”, deve colocar fora de circuito todo o mundo natural, o que inclui ele mesmo: “prescrevemo-nos como fazendo parte do método, a norma de redução fenomenológica” (HUSSERL, 2006, p. 145). Como ser humano, sou posto fora de circuito, realizo a *epoché* transcendental, porque considerar o puro vivido como vivido humano seria o mesmo que introduzir no circuito tudo aquilo que não precisaria estar nele. Assim,

> Se (...) efetuo a *εποχή* fenomenológica, também o “eu, ser humano” é excluído de circuito, assim como todo o mundo da tese natural, restando então o puro vivido de ato com sua essência própria. Mas vejo também que a apreensão dele como vivido humano, abstraindo-se de toda tese de existência, introduz no circuito tudo aquilo que não precisa necessariamente estar nele. (HUSSERL, 2006, p. 182).

O adjetivo *puro*, do alemão *reine,* é empregado por Husserl quando se propõe a mencionar aquilo que não é circunstancial, contingente ou material, portanto, designa algo que não é factual. Neste sentido, se compreendermos o homem como um ser temporal, passageiro, como um sujeito psicofísico, devemos submetê-lo ao mesmo método de parentetização, aquele que coloca fora de circuito todo o mundo natural, logo, também o homem, com sua experiência concreta, deve ser neutralizado, já que pertence ao mundo. O homem material é apenas um suporte para o vivido, mas jamais remete ao puro vivido. Assim entendida, a redução fenomenológica tem o efeito de deixar fora de consideração o objeto suporte do vivido, para evidenciar o próprio vivido.

Para além dessa *epoché*, uma atitude fenomenológica requer, ainda, que os termos empregados sejam eles próprios afeitos a ela. Assim, esses termos devem ser usados com clareza, vale dizer, as designações “clareza” - ela própria -, a “evidência”, a “intuição”, a “imanência”, a "transcendência”, a “*epoché*”, entre outras, devem ser enunciadas no âmbito das reflexões fenomenológicas em consonância com a essência que esses conceitos têm na esfera

> do próprio domínio fenomenológico, e [na esfera] em que todas as análises reflexivas são análises fenomenológicas de essência, e que

> as evidências metodológicas alcançadas respectivamente às suas constatações estão sob normas que elas formulam [vale dizer] é preciso, portanto, poder sempre se convencer de que os estados de coisas expressos em enunciados fenomenológicos estão dados na mais completa clareza, de que os conceitos utilizados se ajustam real e fielmente ao dado. (HUSSERL, 2006, p. 146).

A descrição fenomenológica requer, portanto, que suas premissas residam “em proposições que satisfaçam à exigência de que aquilo que elas enunciam admita uma legitimação fenomenológica” (MOURA, 1989, p. 120-121) e, do mesmo modo que os conceitos fenomenológicos devem ser clarificados, assim também as fixações conceituais e terminológicas decorrentes de uma abordagem fenomenológica devem ser fiéis, claras, uma vez que na Fenomenologia, que pretende ser uma “doutrina eidética no interior da intuição pura, efetuamos, portanto, visões de essência imediatas em dados exemplares da consciência transcendental pura” (HUSSERL, 2006, p. 147). Isso porque, a “fenomenologia é então, com efeito, uma disciplina *puramente descritiva*, que investiga todo o campo da consciência transcendental pura *na intuição pura* “(HUSSERL, 2006, p. 136, grifos do autor). Deve-se, por isso, ter o cuidado de aplicar a “palavra fielmente ajustada à essência apreendida em intuição” (HUSSERL, 2006, p. 147). Dado que o rigor da Fenomenologia consiste em descrever o fenômeno puro, conforme ressaltamos em passagens anteriores, fica aqui evidente que os próprios termos empregados em tal descrição deve ser clarificados fenomenologicamente.

Se não podemos negar a importância metodológica desempenhada pela expressão, seguramente aquilo que deve ser por ela expresso, o vivido e o modo do vivido, são também de interesse fenomenológico. Sobre o vivido e o modo como ele se dá, Husserl exemplifica que “[s]e o olhar investigador se direciona para vividos [e se eles se oferecerem] em geral num *vazio* e numa *vaga distância”* (HUSSERL, 2006, p. 148, grifos do autor), então a essência do vazio e da vagueza surgem em plena clareza, ao contrário daquilo que é "vagamente trazido à consciência” (HUSSERL, 2006, p. 148) que apenas proporciona algo imperfeito. Embora a coisa como se dá possa ser clara ou obscura, o modo como ela se dá, claramente ou obscuramente, é sempre claro, daí a importância fenomenológica de investigar o modo de doação. O investigador deve interessar-se não pelo vazio e pela vaga distância com que se oferecem os vividos, mas pelo modo como se dão esses vividos e investigar “a própria essência do vazio e da vagueza, os quais, por seu turno, surgem aqui não vagamente como dados, mas na mais plena clareza” (HUSSERL, 2006, p. 148). Aquilo que deve ganhar a condição de dado pleno, sua apreensibilidade,

> [a]quilo que a cada vez se vislumbra numa obscuridade fugidia, em maior ou menor distância intuitiva, deve, pois, *ser trazido* à proximidade normal, *à perfeita clareza*, a fim de que a ele se apliquem valiosas intuições eidéticas correspondentes, nas quais as essências e relações de essências buscadas ganhem a condição de dado pleno. (HUSSERL, 2006, p. 148, grifos do autor).

É tarefa do investigador refletir sobre em que medida o grau de apreensibilidade do dado é claro ou obscuro, ou sobre o modo como são dados os vividos, num esforço de clarificação, vale dizer, num esforço de compreender não apenas o dado em carne e osso, mas o modo como ele se dá à apreensão, uma vez que “*[a]s diferenças nos graus de clareza são inteiramente específicas aos modos de doação*” (HUSSERL, 2006, p. 150, grifos do autor). A clarificação, especificamente, conceito que permeia a filosofia husserliana, “consiste (...) em dois processos que se vinculam um ao outro: nos *processos de tornar intuitivo* e nos processos de *intensificação da clareza do já intuído* (HUSSERL, 2006, p. 150, grifos do autor). Sob este aspecto, torna-se mais evidente o epíteto que se confere à Fenomenologia de teoria crítica do conhecimento, pois o investigador, para além do que quer investigar está sempre atento ao modo como o que se investiga mostra-se à investigação e ao próprio investigador no processo de investigar. Nas palavras de Moura (1989, p. 68, grifos do autor) esses dois processos são descritos como um “retorno à intuição (...) [e um processo] de *clarificação da própria intuição* (...) [que] indica a necessidade de trazer o objeto visado sempre a uma maior claridade, a uma completa *Selbstgegebenheit* [entrega, doação]”. A investigação é colocada como objeto de si mesma num processo paulatino de aproximação em que

> *aquilo que é dado a cada momento é as mais das vezes rodeado por um halo de determinabilidade indeterminada,* cujo modo de aproximação se faz “*por etapas”*, pela repartição em séries de representação: mais uma vez, primeiro na obscuridade e então de novo na esfera do dado, até que o intencionado entre no círculo de nítida luminosidade do dado perfeito. (HUSSERL, 2006, p. 151, grifos do autor).

Um aspecto complementar a esse modo de aproximação do investigador fenomenológico diz respeito à visão de essência, ao *eidos* e às maneiras sobre como se pode chegar a essa visão eidética. Acerca disso, Husserl afirma que “[o] *eidos*, a *essência pura*, pode exemplificar-se intuitivamente em dados de experiência, tais como percepção, recordação etc., mas igualmente *também em meros dados de imaginação"* (HUSSERL, 2006, p. 38, grifos do autor). Tanto quanto as intuições empíricas, as não empíricas, "*meramente imaginárias*" (HUSSERL, 2006, p. 38, grifos do autor), também "possibilita[m] apreensões e evidências eidéticas perfeitas" (HUSSERL, 2006, p. 152). Além disso, e em consonância com o tema desta pesquisa, próprio de uma ciência eidética, temos de considerar que as livres imaginações são essenciais em nossas investigações, superando as intuições empíricas: "Na fenomenologia, assim como em todas as ciências eidéticas, existem razões em virtude das quais as presentificações e, para ser mais exato, *as livres imaginações* conseguem *uma posição privilegiada em relação às percepções"* (HUSSERL, 2006, p. 153, grifos do autor). No caso do geômetra, por exemplo, nos seus desenhos "ele [o geômetra] fica atado, ao passo que na imaginação [,] ele tem a liberdade inigualável (...) de gerar um sem-número de novas construções (...) que lhe franqueia acesso às imensidões das possibilidades eidéticas" (HUSSERL, 2006, p. 153). Disto decorre que "a liberdade da investigação de essência (...) requer (...) que se opere na imaginação" (HUSSERL, 2006, p. 154).

Ainda a propósito do geômetra e da Geometria, Husserl reflete, sobre o seguinte problema: dado que a Geometria é uma ciência eidética assim como a Fenomenologia, é possível estabelecer uma analogia entre o método de ambas? A resposta abre caminho para a compreensão do método fenomenológico em contraste com o método tanto das ciências naturais quanto da Matemática, ciência eidética. A Fenomenologia transcendental é uma "ciência de essências descritiva [que] pertence (...) a uma *classe fundamental de ciências eidéticas totalmente diferente das ciências matemáticas*" (HUSSERL, 2006, p. 163, grifos do autor). Embora a Fenomenologia, puramente descritiva, tenha conexão com as ciências exatas, estas não podem solucionar "os problemas originais e legítimos da pura descrição" (HUSSERL, 2006, p. 161).

> A fenomenologia deixa de lado *apenas a individuação*, mas eleva todo o conteúdo eidético, na plenitude de sua concreção, à consciência eidética e o toma como essência ideal-idêntica, que, como toda essência, não poderia se individuar somente *hic et nunc*, mas em inúmeros exemplares. (HUSSERL, 2006, p. 161-162).

A Fenomenologia descreve, desse modo, as "*essências de vivido*" e seus momentos: o "âmbito de sua abrangência é constituído por *essências de vivido,* que não são abstratos, mas concretos (...) [e que] têm, como tais, diversos momentos abstratos" (HUSSERL, 2006, p. 158-159, grifos do autor). O termo "momento", presente nesta citação, não diz respeito a um intervalo de tempo, a uma duração temporal, por assim dizer, mas está ligado à questão da mereologia tal como tratada por Husserl, uma teoria que tece reflexões sobre as relações entre a parte e o todo dos objetos e que se formula como uma alternativa à teoria dos conjuntos, em que a relação de pertinência expressa por "é um elemento de" é substituída por "é uma parte de". Trata-se de uma reflexão lógico-filosófica que foi apresentada nas *Investigações Lógicas (2*012a), obra publicada em 1901, e permeia todo o desenvolvimento posterior da Fenomenologia.

De acordo com a mereologia, sendo a parte de uma entidade o que nela é dado e discernível, temos que considerar espécies dessas partes a saber, momentos e fragmentos: como exemplo de momentos, podemos considerar as extensões dos objetos, que aparecem com eles e não são destacáveis deles, pois são imputáveis como predicados que habitam, por assim dizer, essas entidades, "a modificação ou a supressão de pelo menos um dos conteúdos dados em conjunto com ele (mas não nele incluídos) teriam de modificá-los ou suprimi-los" (HUSSERL, 2012a, p. 194). Uma superfície vermelha é percebida de tal modo que a vermelhidão está enlaçada à extensão e, caso a extensão seja extinta, a vermelhidão da extensão também o será, ainda que a essência da cor permaneça como tal, o que vale dizer que, contrário ao senso comum, temos dois elementos, a cor e a extensão, e não um só, uma extensão colorida, mas por serem extensão e cor momentos de uma superfície, elas são indissociáveis. Já partes destacáveis dos objetos que lhes deixam intocados "por qualquer modificação ou supressão de todos os conteúdos que com eles coexistem" (HUSSERL, 2012a, p. 194) são fragmentos, como a folha de uma planta, por exemplo, que, destacada da planta, não tem uma dependência de suas características em relação a ela e, do mesmo modo, a folha permanece sendo folha, diferentemente de uma superfície vermelha em que a modificação de sua extensão modifica igualmente o vermelho da superfície enquanto tal. Há que se distinguir, portanto, nessas descrições das essências de vividos o que são momentos e fragmentos deles.

Essas essências de vividos são captadas no fluxo das vivências compreendido por Husserl como

> um fluxo do devir, ele é o que é pela *geração originária* de um tipo eidético inalterável: um fluxo constante de retenções e protensões mediado por uma fase ela mesma fluida da originariedade, na qual se

> toma consciência do agora vivo do vivido, em contraposição ao seu “antes” e ao seu “depois”. (HUSSERL, 2006, p. 172, grifos do autor).

Essa protensão imediata é um importante ponto do processo reflexivo, “a contrapartida exata da retenção imediata; a seguir, vem a recordação prospectiva, que, presentificando de maneira inteiramente outra, é *re*produtiva em sentido mais próprio, é contrapartida da *re*memoração” (HUSSERL, 2018, p. 169, grifos do autor). Isso significa que cada momento da experiência é reunido, que os respectivos horizontes experienciais reflexivos se fundem em uma síntese.

O vivido, enquanto fluxo de retenções e protensões, seria aquilo de que se tece nossa consciência, fenomenologicamente conceituada[26]. Além disso, “algo como consciência e conteúdo de consciência (...) só pode ser conhecido por reflexão” (HUSSERL, 2006, p. 179). A tarefa da Fenomenologia é, justamente, “investigar sistematicamente todas as modificações de vivido que estão sob a designação de reflexão, junto com todas as modificações com as quais estão em relação de essência e que as *pressupõem*” (HUSSERL, 2006, p. 172, grifos do autor). Desse modo, a Fenomenologia é descritiva, no sentido que Husserl dá a esse predicado, uma vez que o fenomenólogo procura descrever o fluxo dos vividos de modo próprio, ou seja, de modo a “dirigir o olhar para o perceber ou para as propriedades dos *modos* em que o percebido se dá (...) [para] tomar aquilo que se oferece na análise eidética imanente assim como ele se dá” (HUSSERL, 2006, p. 202, grifos do autor), noutras palavras, descrever a percepção em enfoque de sentido, enfoque noemático.

Convém relembrarmos, já que nos dedicaremos a conceituar as relações noético-noematicas[27], aquele acréscimo, já discutido neste trabalho, que Husserl faz ao *Ego cogito* cartesiano, ou seja, o *cogitatum*: “a percepção (...) tem (...) o *percebido como tal*. Da mesma maneira, cada recordação o seu *recordado como tal*”, e assim todos os atos, vale dizer, têm os correlatos noemáticos, como visados: “como [eles estão] contido[s] de maneira ‘imanente’ no vivido de percepção” (HUSSERL, 2006, p. 204, grifos do autor).

Quando se refere às relações noético-noemáticas implicadas nos atos de apreensão dos dados fenomenológicos, Husserl sugere que sob o solo das proposições lógicas, existe um solo fenomenológico do qual se deve partir para uma

[26] O conceito de consciência é central na Fenomenologia e foi tratado neste trabalho, mais especificamente, nas páginas 33 e seguintes.
[27] Em diversas partes deste trabalho, quando a parelha conceitual noese e noema for necessária para a compreensão do texto, remeteremos o leitor para este ponto.

crítica do conhecimento, um tema difícil de ser abordado e que está relacionado à constatação da crise das ciências europeias (ver seção 2 deste trabalho "A Fenomenologia no e do contexto da crise das ciências europeias"), uma vez que o método positivista de busca do conhecimento, prestigiado no tempo do filósofo, parte do solo superficial da lógica e, consequentemente, não se aprofunda nas camadas fenomenológicas da compreensão de como se dá esse conhecimento: "não é fácil (...) determinar em que medida há algo de efetivamente fenomenológico expresso nas proposições lógicas (...) e em quaisquer outras proposições" (HUSSERL, 2006, p. 201).

Conforme Husserl (2006), "o noema pleno consiste num complexo de momentos noemáticos, (...) [em que] o momento específico do sentido constitui somente uma espécie de *camada nuclear* necessária" (p. 207, grifo do autor). Trata-se, o noema, portanto, do aspecto objetivo da vivência, o objeto em seus modos de ser dado, constituído pela reflexão. Por exemplo, no ato de lembrar-se de "uma fruta saborosa vermelha", o noema compreende o complexo de predicados (saborosa e vermelha) e o modo de se dar do objeto de percepção (lembrado), que é a fruta. Esse aspecto substantivo, o *noema*, fundamenta-se por ação da *noesis*, o aspecto subjetivo da vivência, constituído por todos os atos de compreensão que visam a apreender os objetos: "[a]os múltiplos dados do conteúdo real, noético, corresponde uma multiplicidade de dados, mostráveis em intuição pura efetiva, num '*conteúdo noemático*' correlativo ou, resumidamente, no 'noema'" (HUSSERL, 2006, p. 203, grifo do autor). Em nosso exemplo, a *noesis*, o ato de lembrar, presentifica a percepção originária da fruta. Se estabelecermos uma analogia com a constituição das categorias linguísticas, poderíamos dizer que a *noesis* seria, por assim dizer, a parte verbal da vivência, a ação, que se substantiva no sentido, *noema*, e vice-versa já que se trata de uma correlação. Ampliando essa analogia com as categorias gramaticais, ainda há as circunstâncias e as qualidades do vivido que envolvem todo ato intencional, tornando-o único a cada ocorrência e que podem ser metaforizadas, neste esforço analógico, pelos advérbios e adjetivos da língua.

Na relação *noesis-noema*, própria do desvelar das essências, estão imbricados importantes ensinamentos fenomenológicos, alguns deles já tratados neste texto e que serão aqui recuperados, pois essa relação é ponto de convergência e, em certa medida, fundação da própria Fenomenologia. O difícil problema enunciado na sentença "toda consciência é consciência de algo", que compreende a noção de intencionalidade, começa a elucidar-se, por assim dizer, com o entendimento das estruturas noético-noemáticas. A denominação de estruturas, dada por Husserl no parágrafo 97 da obra *Ideias para uma fenomenologia pura* (2006, p. 223-226), carrega em si a indissociabilidade entre o noético e o noemático, inseparável da correlação transcendental entre o mundo e a subjetividade.

A designação "consciência de algo", tão presente nas reflexões fenomenológicas, estabelece que todo representar refere-se ao representado, todo julgar ao julgado, todo perceber ao percebido, todo *cogito* ao *cogitatum.* Tal designação revela a importância da *epoché*, porque somente em orientação apropriada, aquela decorrente de uma completa ausência de preconceitos e pressupostos, é que é possível desvelar os dados eidéticos próprios da relação perceber-percebido. A proposição expressa na sentença "o vivido intencional é consciência de algo" (HUSSERL, 2006, p. 203) menciona que é da essência desse vivido, vale dizer, vivido noético: "vivido intencional é justamente vivido noético" (HUSSERL, 2006, p. 203), guardar em si um "sentido (...) um '*conteúdo noemático*' correlativo, ou resumidamente, [um] noema" (HUSSERL, 2006, p. 203, grifos do autor). O perceber (noesis) tem o seu percebido como tal (noema).

Em orientação fenomenológica, aquela decorrente da *epoché*, o mundo transcendente é posto fora de circuito, revelando-se assim tudo o que "é peculiar ao vivido, de maneira puramente imanente e reduzida" (HUSSERL, 2006, p. 206). É por isso que na "orientação eidética (...) [o que é peculiar ao vivido] está separado de toda natureza e de toda física (...) por abismos" (HUSSERL, 2006, p. 206). Nisso reside o significado da *epoché*: ao pôr o mundo entre parênteses, nos libertamos de tudo aquilo que pode contaminar a descrição eidética pura. O noema, por não ter propriedades físicas, por estar separado delas de modo abissal, não se deixa descrever por nenhuma propriedade físico-química,

> é preciso ter nitidamente diante dos olhos que o "percebido" (...) não encerra nada em si (portanto, nada tampouco lhe pode ser imputado com base em "conhecimentos indiretos") além daquilo que, no caso dado, "aparece efetivamente" na aparição perceptiva, e aparece efetivamente no modo, na maneira de se dar pela qual justamente se tem consciência dele na percepção. (HUSSERL, 2006, p. 206).

Ao descrever a percepção de uma árvore, Husserl diz que "o sentido [noema] desta percepção (...) não pode pegar fogo, não possui elementos químicos, nem força, nem qualidades reais" (HUSSERL, 2006, p. 206), disso decorre a necessidade da parentetização do mundo, a necessidade de isolar aquele conhecimento natural, que não elucida os dados eidéticos e, com isso voltar-se às essências.

A elucidação da possibilidade do conhecimento reside, por sua vez, não só na compreensão da estrutura noético-noemática, de que tratamos aqui, mas também nos conceitos de imanência e transcendência[28] os quais Husserl reformula distanciando-os da compreensão que se tem deles na atitude natural, aquela em que os objetos intencionais são "ou realmente imanentes, ou realmente transcendentes à consciência, ou 'interiores' ou 'exteriores' à subjetividade" (MOURA, 1989, p. 183). Nas palavras de Husserl, esse modo compreender é próprio de principiantes: "o imanente, dirá aqui o principiante, está em mim; o transcendente, fora de mim. (HUSSERL, 1989, p. 24).

Se nas ciências naturais a dúvida põe-se como ponto de partida, como base das *cogitationes*, essa dúvida, nelas, não ultrapassa ou não incide sobre aquilo que essa mesma atitude natural entende a respeito do "conhecimento intuitivo da *cogitatio*" (HUSSERL, 1989, p. 23) como imanente, mas incide sobre o que ela, a atitude natural, considera transcendente: o conhecimento das ciências objetivas. Ora, essa "principiante" oposição entre os campos da imanência e da transcendência é problematizada por Husserl. O que efetivamente pode ser compreendido como imanência real (*reell*) e em que medida ela contrapõe-se à transcendência? A revisão dessa parelha de conceitos abrirá caminho para a atitude fenomenológica desvelar o sentido, o noema.

Husserl chama atenção para duas categorias da imanência: "*a imanência inclusa* [também denominada pelo filósofo de imanência real e referida em traduções como imanência ingrediente] *e a imanência no sentido do dado em si mesma que se constitui na evidência*" (HUSSERL, 1989, p. 24, grifos do autor). A primeira corresponde àquela que é "indubitável justamente porque nada mais exibe, nada mais intenta para lá de si mesmo porque aqui o que é intentado está também autodado de modo completo e inteiramente adequado" (HUSSERL, 1989, p. 24). Para Husserl "[a] existência da *cogitatio* é garantida pelo seu absoluto *dar-se em si mesma*, pelo seu caráter de dado na *pura evidência* "(HUSSERL, 1989, p. 28). Se a *cogitatio* é inquestionável, então toda evidência pura, mesmo que não se constitua uma imanência real, tem o mesmo direito à indubitabilidade. A existência de outras

[28] Esta parelha conceitual, imanência e transcedência, foi tratada em outros pontos do trabalho em que remetemos o leitor para cá.

evidências puras, que não a própria *cogitatio*, torna o "privilégio que o 'principiante' atribuía à imanência real (...) infundado" (MOURA, 1989, p. 185). Disto decorre a distinção husserliana entre as duas imanências citadas: entre a inclusa e a no sentido do dado em si mesmo. Desse modo, amplia-se o conceito de imanência: a imanência real é um caso particular da imanência autêntica: "a *imanência ingrediente* (...) é apenas um caso especial do *mais amplo conceito de imanência em geral*" (HUSSERL, 1989, p. 28, grifos do autor). Já o transcendente, para Husserl, não é o que está fora de mim, como no sentido "empírico-psicológico" (HUSSERL, 1989, p. 29), mas tudo que não me é dado na pura evidência: "tudo o que não é dado evidente no sentido genuíno, dado absoluto do ver puro" (HUSSERL, 1989, p. 29)[29].

Se por um lado, portanto, a atitude natural considera a oposição entre interior e exterior, a atitude fenomenológica irá falar de uma transcendência na imanência, ou seja, que os objetos intencionais serão simultaneamente imanentes e transcendentes à consciência: "imanentes enquanto não são realmente separados e exteriores a ela; transcendentes enquanto polos de identidade" (MOURA, 1989, p. 188). Os objetos não são realmente separados da consciência, uma vez que, conforme destacamos[30], a consciência não é uma região apartada do mundo e que comporta em si um exterior a ela. Os objetos dão-se por perfis, numa multiplicidade de aparições, uma multiplicidade noemática, porém, por ser a consciência uma consciência de algo, os objetos não se distinguem de uma multiplicidade noética, tais como o perceber, o ver, o recordar, entre outros, atos constituintes da multiplicidade da imanência real.

A atitude natural conserva uma concepção dogmática de objeto segundo a qual "os objetos são em-si, independentes da percepção, independentes de seus fenômenos" (MOURA, 1989, p. 164-165) e isso equivale "a decodificar o objeto como um conteúdo positivo, pensável como estando além de sua manifestação, como um conteúdo pensável independente de uma perspectiva, de um ponto de vista" (MOURA, 1989, p. 165), portanto transcendente. Já a atitude fenomenológica considera o mundo natural como correlato da consciência:

> Se pudermos (...) submeter a uma consideração eidética os tipos de vividos empíricos e, em especial, o vivido fundamental da percepção

[29] Neste ponto, podemos vislumbrar os caminhos para responder à questão fulcral sobre o conhecimento proposta por Husserl e que discutimos na página 31 deste trabalho: "Como pode o fenômeno puro do conhecimento atingir algo que lhe não é imanente, como pode o conhecimento atingir algo que não se dá em si absolutamente? E como pode compreender-se esse atingir?" (HUSSERL, 1989, p. 27).

[30] Fizemos isso, mais especificamente, nas páginas 33 e seguintes deste trabalho.

> de coisa, se pudermos enxergar suas necessidades e possibilidades eidéticas (...) e, por conseguinte, também seguir eideticamente as mudanças possíveis por essência dos nexos empíricos motivados, então o correlato de nossa experiencia fática, chamado "*mundo real", resultará como caso especial dos diversos mundos e não mundos possíveis*, os quais, por sua vez, nada mais são que correlatos de mudanças por essência possíveis da ideia de "experiência na forma de consciência", com nexos de experiências mais ou menos ordenados. (HUSSERL, 2006, p. 112, grifos do autor).

É a experiência na forma de consciência que constitui o sentido das coisas do mundo e, "uma vez que se trata de coisas fáticas, ela [a experiência] o prescreve como experiência atual em seus nexos empíricos de ordenação determinada" (HUSSERL, 2006, p. 112), vale dizer, o sentido das coisas é dado para o sujeito por meio da apreensão de perfis: "Uma única e mesma forma (dada corporalmente *como* a mesma forma) aparece sempre continuamente 'de outra maneira', em sempre outros perfis de forma" (HUSSERL, 2006, p. 98, grifo do autor) ou, dito de outro modo, "[p]ercebemos a coisa porque ela 'se perfila' em todas aquelas determinidades que, a cada caso, 'entram efetivamente' e propriamente na percepção" (HUSSERL, 2006, p. 101).

Essa consciência, que constitui o sentido do mundo, é intencional, ela será "o campo de uma nova ciência - a fenomenologia", nas palavras do próprio Husserl (2006, p. 84), e que "*tem em si mesma um ser próprio, o qual não é atingido em sua essência própria absoluta pela exclusão fenomenológica*" (HUSSERL, 2006, p. 84, grifos do autor). O atingir a consciência não quer aqui dizer alcançá-la, mas sim que a própria consciência não será posta entre parênteses pela redução fenomenológica e que ela restará como "resíduo" soberano dessa operação: "a consciência não é uma parte ou região de um todo mais amplo, mas é ela mesma um todo que é absoluto, não-dependente, e que não tem nada fora de si" (MOURA, 1989, p. 170). Dito de outro modo:

> todo o *mundo espaço-temporal*, no qual o homem e o eu humano se incluem como realidades individuais subordinadas, é, *segundo seu sentido, mero ser intencional,* portanto, tal que tem o sentido meramente secundário, relativo, de um ser *para* a consciência. Ele é um ser de que a consciência põe a existência em suas experiências, que por princípio só é intuível e determinável como o idêntico de multiplicidades de aparições motivadas de modo coerente – mas, *além disso*, um nada. (HUSSERL, 2006, p. 116, grifos do autor).

Na orientação fenomenológica, como descrevemos, o olhar é dirigido aos fenômenos que mostram aspectos dos objetos (do fenomenal) que se doam às possibilidades de o sujeito sentir o que está se mostrando. Isto quer dizer que neste modo de sentir/perceber/acolher a doação, que advém do fenomenal, o sujeito sente as ações que são desencadeadas no seu corpo-vivente. Desse aspecto decorre a percepção dos fenômenos, a qualidade de serem as doações dos objetos sempre reportadas a um ponto de vista, por princípio, unilateral e variável, que é o do corpo-vivente. Daqui podemos vislumbrar aquele ponto em que o filósofo tece considerações a respeito d'*A crise das ciências europeias*... (HUSSERL, 2012), justamente por conta de as ciências europeias, em seu tempo, fundamentarem-se na atitude natural, nas pretensões de exatidão, neutralidade e objetividade dos métodos das ciências de fato, prestigiadas naquele período.

É sempre pertinente acentuar que as ideias husserlianas e seus conceitos intercomunicantes, dada a sua complexidade, não são possíveis de serem esquematizados sem que se lhes tire o rigor que suas compreensões exigem. Sendo assim, muitos deles reaparecem quando outros são evocados. Além disso, outros tantos foram redimensionados ou ressignificados ao longo do desenvolvimento do pensamento do filósofo, de modo que aquilo que pode parecer repetição é, na verdade, provocado pela necessidade de rearticulação desses conceitos em face de seus correlatos e da função que exercem no método fenomenológico, aliás, ainda em construção. Tendo abordado, nesta seção, algumas questões nucleares da Fenomenologia, no próximo, teceremos algumas considerações sobre o contexto da crise das ciências europeias bem como sobre a presença da Álgebra na matematização da natureza. Para essas ponderações, recorreremos a conceitos presentes na exposição da Fenomenologia husserliana desenvolvida nesta seção.

## 2. A FENOMENOLOGIA NO E DO CONTEXTO DA CRISE DAS CIÊNCIAS EUROPEIAS

Nesta seção, iremos nos voltar para as ideias de Husserl acerca da crise das ciências europeias, sobre a Filosofia da Matemática e sobre o problema da passagem do pensamento pré-científico para a idealização matemática do mundo. Além disso, vamos analisar, em nossas investigações, a função preponderante que a Álgebra tem, como uma linguagem expressiva das idealidades que é, de potencializar, quando excessivamente instrumentalizada, esse aspecto do desenvolvimento científico, apontado por Husserl, que afastou as investigações do sujeito do conhecimento do mundo-da-vida. Estas considerações têm como objetivo fundamentar uma posterior leitura da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mais especificamente investigar o modo como ela trata o pensamento algébrico, sobre o qual pretendemos expor uma reflexão de uma perspectiva fenomenológica.

As ideias expostas nesta seção decorrem dos estudos que realizamos ao analisar a obra *A Crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental* (2012), escrita por Husserl em 1936. Permeada por uma crítica aos modos empregados para se chegar ao conhecimento de seu tempo, essa é a obra em que Husserl toma um posicionamento sobre a História e a historicidade da Filosofia e também desenvolve importantes conceitos tais como mundo-da-vida[31] (*Lebenswelt*), “entendido como o horizonte pré-científico de sentido prévio a toda e qualquer idealização científica (...) [o] mundo da *doxa*, relativo aos propósitos e fins humanos, da intuição sensível não ‘subtraída por construções idealizadas’” (ALVES, 2012, p. XV). Este solo pré-científico surge como *a priori* histórico, fundamento de todas as ciências, da Filosofia às ciências naturais, compreendendo também a Lógica e a Matemática: “[o] saber do mundo científico-objetivo ‘fundamenta-se’ na evidência do mundo-da-vida” (HUSSERL, 2012, p. 106). Para contextualizar essa crise, Husserl clarifica a noção de ciência, árvore cujo tronco é a Filosofia, e esclarece que a Lógica e a Matemática, chamadas para fundamentar as ciências contemporâneas a ele, elas próprias não estavam fundamentadas, fundamentação que só a Filosofia, por meio de uma atitude fenomenológica, seria capaz de prover. Este movimento husserliano de

[31] Um estudo detalhado sobre o tema *mundo-da-vida* pode ser encontrado em Bicudo (2016).

fundamentar a Lógica e a Matemática será retomado na seção 6 deste trabalho: “A Álgebra na perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”.

A crise da humanidade europeia e seus reflexos na crise das ciências reside, conforme entendemos a partir das leituras das obras husserlianas, em alguns equívocos cometidos pelos cientistas que o antecederam. O primeiro deles residiu na compreensão da natureza como uma unidade fechada em-si, independente de toda a subjetividade, natureza que foi matematizada como fez Galileu, a partir da Geometria euclidiana, processo que será descrito mais adiante. Um segundo equívoco foi alicerçar as Ciências do Espírito nas Ciências da Natureza, usar os métodos destas para estudar aquelas, pois “nunca (...) existirá jamais uma ciência objetiva do espírito, uma doutrina objetiva da alma” (HUSSERL, 2012b, p. 150), porque o conhecimento da natureza “é um produto do espírito que [a] investiga (...) e pressupõe, portanto, a Ciência do Espírito” (HUSSERL, 2012b, p. 151). Disso decorre que cabem às ciências do espírito a fundamentação do conhecimento das ciências da natureza, e não o contrário, uma vez que o mundo circundante, mundo-da-vida, solo de toda fundamentação do conhecimento é, em última instância, um entrelaçamento histórico-cultural. Desse modo, o mundo circundante “é um conceito que tem o seu lugar exclusivo na esfera espiritual (...) é uma formação espiritual em nós e na nossa vida histórica” (HUSSERL, 2012b, p. 119). Revela-se, assim, a primazia do espírito e de suas ciências sobre a natureza e suas ciências. A falta dessa compreensão implica que:

> o investigador da natureza não torna para si próprio claro que o fundamento constante de seu trabalho de pensamento – ao fim e ao cabo, um trabalho subjetivo - é o mundo circundante da vida, [não torna claro para si próprio] que este é constantemente pressuposto como solo, como esse campo de trabalho unicamente pelo qual têm sentido as suas perguntas e os seus métodos de pensamento. (HUSSERL, 2012b, p. 148).

Ao compreender o primado das ciências do espírito sobre as da natureza, o investigador da natureza deveria abandonar uma concepção dualista do mundo que conecta espírito e natureza por meras relações de causalidade. Essas relações não se justificam, uma vez que o espírito é independente: “*O espírito e só mesmo o espírito é em si próprio e para si próprio um ser, é independente e pode, nesta independência e apenas nela, ser tratado de modo verdadeiramente racional, de modo verdadeiramente científico*” (HUSSERL, 2012b, p. 151, grifos do autor). A natureza, por sua vez, é produto do espírito:

> na sua verdade científico-natural, ela só aparentemente é independente e só aparentemente pode ser levada, por si, ao conhecimento racional das ciências naturais. Porque a natureza verdadeira no seu sentido, no sentido científico-natural, é produto do espírito que investiga a natureza e pressupõe, portanto, a ciência do espírito. (HUSSERL, 2012b, p. 151).

Husserl, no início do século XX, em face do predomínio do Positivismo e da atitude natural equivocadamente objetivista, critica o método científico-natural por sua pretensão em revelar os segredos do espírito, tratando-o como coisa corporificada "objetivamente no mundo e, enquanto tal, fundado na corporalidade" (HUSSERL, 2012b, p. 146). Além disso, critica esse mesmo método também por sua pretensão em usufruir dos "resultados portentosos do conhecimento da natureza" (HUSSERL, 2012b, p. 146). O adjetivo "portentoso", no discurso do filósofo, enfatiza essas pretensões positivistas que negavam, assim, por meio daquela concepção dualista que aparta espírito e natureza, a soberania das ciências do espírito e da filosofia em relação às da natureza. Para superar essa concepção dualista, Husserl procurou reabilitar o pensamento filosófico que, segundo ele, fora preterido a partir do século XV, pois aquela filosofia do Renascimento, que num primeiro momento buscara o ideal de universalidade, havia sido colocada em segundo plano pelo método do desenvolvimento científico ao longo da história, fato que estaria na base da crise da humanidade europeia e, consequentemente, das ciências europeias.

No contexto da crise aqui examinada, Husserl entende que "a Europa [não deve ser] compreendida geográfica ou cartograficamente, como se fosse delimitado, enquanto humanidade europeia, o círculo dos homens que aqui vivem territorialmente em conjunto" (HUSSERL, 2012b, p. 120). O que está tematizado na fala do filósofo é o *eidos* Europa, uma conceitualização de Europa: "trata-se (...), manifestamente, da unidade de uma vida, de um agir, de um criar espirituais" (HUSSERL, 2012b, p. 120) guiados por uma filosofia que "[e]m uma humanidade europeia, (...) tem constantemente de exercer a sua função, enquanto arconte de toda a humanidade" (HUSSERL, 2012b, p. 140).

Dada sua formação matemática, parte desta tarefa do filósofo alemão foi inspirada na Geometria, quando voltou seu olhar para uma investigação do pensamento pré-científico, da paulatina idealização a partir da construção das idealidades euclidianas e da expansão dessas idealidades para a matematização da natureza empreendida por Galileu.

Nessa visada, empreendida por Husserl, sobre as ciências de seu tempo, ele compreendeu a crise delas como expressão da crise radical da vida da humanidade europeia. Essa compreensão foi fruto de reflexões construídas a partir da constatação de que a filosofia estava ameaçada de sucumbir “ao ceticismo, ao irracionalismo e ao misticismo” (HUSSERL, 2012, p. 1). A primazia dada pelo Positivismo às ciências de fatos é apontada por Husserl como algo que estreitou o conceito de ciências:

> O conceito positivista de ciência, no nosso tempo, é, então, -considerado historicamente -, um *conceito residual*. Ele deixou cair todas as questões que se tinham incluído nos conceitos, ora estritos, ora alargados, da metafísica, entre as quais todas as questões que, de um modo pouco claro, são chamadas de “questões supremas e últimas”. (HUSSERL, 2012, p. 5, grifos do autor).

Em certo sentido, um olhar metafísico devolveria à ciência justamente aquilo que ela perdera e por isso tornara-se residual. Restituir esse olhar ascenderia a ciência ao campo de uma investigação verdadeira, de modo que ela deixaria de se preocupar excessivamente com o mundo fático e se voltaria às questões relativas ao absoluto, em última instância, recolocaria o homem, o ser racional, como problema da filosofia, grosso modo, devolveria o homem ao universo das ciências que nasceram dele e que, por assim dizer, expulsaram-no dela. Nesse processo, teríamos resgatados como fundamentais

> *os problemas da razão* - da razão em todas as suas figuras particulares. Ela é explicitamente o tema nas disciplinas do conhecimento (a saber, do conhecimento verdadeiro e genuíno, do conhecimento racional), do valor verdadeiro e genuíno (dos valores genuínos enquanto valores da razão), da ação ética (do agir verdadeiramente bom, o agir a partir da razão prática); a razão é, assim, um título para ideias e ideais “absolutos”, “eternos”, “supratemporais”, válidos “incondicionalmente”. Se o homem se torna um problema “metafísico”, um problema especificamente filosófico, ele está em questão como ser racional; e, se a sua história está em questão, é porque se trata do “sentido” da razão na história. (HUSSERL, 2012, p. 5-6, grifo do autor).

A compreensão dos problemas da razão como “ideias e ideais, absolutos e eternos”, requer que eles sejam investigados tal como se investigam as idealidades inerentes aos objetos matemáticos, a exemplo das multiplicidades, ontologias que são a base das estruturas algébricas, tema que trataremos neste trabalho. Os problemas da razão devem ser entendidos, portanto, em sua universalidade e não em suas facticidades. Por não fazer isso, a ideia positivista de ciência reduzida a uma mera ciência de fatos implicava a crise da ciência e a consequente perda da sua significação para a vida, uma vez que “[m]eras ciências de fatos fazem meros homens de fatos” (HUSSERL, 2012, p. 3). Decorre dessas reflexões o seguinte problema: se, de acordo com a visão positivista de ciência,

> a verdade científica, objetiva, é exclusivamente a verificação daquilo que o mundo, de fato, é, tanto o mundo físico como o espiritual [então como] pode o mundo, e a existência humana nele, ter na verdade um sentido, se as ciências só admitem como verdadeiro aquilo que é deste modo objetivamente verificável (...)? (HUSSERL, 2012, p. 3-4).

Husserl argumenta que “[n]em sempre as questões específicas da humanidade estiveram banidas do domínio da ciência” (HUSSERL, 2012, p. 4) como estavam no século XX por causa da prática positivista, cujo conceito de objetividade centrava-se na observação e experimentação de objetos fáticos. A compreensão de como se deu o afastamento do mundo-da-vida (*Lebenswelt*) empreendido pelas ciências dos fatos foi um dos objetivos do filósofo alemão. Por mundo-da-vida podemos compreender o “único mundo efetivo, o que é efetivamente devido à medida da percepção, do único mundo alguma vez experienciado e experienciável - o nosso mundo-da-vida cotidiano” (HUSSERL, 2012, p. 38), aquele que é “o mundo circundante humano [que] é essencialmente o mesmo hoje e sempre” (HUSSERL, 2012, p. 314). Esse mundo, na visão positivista da ciência, fora abandonado pelas construções lógicas que se encadearam umas às outras gerando verdades formais matematizadas, distanciadas do objeto primeiro que ficou esquecido no mundo-da-vida, mascarado pela “roupagem das ideias [que] faz com que tomemos pelo *verdadeiro ser* aquilo que é um *método”* (HUSSEL, 2012, p. 41, grifos do autor). É essa matematização da natureza que Husserl historiciza como uma tendência que se firmou depois do Renascimento ou como desdobramento dele, movimento que, inicialmente, fora voltado para o mundo-da-vida.

O primeiro momento renascentista foi descrito por Husserl como aquele em que o homem europeu se voltara para a Antiguidade Clássica, para a humanidade antiga. A apreensão essencial que se adquiriu daquele homem antigo foi a “forma de existir ‘filosófica’: o dar-se livremente a si mesmo, a toda a sua vida, as suas regras, a partir da razão pura, a partir da filosofia” (HUSSERL, 2012, p. 4). O homem do Renascimento, guiado pelo ideal clássico, buscava operar uma observação do mundo refletida e livre dos vínculos míticos e da tradição, livre de pressupostos e buscava reconhecer no próprio mundo “a razão e [a] teleologia que nele residem” (HUSSERL, 2012, p. 4). Logo, naquele momento, a Filosofia foi libertadora para o homem recémsaído da Idade Média, porque foi pautada numa razão livre. A Filosofia adquiriu, no Renascimento, "o sentido de uma ciência *omni-englobante*, a ciência da totalidade do ente" (HUSSERL, 2012, p. 5, grifo do autor). Esse status atribuído à Filosofia como forma de conhecimento significa que "todas as ciências que serão um dia fundadas e todas as que já estão trabalhando, são apenas ramos não autônomos da filosofia una" (HUSSERL, 2012, p. 5). A ideia do Renascimento comportava, portanto, a busca da unidade de um sistema teórico que fosse uma

> construção única de verdades definitivas, ligadas teoricamente, que continua[ria] a crescer infinitamente de geração em geração, [e que] devia assim responder a todos os problemas que se pudessem pensar – problemas de fatos ou problemas da razão, problemas da temporalidade ou da eternidade. (HUSSERL, 2012, p. 5).

Husserl aponta, no entanto, que, não obstante a intenção unificadora daquele projeto renascentista, em seu tempo nos séculos XIX e XX, o ideal de uma filosofia una perdera-se. As questões metafísicas, para Husserl, passaram a ser consideradas pelo discurso usual como questões filosóficas e, portanto, foram alijadas do conceito de ciência, o qual acabou tornando-se aquele "conceito residual", já discutido nesta seção. Desse processo histórico resulta o Positivismo que, "por assim dizer, decapita a filosofia" (HUSSERL, 2012, p. 6).

A dissolução interna do ideal de filosofia universal do Renascimento, ao longo do tempo, fez com que o pensamento metafísico fosse relegado a um segundo plano enquanto "as ciências positivas (...) estavam aí desde logo como inatacáveis" (HUSSERL, 2012, p. 8). Ocorreu, contudo, que *"o problema do ideal genuíno* de uma filosofia universal e do seu método genuíno" (HUSSERL, 2012, p. 8, grifos do autor) ampliou-se a ponto de tornar-se o problema das ciências em geral, isto porque, a Filosofia e as ciências podem ser metaforicamente entendidas como uma árvore, em que a própria Filosofia é o tronco e cujos ramos são as demais ciências, de modo que a crise daquela, o tronco, irradiou-se para estas, os ramos. Nas palavras de Husserl, essa crise foi "sentida de um modo cada vez mais enigmático (...) [haja vista que todas as ciências] foram fundadas como ramos da filosofia e que continuaram depois a transportar em si [esse problema do alijamento da Filosofia da esfera do conhecimento científico]" (HUSSERL, 2012, p. 8).

Essa crise, ainda que não tenha atingido as ciências especializadas em seus resultados práticos, atingiu todo o sentido de verdade delas. Uma vez que aquela nova Filosofia do Renascimento, que fora o ponto de contraste entre a nova humanidade europeia e a humanidade medieval, entrou em dissolução interna, o filósofo conclui que “a crise da filosofia significa a crise de todas as ciências modernas enquanto elos da universalidade filosófica” (HUSSERL, 2012, p. 9). O ceticismo em relação a uma Filosofia universal fez cair a crença na razão que engloba não apenas as questões fáticas, mas também “a crença no sentido da história, no sentido da humanidade, na sua liberdade, nomeadamente como a capacidade de o homem prover à sua existência humana individual e geral um sentido racional” (HUSSERL, 2012, p. 9, grifo do autor).

A Filosofia autêntica, assim compreendida por Husserl, vive uma luta "contra o ceticismo que [a] nega ou empiricamente [a] desvaloriza” (HUSSERL, 2012, p. 9), porque “o ceticismo faz incessantemente valer o mundo de fato vivenciado, o mundo da experiência efetiva, como algo onde não se pode encontrar nada da razão e das suas ideias” (HUSSERL, 2012, p. 9). Enfim, ceticismo e empirismo, paradoxalmente, contribuem para o distanciamento que o cientista conserva em relação ao mundo-da-vida, uma vez que não procura nele as essências, mas tende a partir de pressupostos que podem relegar a experiência efetiva a um segundo plano.

Nesse processo de contraposição e transição entre os domínios da subjetividade e da objetividade, que viria a prevalecer na visão positiva de ciência, Husserl atribui um protagonismo à matematização da natureza empreendida por Galileu Galilei (1564-1642). Problematizar o sentido dessa matematização é refletir sobre a Filosofia da Matemática e é por isso que reconstruiremos esse processo fazendo uma leitura do explicitado por Husserl, quando buscou religar a compreensão filosófico-matemática ao mundo-da-vida. Retomamos, com essa exposição, aquele objetivo anunciado no início desta seção, de estabelecer um paralelo entre como a BNCC concebe o pensamento algébrico e como se poderia pensar a Álgebra no âmbito da Fenomenologia. Iremos mostrar que a BNCC assume uma perspectiva processual, algorítmica, por assim dizer, que essa abordagem, excessivamente vinculada a uma atitude tecnicista, não foi proveniente de uma ruptura abrupta, mas é produto de um processo histórico que Husserl identifica já em Galileu. Por isso, antes de nos centrarmos na BNCC, faremos a exposição de como o filósofo alemão, tomando como exemplo o pensador italiano, percorreu o desenvolvimento do pensamento pré-científico em direção à matematização do mundo.

### 2.1. Do pensamento pré-científico à matematização empreendida por Galileu

Husserl interpretou a matematização galilaica da natureza como um exemplo dos problemas mais profundos de significado da ciência e da história da ciência em geral e também como exemplo de problemas de uma história universal em geral, embora não tenha imputado ao filósofo italiano a responsabilidade pelo que se seguiu às suas ideias. Ao fazer isso, "*na matematização galilaica da natureza*, (...) [a] natureza que é idealizada sob a orientação da nova matemática (...) torna-se - em tempos modernos - também uma multiplicidade matemática" (HUSSERL, 2012, p. 17, grifos do autor). Podemos entrever, nas considerações de Husserl, certa compreensão das motivações de Galileu e também de quem não distingue idealidades de realidades:

> O intercâmbio entre teoria apriorística e empiria nos é tão familiar que estamos habitualmente inclinados a não distinguir o espaço e as figuras espaciais, de que a geometria fala, do espaço e das figuras do espaço na efetividade da experiência, como se elas fossem o mesmo. (HUSSERL, 2012, p. 17).

Essa autorreflexão sobre a situação filosófica de seu tempo é o modo husserliano de compreender a trajetória que conduziu ao método de matematização da natureza, a qual desaguou na crise das ciências europeias, uma vez que esta crise é reflexo do hiato entre as ciências e o mundo-da-vida, da perda de sentido, da não distinção entre idealidade e realidade. Em vez de buscar o sentido da natureza na própria natureza, o pesquisador vai buscá-lo no método, nas fórmulas e sucumbe à "tentação de nessas fórmulas e no seu sentido como fórmulas apreender o verdadeiro ser da própria natureza" (HUSSERL, 2012, p. 34). Assim, "[e]ste '*sentido como fórmulas'* carece agora de um melhor esclarecimento, em especial no que se refere à *perda de sentido* que se dá inevitavelmente com a formação e exercício artificial dos métodos" (HUSSERL, 2012, p. 34, grifos do autor). Em síntese, as reflexões de Husserl questionam os métodos de conhecimento, não historicamente, mas em seu sentido originário, a partir do mundo pré-científico.

Retomando Galileu, compreendemos a perspectiva husserliana quando o pensador italiano concebe que:

> A filosofia é escrita em um grandíssimo livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os

> caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto. (GALILEI, 1997, p. 16-17, tradução nossa)[32].

Quando o pensador italiano afirma que para conhecer o universo deve-se antes conhecer a língua e os símbolos nos quais ele estaria escrito naquele que, por analogia, chama de “grandíssimo livro”, pressupõe que a representação simbólica do universo, para o cognoscente, poderia dar acesso ao conhecimento sobre o próprio universo. Ora, a linguagem expressa o que se diz do mundo e um dos meios de expressar é a representação simbólica; o símbolo é a mediação entre o ser e o mundo, que, no caso da exposição mencionada, está dizendo do universo, logo o símbolo não é nem o ser nem o mundo, não pode se confundir com o mundo. A divergência que se estabelece aqui e que é objeto da crítica husserliana está no fato de o filósofo alemão propor que o conhecimento pré-categorial do mundo-da-vida deve preceder a sua representação simbólica e que esse conhecimento não estaria nessa representação ou em seus métodos de representar, mas no próprio mundo-da-vida:

> A roupagem de ideias da “matemática e ciência matemática da natureza”, ou a *roupagem dos símbolos*, das teorias simbólico-matemáticas, abrange tudo aquilo que, para os cientistas, assim como para os homens instruídos, *substitui* o mundo-da-vida e o *mascara*, como a natureza “objetivamente efetiva e verdadeira”. (HUSSERL, 2012, p. 41, grifos do autor).

Ao dar a primazia à Matemática, o pensamento de Galileu afasta o sujeito do mundo-da-vida e o conduz a um mundo de idealidades que, na visão de Husserl, não conserva uma correspondência biunívoca com o conhecimento constituído no mundo-da-vida, não podendo representá-lo, portanto, em sua totalidade, isso porque a

> mais perfeita geometria (...) não [pode] (...) trazer justamente à expressão (...) aquilo que [se] exprime de maneira simples, compreensível e plenamente adequado (...) conceitos que são *essencialmente e não casualmente inexatos* e, por isso, também não matemáticos. (HUSSERL, 2006, 160-161, grifos do autor).

A Matemática trata das formas que, por sua natureza, comportam idealidades, mas não trata da matéria, que é o substrato sensível da vida terrena, e que não pode

---

[32] La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto. (GALILEI, 1997, p. 16-17).

ser idealizada: não há no mundo cotidiano formas perfeitas[33] como aquelas concebidas pelas idealidades matemáticas no âmbito da Geometria euclidiana, por exemplo: a circunferência perfeita, aquela em que todos os pontos são equidistantes do seu centro; a reta infinita; o triângulo da geometria plana, cuja soma dos ângulos internos seja exatamente 180º, ou seja, os objetos atemporais. Enfim, podemos expressar, na linguagem algébrica, as formas ideais, mas dadas as propriedades físicas da matéria, tal como perecibilidade e a porosidade, não há no mundo-da-vida, aquele marcado pela temporalidade, formas que reproduzam fielmente essas idealidades matemáticas, atemporais, por isso, "as *ciências exatas* e as *ciências puramente descritivas* jamais podem substituir umas às outras, e (...) [a] ciência que opera com substruções ideais (...) não pode solucionar os problemas originais e legítimos da pura descrição" (HUSSERL, 2006, p. 161).

Quando Galileu empregou o método da Geometria à Física, ele possuía "diante de si, dotada já de uma vasta aplicação, não só terrestre como astronômica [uma Geometria que lhe foi] dada tradicionalmente como orientação para o seu pensar, que fazia referir o empírico às ideias-limite matemáticas" (HUSSERL, 2012, p. 21). Diante disso, segundo Husserl, Galileu não sentiu "a necessidade de se interrogar sobre a maneira como surgiu originalmente a operação idealizadora (a saber, como germinou ela no subsolo do mundo sensível pré-geométrico e das suas artes práticas)" (HUSSERL, 2012, p. 21). Em outras palavras,

> Galileu estava muito longe de pensar que, para a Geometria, enquanto ramo de um conhecimento universal do ente (de uma filosofia), pudesse ser relevante e, até, de importância fundamental, tomar como problema a evidência geométrica, o "como" da sua origem. (HUSSERL, 2012, p. 21).

Esse "como", essa aquisição primeira, original, Husserl problematiza sugerindo que o primeiro homem a pensar a Geometria não a tinha como projeto, porque não havia a tradição no sentido em que a apreendemos hoje "como uma aquisição completa de resultados espirituais que se amplia, por intermédio do trabalho continuado, com novas aquisições, em novos atos do espírito" (HUSSERL, 2012, p. 294). Desse modo, ela teria nascido da realização de uma evidência primeira ou primitiva, da evidência que "não diz absolutamente mais nada do que o aprender de

---

[33] A palavra perfeito tem, etimologicamente o sentido de "fazer inteiramente, acabar, terminar". O perfeito seria, portanto, aquilo que é completo, a que nada falta. Daí a impossibilidade de se encontrar no universo material, mutável por princípio, a perfeição.

um ente na consciência do seu si próprio aí originário (...). Nessa evidência, o que é efetuado existe aí originalmente como ele mesmo” (HUSSERL, 212, p. 295) que é, por assim dizer, um saber incontestável o qual

> começa com obviedades superficiais, quais sejam, que tudo o que é tradicional surgiu da atuação humana, que os homens do passado, as humanidades, existiram de acordo com essas tradições, que entre eles os primeiros inventores das tradições deram-lhe forma a partir de materiais disponíveis, ainda em [estado] bruto ou já espirituais, dando forma a algo de novo. (HUSSERL, 2012, p. 293-294).

Essa intuição primeira poderia ter se dado segundo a ilustração de Hersh (2002, p. 207-211)[34], que aqui parafraseamos sinteticamente: imaginemos dois sujeitos no princípio dos tempos; um deles, ao sobrepor, acidental ou propositalmente, dois gravetos um sobre o outro, percebeu que a intersecção entre eles dividia o espaço em quatro regiões e que essas regiões eram percebidas como idênticas duas a duas, formando o que viriam a ser mencionados como os ângulos adjacentes de uma figura geométrica. Uma propriedade intuída desse fato pode ter sido aquela que diz que há uma configuração possível entre os gravetos que tornam as quatro regiões semelhantes. Essa configuração é justamente aquele sobre a qual mencionamos, em uma conceituação atual, que o ângulo entre os gravetos é de noventa graus, isto é, que eles estão perpendiculares. A evidência dessa propriedade, a que estabelece que as quatro regiões são idênticas quando os gravetos formam um ângulo de 90º, contudo, não deve ter sido intuída a um primeiro olhar, mas pela regularidade com que esse fenômeno se oferecia aos sentidos os quais, despertados por uma curiosidade descobridora, portanto intencional do sujeito, levou-o a essa conjectura que, em um momento primeiro, era só uma conjectura. Faz parte desse movimento expressar essa apreensão primeira em linguagem e intersubjetivá-la. Esse processo de intersubjetivação é explicitado por Husserl como sendo aquele que:

> Na conexão da compreensão linguística recíproca, a produção originária e o produto de um sujeito podem ser *ativamente* recompreendidos por outro. Como na rememoração, neste integral recompreender do produto do outro tem necessariamente lugar uma coefetuação presente que é própria da atividade presentificada e, simultaneamente, também a consciência

[34] Hersh em seu artigo *The ‘Origin’ of Geometry* (2002) faz um exercício imaginativo a partir da leitura da *Origem da Geometria*, de Husserl, em que diz que não lhe parece tão difícil imaginar a origem da Geometria tal como concebida pelo filósofo alemão e, a partir desse exercício, construiu a narrativa que traduzimos e parafraseamos sinteticamente neste trabalho, uma vez que nos pareceu bastante elucidativa para o entendimento da intuição originária de um sujeito sobre a realidade primitiva que se lhe apresentava à vista no mundo pré-científico.

> evidente da identidade da configuração espiritual nas produções do receptor da comunicação e do comunicador, assim como também reciprocamente. (HUSSERL, 2012, p. 298, grifo do autor).

O episódio imaginado por Hersh (2002), em certo sentido, ilustra a compreensão husserliana do nascimento da Geometria, que teria ocorrido em um pensamento pré-científico, a partir de “atividades criadoras primeiras (...) [com] seu modo de ser perdurável (...) [como] uma síntese contínua em que todas as aquisições permanecem válidas” (HUSSERL, 2012, p. 294). Não se trata, a Geometria, de conjuntos de aquisições que se articulam, mas de “uma síntese contínua em que todas as aquisições permanecem válidas, configuram uma totalidade de tal modo que, em qualquer [estágio] presente, a totalidade do adquirido é, por assim dizer, uma premissa total para a aquisição do novo estágio” (HUSSERL, 2012, p. 294). Desta forma, cada síntese está carregada de todos os seus significados construídos pela tradição, bem como prenhe dos significados que virão, de seu horizonte futuro, das novas aquisições, mais uma vez perceptíveis no fluxo do devir heraclitiano. Isso vale para qualquer ciência: “[n]o progresso ‘sintético’, não (...) componho [o ser] ao horizonte, ‘ligando’ algo com algo de outro, agindo sobre isso como material, mas viso, ‘de fato’, no processo, à unidade que vale como ser” (HUSSERL, 2012, p. 289). Vale dizer, que o ser não é uma construção do tempo, mas mostra-se na temporalidade, no devir heraclitiano.

A Geometria, assim como todas as ciências em suas gêneses, não é uma “existência psíquica, não é existência de algo pessoal na esfera da consciência pessoal (...) [, mas é] uma existência supratemporal" (HUSSERL, 2012, p. 295) acessível a todos os homens: as ciências se dão à consciência, compreendida enquanto entrelaçamento das vivências no fluxo dos vividos, conceito que discutimos na seção I deste trabalho. As vivências dão-se do modo como primitivamente são e a consciência percebe-as no seu fluxo, à medida que elas ocorrem. As coisas existem para a consciência por meio da sua potência de existência primordial: “todo o vivido que não se tem ‘sob o olhar’ pode, por possibilidade ideal passar a ser notado, uma reflexão se dirige a ele, ele se torna então objeto *para* o eu” (HUSSERL, 2006, p. 168, grifo do autor). Há que se considerar, contudo, que essa percepção é inerente ao modo de ser do sujeito e do mundo que o circunda, uma vez que em outros mundos com seres com outros sentidos ou com os mesmos sentidos nossos, mas que não apreendessem do mesmo modo as propriedades do percebido, essas apreensões, eventualmente, não seriam as mesmas que são intersubjetivadas em nossos intercâmbios culturais e cristalizadas como verdades científicas por meio da tradição. Em outras palavras, “[à] humanidade única corresponde essencialmente o mundo único da cultura como um mundo circundante da vida na sua maneira de ser que, em cada tempo e humanidade históricos, é precisamente tradição, e a sua tradição” (HUSSERL, 2012, p. 306).

Um conceito geométrico originário estava acessível a qualquer um e foi objetivamente dado para um sujeito numa evidência vivida: estava no mundo-da-vida e foi, por assim dizer, intuído: “evidência (...) [é] o apreender de um ente na consciência do seu si próprio aí originário (...) [na] evidência, o que é efetuado existe aí originalmente como ele mesmo” (HUSSERL, 2012, p. 295). No horizonte da comunidade em que todo sujeito se insere no mundo cultural, as vivências, que se dão na subjetividade de um sujeito, desdobram-se no movimento da expressão do sentido que fazem e na dimensão da intersubjetividade. Pode-se dizer que o sujeito intrasubjetiva essa vivência, ou seja, resgata-a, reconta de si para si o vivido por meio da “atividade possível de uma rememoração, na qual o vivenciado passado é *quasi* de novo e ativamente vivido” (HUSSERL, 2012, p. 298, grifos do autor). O sujeito é capaz de explicar para si próprio e revivenciar o ato originário e quando explica para o outro, ele terá a possibilidade de reviver aquele ato originário:

> As produções podem propagar-se de pessoa para copessoa, em igualdade, e no encadeamento da compreensão destas repetições o evidente emerge como o mesmo na consciência do outro. Na unidade da comunidade comunicativa entre diversas pessoas, a configuração repetidamente produzida torna-se consciente não como igual, mas como único universal-comum. (HUSSERL, 2012, p. 298-299).

Essa intersubjetivação, ao longo da história, culminou com a construção de idealidades. Um dos problemas fundamentais das ciências é confundir a idealidade com a realidade empírica, tomar a primeira pela segunda. O modo do ser das idealidades não prescinde do real sentido, intuído e percebido na dimensão da subjetividade, mediante as vivências do corpo-vivente. Uma vez percebido, o real que se doa ao sujeito a ele se apresenta como ideia, e não como o real em si. A constituição do sentido e sua respectiva articulação, que possibilita que o sentido se faça inteligível e, portanto, que seja expresso de modo lógico, como manifestação do *logos*, dão-se pelos atos da consciência (entendida aqui como consciência transcendental, portanto fluida e que está em todo o corpo-vivente). No movimento em que essa articulação ocorre, ela se entrelaça também à linguagem. Esta traz as palavras ditas na historicidade do mundo, carregando sentidos e significados já expressos, porém nunca fechados ao modo de uma única possibilidade de dizer, do que é dito. Traz também a gramática, que expressa uma lógica pertinente à linguagem da cultura em que ela é empregada. Desse modo, a ideia é expressa pela linguagem. As idealidades são constituídas com essas expressões e, sendo assim, sempre na dimensão da intersubjetividade, em que sujeitos podem se compreender. As idealidades dos objetos matemáticos são constituídas também com determinações proposicionais definidoras, que estabelecem o modo de ser desse objeto. Sendo assim, já estão distanciadas das intuições, que se dão na dimensão da subjetividade e, também, das oscilações que ocorrem na aceitação de padrões com base em concordância assumida na dimensão social, em grupos socialmente constituídos[35].

Há que se considerar, contudo, que as idealidades não substituem o real, antes agem como um polo de convergência para o aperfeiçoamento das técnicas. De certo modo, a confusão entre essas duas categorias fez com que a ciência se afastasse do mundo-da-vida, ocasionando a perda do sentido da sua forma de conhecimento. Esse vazio de sentido, se por um lado não foi tão prejudicial às aquisições técnicas, por outro ocasionou uma perda da compreensão da Filosofia como a busca pelo conhecimento do ser. O benefício técnico desse processo tem como um exemplo já tardio, porque herdeiro de uma tradição de geômetras, o trabalho de axiomatização de Euclides (323a.C-283a.C(?)), matemático grego que sistematizou uma forma própria de intersubjetivar um método de demonstrabilidade das idealidades geométricas. Essas idealidades, fixadas nos axiomas e deles decorrentes, permitiram o desenvolvimento de técnicas mais avançadas de medição do que aquelas da ciência pré-cientifica a qual dizia, mais diretamente, das experiências vivenciadas no mundo e se, por um lado, afastaram-se da natureza, por outro, permitiram o aperfeiçoamento das práticas aplicadas a ela.

Como nosso objeto de pesquisa é a Álgebra, pretendemos discorrer sobre o papel preponderante dessa linguagem no distanciamento, em relação ao mundo-da-vida, do método empregado pelo homem para compreender a natureza, distanciamento esse propiciado notadamente pela aplicação de métodos matemáticos na tentativa de compreender e intersubjetivar a realidade. Para tanto, na próxima

[35] Este parágrafo é resultado da transcrição de uma explicação dada pela Profa. Dra. Maria Bicudo, em sessão de orientação, ocorrida no dia 08/07/2022.

subseção, partiremos das considerações de Husserl sobre as especificidades da linguagem algébrica concernentes aos problemas que dizem respeito ao pensamento algébrico, do qual ela é a expressão ou o modo como ele se materializa. Esse caminho irá nos conduzir às reflexões sobre o tratamento dessa forma de pensar na BNCC.

### 2.2. A presença da linguagem algébrica no processo de tecnicização

A Álgebra opera por meio de um sistema simbólico e, por conta disso, é pertinente, nas reflexões aqui empreendidas, levar em consideração o que Husserl afirmou sobre o conhecimento mediado por símbolos: “Todas as descobertas, tanto da física antiga quanto da nova, são descobertas dentro do que se poderia chamar de mundo das fórmulas ordenado à natureza” (HUSSERL, 2012, p. 38), mundo este em que se corre o risco de tirar do centro do processo do conhecimento “o que é efetivamente devido à medida da percepção, do único mundo alguma vez experienciado e experienciável - o nosso mundo-da-vida quotidiana” (HUSSERL, 2012, p. 38), aquele em que se dão as experiências originais, substituindo-o “pelo mundo matematicamente substruído das idealidades” (HUSSERL, 2012, p. 38). São considerações, portanto, que nos alertam sobre o risco de, ao operarmos acriticamente com símbolos, nos afastarmos das experiências originais.

Do mundo-da-vida é que emanam os sentidos das coisas, que não cabem, pela variedade dos entes e pela variedade dos sujeitos que os intuem, bem como pelas circunstâncias em que são intuídos, em um sistema fechado de símbolos: não se reduz o mundo a fórmulas sem correr o risco de se perder o sentido dele. Isso não quer dizer que a Matemática não deva ser também um dos seus instrumentos de compreensão, mas que deve ser acompanhada de um olhar retrospectivo com vistas a entender os significados por ela possibilitados, uma vez que sem esta reflexão, o “sentido específico que a natureza adquiriu pelo método artificial cessa demasiado cedo” (HUSSERL, 2012, p. 38). Esse sistema fechado, codificado pela linguagem, se tomado como um método único e verdadeiro, pode esvaziar o sentido da natureza: “[o] sentido de fórmula deste mundo reside em idealidades, enquanto toda laboriosa realização a elas dirigida assume o caráter de um mero caminho para uma meta” (HUSSERL, 2012, p. 38). Não se deve, portanto, confundir o método com o mundo real: o caminho com os polos da origem e do destino, a técnica com Ciência. Esse, aliás, é um problema da valorização excessiva do método, o problema de

> tomar em consideração a influência da tecnicização, (...) do trabalho do pensar matemático-formal: a transformação das suas teorias experienciais, descobridoras e construtoras, de um pensar eventualmente figurador da maior genialidade, num pensar com conceitos transformados, com conceitos “simbólicos”. (HUSSERL, 2012, p. 38).

Os conceitos simbólicos transformados e repetidos pelas linguagens, entre elas a linguagem algébrica, por exemplo, teriam, assim, um efeito de ocultar aquela genialidade do pensamento primeiro, aquele que emanou originariamente do mundo-da-vida, do pensar científico natural uma vez que “[p]ertence à essência de todo método a tendência de se perder numa união com a tecnicização” (HUSSERL, 2012, p. 38). Com respeito à compreensão de como esse “pensar matemático-formal”, um pensar de idealidades intersubjetivadas simbolicamente pela linguagem, incidiu sobre a Geometria e sobre o valor dela como ciência aplicável à natureza fática, Husserl questiona:

> como [em contraste com as ciências descritivas] é possível uma ciência como a geometria [que lida com idealidades]? Como pode ela, numa reativabilidade viva, conservar o seu sentido originário como construção gradual sistemática de idealidades, que se amplia infinitamente, se o seu pensar cognoscitivo deve produzir o novo, sem poder reativar os estádios prévios de conhecimento desde o estádio mais baixo? (HUSSERL, 2012, p. 301).

Essa simbolização decorrente, principalmente, da expressão linguística do pensamento matemático, que é dedutivo por excelência, “esvazia também o pensar puramente geométrico, bem como, na aplicação deste à natureza fática, o pensar-científico natural” (HUSSERL, 2012, p. 38). Husserl aponta as possíveis consequências do processo de afastamento do conhecimento, neste caso do conhecimento geométrico, do mundo originário pré-científico, distanciamento esse que ocorre por meio das deduções lógicas:

> A dedução segue, no seu progredir, a evidência formal-lógica, mas, sem a capacidade efetivamente formada da reativação das atividades originárias contidas nos conceitos fundamentais, ou seja, também do *quê* e do *como* dos seus materiais pré-científicos, a geometria seria uma tradição vazia de sentido, de que, caso nos faltasse essa capacidade, não poderíamos sequer saber se ela tem ou alguma vez teve um sentido genuíno, efetivamente recuperável. (HUSSERL, 2012, p. 304, grifos do autor).

A Lógica, em si, não está na origem do problema do afastamento do mundo-da-vida, pois “o progresso da matemática objetiva em direção à sua logicização formal, e a autonomização da lógica formal (...) é algo de totalmente *legítimo*, e mesmo necessário" (HUSSERL, 2012, p. 37, grifo do autor). Mesmo a tecnicização "com a sua ocasional perda total num pensar meramente técnico" (HUSSERL, 2012, p. 37) não é ilegítima. Ocorre, porém, que este "método [deve ser] exercido e compreendido *em plena consciência* (...) [para evitar] perigosos *deslizamentos* de sentido" (HUSSERL, 2012, p. 37, grifos do autor). A apropriação do método lógico deverá ser feita de tal modo que "permaneça sempre disponível, em ato, a *doação de sentido originária*" (HUSSERL, 2012, p. 37, grifos do autor). Assim compreendido, esse método contribuirá para o conhecimento do mundo, bem como será "liberto de toda a *tradicionalidade inquestionada* que fez introduzir momentos de obscuridade de sentido, já desde a invenção inicial da nova ideia e do novo método" (HUSSERL, 2012, p. 37, grifos do autor), ou seja, desde o tempo de Galileu.

É sob esta compreensão ampla que Husserl aborda diferentes perspectivas do problema da Lógica. Dentre elas, está a tarefa de produzir idealmente algo novo sem voltar às origens. A linguagem algébrica é um sistema lógico-simbólico, portanto nossas reflexões serão feitas tomando como exemplo aspectos dessa linguagem, já que as considerações sobre a Lógica valem também para a linguagem algébrica, que é um meio de intersubjetivação de idealidades.

Husserl aponta que se não fosse pela lógica, seria necessária muita energia ser despendida para compreender como se deu a evidência primeira e, a partir dela, reconstruir a compreensão de todo o percurso a fim de que fosse possível um avanço no conhecimento geométrico: "Mesmo que isso [a volta às origens] ainda fosse possível num estado mais primitivo da geometria, as forças não poderiam, por fim, deixar de se esgotar nesse esforço de tornar evidente e faltar [energia] para uma produtividade mais elevada" (HUSSERL, 2012, p. 301). A possibilidade lógico-dedutiva, por um lado, permite a partir de pressupostos finitos a geração de infinitas idealidades, possibilidades, uma economia de energia. Não se deve, contudo, perder o "quê" e o "como" originários sob pena de esvaziar-se o sentido, a conexão com o mundo-da-vida, daí a necessidade de uma perspectiva fenomenológica: uma teoria crítica do conhecimento.

É possível pensar, ainda, em uma lógica com vistas à comunização, a tornar comum aquela evidência originária. O pensamento lógico parte de elementos ideais, que seriam recebidos passivamente como significados. Husserl fala que, pela atividade lógica,

> [a] partir de uma figura de sentido passiva, surgiu agora uma outra, que se forma em produção ativa. Esta atividade é, então, uma evidência - *sui generis* -, a configuração que nela surge sob o modo da produtividade originária. Também em relação a esta evidência há um tornar-se comum. O juízo explicitado e clarificado torna-se uma representatividade ideal transmissível. (HUSSERL, 2012, p. 302).

Tornar comum é intersubjetivar a vivência. Assim, pela Lógica "tornam-se, então, também possíveis outras atividades, formações evidentes de novos juízos com base nos que já são para nós válidos" (HUSSERL, 2012, p. 302). Enfim, podemos afirmar que a Lógica possibilita a formação de novos juízos a partir de um juízo originário intersubjetivado pela linguagem. Aliás, é por meio da linguagem que "a idealidade geométrica (assim como a de todas as ciências), [passa] da sua origem intrapessoal, na qual é uma configuração no espaço da consciência na mente do seu primeiro inventor, à sua objetividade ideal" (HUSSERL, 2012, p. 296). A linguagem constitui, portanto, uma ponte entre a subjetividade e a objetividade. Essa ponte pode ter dois efeitos: o de sinalizar a presença do abismo e o de superá-lo. Assim, também, podemos pensar, metaforicamente, nos dois efeitos da linguagem algébrica apontados por Husserl. Se por um lado ela amplia o pensamento aritmético herdado das antigas formas primitivas, por outro, nas configurações algébricas há uma automatização que, por assim dizer, quando aplicadas ao estudo da Geometria, pode levar a um abandono do significado geométrico. São efeitos benéficos e funestos: "Há, então, que considerar, neste ponto, o enorme efeito, num certo aspecto salutar, num outro, funesto, dos *modos de pensar e das simbolizações algébricas* que desde Vieta, ou seja, já antes de Galileu, se divulgaram na modernidade (HUSSERL, 2012, p. 34, grifos do autor).

Ao descrever o efeito salutar da linguagem algébrica, Husserl afirma que:

> Em primeiro lugar, elas [as simbolizações algébricas] significam uma ampliação gigantesca do pensamento aritmético herdado nas antigas formas primitivas. Este se torna, agora, um pensar apriorístico livre, sistemático e inteiramente liberto de toda a efetividade intuível, sobre números em geral, correlações e leis numéricas. Logo que é aplicado, com todas as suas ampliações, na geometria, em toda a matemática pura das figuras espaço-temporais, estas se tornam inteiramente formalizadas de modo algébrico com o propósito metódico. Surge, então, uma "*aritmetização da geometria"*, uma aritmetização de todo o domínio das puras figuras (das retas, dos círculos, dos triângulos, dos

> movimentos, das relações de lugar ideais etc.). (HUSSERL, 2012, p. 34-35, grifos do autor)[36].

Nessa dimensão salutar do modo de pensar algébrico e de sua expressão simbólica podemos inserir dois casos ilustrativos de como a Álgebra liberta a Aritmética de toda atividade intuível e com isso permite que se realizem operações não apenas sobre números reais. O primeiro deles é a *congruência módulo n,* já referenciada na introdução deste trabalho, uma relação de equivalência, que possibilita que uma operação inicialmente pensada para números, como a multiplicação, seja estendida para operar sobre classes. Este exemplo mostra que a Álgebra permite a construção de estruturas cujas operações sobre seus elementos podem diferir daquelas estabelecidas pelas operações usuais, como as realizadas sobre o *corpo* dos números reais. Dessa forma, a Álgebra, a um primeiro olhar, poderia mostrar-se como ampliação das possibilidades do que já se conhecia e isso nos remete ao que ela possibilita, que é, entre outras coisas, a libertação da Aritmética de toda atividade intuível. Ao buscar esclarecer esse ponto, somos levados a tecer considerações sobre o próprio pensamento algébrico como uma atividade que também permite realizar operações existentes sobre novos objetos, por assim dizer, generalizar. Quanto a isso, podemos estabelecer um diálogo com as ideias de Costa (1971, p. 293) quando, ao se referir à Teoria dos *Grupos*[37], aponta que "[a] noção de operações sobre números (...) constitui, pois, um caso particular da noção agora generalizada", querendo dizer com isso que essa generalização foi possibilitada pela Álgebra.

Em um segundo caso, a Álgebra permite, por exemplo, a criação de números outros que não decorrem de qualquer realidade intuível, tal como aquela intentada por Husserl em sua *Filosofia da Aritmética* (1891), quando buscou fundamentar o conceito de número a partir de um ponto de vista psicologista. Estamos nos referindo ao conceito de números complexos que emergiram unicamente de processos conduzidos por métodos algébricos, usados para resolver equações cúbicas cujas soluções

---

[36] Neste ponto remetemos o leitor à página 28 e seguintes deste trabalho em que abordamos a fala de Husserl sobre a Matemática como uma ciência de essência, referindo-se a ela como uma espécie de modelo para as demais ciências eidéticas, inclusive para a Fenomenologia. Repare que, neste ponto, o que seria um aspecto positivo, salutar, da Matemática, também é abordado, sob outra perspectiva, como um afastamento do mundo-da-vida se tomados os processos matemáticos do modo como eram pelos Positivistas, ou seja, se considerados como pressupostos que afastam o sujeito do conhecimento da doação originária das coisas.

[37] Assim como referenciamos a *congruência módulo n* na introdução deste trabalho, trataremos, mais detalhadamente, sobre a Teoria dos Grupos, na subseção 6.4 da seção 6 deste trabalho: "Teoria dos Grupos: um caso de multiplicidade algébrica".

envolviam operações com raízes quadradas de números negativos[38]. Ainda que a linguagem algébrica seja circunscrita a seu sistema rígido de símbolos e regras operatórias, os resultados que decorrem dos processos realizados nesse sistema ampliaram a noção de números para aqueles antes impensados: os números complexos, por exemplo. Estas considerações vão ao encontro de nosso propósito de destacar uma das dimensões da linguagem algébrica, a de ampliar as possibilidades da Matemática.

Já com relação ao efeito funesto dos modos de pensar e das simbolizações algébricas, Husserl aponta que:

> De certo modo, esta aritmetização da geometria conduz como que por si mesma ao *esvaziamento do seu sentido.* As idealidades efetivamente espaço-temporais, tal como originalmente se expõem no pensar geométrico sob o título usual de “intuições puras”, transformam-se, por assim dizer, em puras figuras numéricas, em configurações algébricas. No cálculo algébrico faz-se automaticamente retroceder, ou abandona-se mesmo por completo, o significado geométrico; calcula-se, e só no fim se recorda que os números deviam significar grandezas (...); pensa-se, inventa-se, fazem-se eventualmente grandes descobertas – mas com um sentido insensivelmente deslocado, “*simbólico”.* (HUSSERL, 2012, p. 35, grifos do autor).

Destas considerações sobre a simbolização algébrica somos conduzidos ao cerne do pensamento fenomenológico: chamar a atenção para a eventual perda de sentido originário da intuição primeira. Esse alerta condensa um método que amplia sobremaneira o campo de visão dos métodos tradicionais das ciências dos fatos: o sentido deve preceder a aplicação do método para que ele não se esvazie. O sentido daquilo que se busca e de onde se partiu deve estar sempre intrínseco ao método, bem como à possibilidade da volta ao conhecimento original. Especificamente sobre a Álgebra, ao mesmo tempo que ela permite um afastamento do sentido original, pelos elos da Lógica, ela carrega em si o caminho da volta, não da volta histórica ao início, mas da volta às origens das proposições primeiramente evidenciadas.

Os métodos algébricos, portanto, quando empregados de modo excessivamente algorítmico, podem contribuir para uma tecnicização, para um esvaziamento de sentido que, se aplicado às práticas de ensino e aprendizagem, podem contribuir para a formação de um indivíduo que valoriza excessivamente a

[38] Para um aprofundamento sobre a origem histórica dos números complexos, recomendamos a leitura do artigo: MILIES, César Polcino. A emergência dos números complexos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 24, p. 5-15, jul. 2003.

“roupagem das ideias [aquela que] faz com que o *sentido próprio do método*, *das fórmulas, das ‘teorias*’ permaneça *incompreendido*, e que, no surgimento ingênuo do método, [seu sentido próprio] não seja *jamais* compreendido” (HUSSERL, 2012, p. 41, grifos do autor). A valorização excessiva do método pode, portanto, levar a um processo de automatização do indivíduo, em tudo diferente daquele pensamento crítico que toda educação deveria almejar construir. Fundamentados nesse olhar, faremos, na próxima seção, uma leitura de como a BNCC propõe o ensino da Matemática, notadamente da Álgebra.

## 3. O PENSAR ALGÉBRICO NA BNCC: SENTIDOS E SIGNIFICADOS QUE SE ABREM

Nesta seção, analisaremos o modo pelo qual o pensar algébrico é concebido no texto da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento que orienta práticas educativas escolares no país, procurando desvelar o modo como o pensar algébrico nele evidencia-se. A escolha desse documento dá-se pela sua importância e relação com o desenvolvimento de conteúdos curriculares que vigoram nas escolas brasileiras, com a formação inicial e continuada de professores, entre outras políticas públicas educacionais que ele norteia. Para tanto, teceremos reflexões possibilitadas pela indagação sobre o pensamento algébrico que teria orientado a concepção do documento tentando compreender em que medida ele privilegia ou não uma visão tecnicista do ensino da Álgebra, por meio de uma fundamentação sobre esta disciplina pautada pela visão fenomenológica.

Ao darmos enfoque ao ensino da Matemática, entendemos que a Fenomenologia possibilita um caminho investigativo que nos permite superar o caráter exclusivamente técnico dessa Ciência, aquele caráter que a instrumentaliza com métodos supostamente inatacáveis e, por isso, pode obscurecer as possibilidades investigativas as quais não devem se ater exclusivamente às suas regras operatórias, às regras do jogo simbólico a uma “simbologia estranha à intuição” (HUSSERL, 2012, p.17). A Fenomenologia, desse modo, abre caminho para investigações que permitem entender a Matemática como uma aquisição cultural, uma forma de expressão, em cuja menção os significados, ao serem desvelados, revelam um mundo de idealidades que só é acessível a um olhar que se projete através da expressão, que contemple, além do caminho, que é o método, o fim que desvela os sentidos e os significados dessa simbologia.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) resultou de um processo que envolveu a Secretaria da Educação Básica do Ministério da Educação (MEC), o Conselho Nacional de Educação (CNE), o Conselho Nacional de Secretários de Educação (CONSED) e a União Nacional dos Dirigentes Municipais de Educação (UNDINE). É fruto de discussões que envolveram a participação do público[39]

[39] Não cabe aqui discutir os méritos do caráter democrático e da amplitude dessas discussões e nem em quais circunstâncias ocorreram. Para compreender o contexto da elaboração desse documento, remetemos o leitor a Santos e Tomé (2020).

alcançado por essas entidades e foi elaborada em cumprimento às leis educacionais vigentes no país, entre elas a Lei de Diretrizes e Bases (1996), Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica (2013) e Plano Nacional da Educação (2014). Foi homologada pelo Ministério da Educação brasileiro em 2017. Trata-se de um documento de caráter normativo, com o objetivo de organizar a Educação Básica (que compreende os ensinos Infantil, Fundamental e Médio) e que define o "conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica" (Brasil, 2017, p. 7).

Para uma leitura crítica deste documento, partiremos do delineamento que se apresenta nele sobre o conhecimento matemático, apontando as potencialidades e fragilidades desse delineamento que, num primeiro momento, parece ampliar o sentido da Matemática, mas em outros momentos parece estreitá-lo:

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos. (BRASIL, 2017, p. 265).

A BNCC, nas seções que regem as bases para o ensino da Matemática, reflete sobre a importância do conhecimento dessa disciplina e posiciona-se contra o senso comum. Essa é uma das potencialidades do documento. Primeiramente, quando afirma que a Matemática não se restringe "apenas à quantificação de fenômenos determinísticos" (BRASIL, 2017, p. 265), amplia os limites dessa área para além daquilo que o senso comum costuma chamar de Ciência Exata. Isso porque admite que a Matemática "estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório" (BRASIL, 2017, p. 265). Em segundo lugar, também parece desconstruir a visão comum de que as habilidades matemáticas são a base apenas para tarefas do cotidiano, uma vez que aponta que os fenômenos com os quais essa ciência trabalha podem ser ou não do mundo físico. Em terceiro lugar, estabelece uma correlação entre os estudos matemáticos e o desenvolvimento da argumentação, o que sugere que o ensino da Matemática não deverá estar centrado apenas no desenvolvimento lógico dos processos de resolução de problemas, mas desenvolver habilidades para que os educandos possam validar por meio de proposições verbais logicamente encadeadas os caminhos percorridos para a resolução desses problemas.

Entretanto, as visões amplas deste enunciado não se refletem nas competências e habilidades e nos métodos que o documento propõe para desenvolvê-las. Isso porque ao delinear os processos de desenvolvimento do pensar algébrico, a BNCC prioriza uma perspectiva tecnicista para fundamentar as práticas, a qual destacaremos nesta seção. Em cada nível de escolaridade, há destaque para cinco áreas de conhecimento: Linguagens, Ciências da Natureza, Ciências Humanas, Ensino Religioso e Matemática (BRASIL, 2017). O ensino da Matemática proposto pela BNCC elenca competências específicas a serem desenvolvidas pelos alunos, dentre elas:

> - Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
>
> - Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2017, p. 267).

Considerando as diferentes possibilidades de organização do conhecimento escolar, as unidades temáticas definem, de acordo com o documento, um arranjo dos objetos de conhecimento que julga adequados às especificidades dos diferentes componentes curriculares. Cada unidade temática contempla uma gama de objetos de conhecimento, assim como para cada objeto de conhecimento é associado um número variável de habilidades a serem desenvolvidas. No caso da Matemática, esses objetos organizam-se em cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Para cada unidade temática, são apresentadas, ainda, as finalidades e são indicados os caminhos para cumpri-las. No que diz respeito à Álgebra, ela

> tem como finalidade o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – pensamento algébrico – que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e

> estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. (BRASIL, 2017, p. 270).

Já nesta primeira referência ao pensamento algébrico, compreendemos certo caráter lacunar do conceito, pois ele é caracterizado como um “tipo especial de pensamento” o que, segundo nosso entendimento, caracteriza qualquer pensamento, uma vez que todo ato de pensar é, em certo sentido, especial porque único. Essa descrição não dá pistas sobre o que é o aspecto fundamental do objeto a que se refere. Recorrendo à sequência do texto para buscar essa compreensão, não encontramos outras qualidades do objeto, mas suas utilidades, o que nos remete, então, à ideia de que, para o documento, o aspecto fundamental desse “pensamento especial” seria seu caráter utilitário. Continuando a leitura, compreendemos que a enumeração dos elementos funcionais do objeto descrito evidencia aspectos como modelos, estruturas, letras e símbolos, que dizem respeito à instrumentalização da Álgebra e que, não necessariamente, dão acesso ao que ela é. Essa leitura ganha corpo justamente na sequência do documento, em que são enumerados os atos necessários para o desenvolvimento do pensamento algébrico:

> Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 270).

Os termos “regularidades” e “padrões” associados às tarefas de identificação, de estabelecimento de leis e, mais uma vez, às operações de “representações gráficas e simbólicas” reforçam a ideia daquela instrumentalização que identificamos na tentativa do documento de definir o pensamento algébrico: são necessidades mais relacionadas ao que ele possibilita do que ao movimento do próprio pensar que caminha em busca de compreensões.

A ênfase no aspecto utilitário da Álgebra manifesta-se também em outros pontos do documento, agora com vistas a propor as articulações entre ela e os outros campos da Matemática. Ao fazer isso, insiste na necessidade e importância de articular essas diferentes áreas da Matemática, divididas em unidades temáticas, para que o estudante possa relacionar o conhecimento construído e utilizá-los em diferentes contextos:

> Por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, [a Matemática] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental. (BRASIL, 2017, p. 265).

Ainda que, no texto, sejam apontadas atitudes e práticas desejáveis nos processos de ensino e aprendizagem, entendemos que a Matemática, bem como a Álgebra especificamente, podem ser vistas por dois aspectos: como instrumentos de interpretação do mundo e como o que elas propriamente são. No documento, sobram referências ao primeiro aspecto, aquelas que dizem sobre a instrumentalização da Matemática, ao passo que faltam referências que apontem a necessidade de voltar o olhar para a Álgebra como aquilo que ela é. “Aquilo que ela é” diz da Álgebra enquanto uma disciplina que foi sendo constituída ao longo da historicidade, que realiza certas ações sistematizadas, que possui uma linguagem própria e que os símbolos dessa linguagem devem ser lidos não apenas por eles, mas através deles, para se visar ao que neles é mencionado. No fragmento, temos, por exemplo, a referência à atividade lógica de “verificação de conjecturas a partir de outras”, de uma dedução que se engendra por meio da Lógica sem sugerir que se volte o olhar à fonte primeira das conjecturas. No caso dos símbolos, por exemplo, seria possível pensá-los não apenas como meros elementos manipuláveis por regras, mas como objetos correlacionados a essas mesmas regras e que conferem significado às expressões das quais participam. Uma abordagem que contempla esta perspectiva é encontrada na obra de Freudenthal que será descrita na seção 4 deste trabalho, “A Álgebra como uma tarefa educacional”. Entendemos, assim, que a fluência algébrica é possibilitada, antes da aplicação da própria Álgebra, por uma compreensão dos símbolos que habitam a linguagem que ela estrutura, seus axiomas e suas regras operatórias, sobre como esses conceitos são intuídos, sobre seu significado íntimo, isto é, uma compreensão e justificação de si mesma, evitando, assim, aquela alienação propiciada pelo excessivo tecnicismo explicitado por Husserl (2012) e discutido na seção anterior desta tese. Queremos dizer com isso que tanto o ponto de vista estritamente pragmático quanto o técnico não são os únicos em função do qual a Álgebra deve ser compreendida.

O discurso presente na BNCC estende-se da concepção mais geral de ensino da Matemática para sugestões e recomendações de práticas que, por sua vez, refletem esse tecnicismo já apontado. Por sua vez, o ensino da Álgebra e o consequente desenvolvimento do pensamento algébrico devem ocorrer desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, por meio de propostas que foquem:

> as ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade. No entanto, nessa fase [anos iniciais], não se propõe o uso de letras para expressar regularidades, por mais simples que sejam. A relação dessa unidade temática com a de Números é bastante evidente no trabalho com sequências (recursivas e repetitivas), seja na ação de completar uma sequência com elementos ausentes, seja na construção de sequências segundo uma determinada regra de formação. A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. A noção intuitiva de função pode ser explorada por meio da resolução de problemas envolvendo a variação proporcional direta entre duas grandezas (sem utilizar a regra de três), como: “Se com duas medidas de suco concentrado eu obtenho três litros de refresco, quantas medidas desse suco concentrado eu preciso para ter doze litros de refresco?”. (BRASIL, 2017, p. 270).

Num primeiro momento, a aplicação prática de conceitos como função e proporcionalidade, como sugerido pelo documento, parece ser útil para a consolidação do conhecimento. Ocorre, contudo, que devemos ter em mente a diferença entre opinião e conhecimento. Opinião é própria do senso comum e pode, eventualmente, ter utilidade prática nas diversas atividades do dia a dia, mas nem sempre corresponde à verdade, ou à essencialidade daquilo que descreve ou de que se apropria e, às vezes, pode mesmo confundir duas coisas. No caso da proporcionalidade, por exemplo, temos de considerar que há três critérios lógicos que fundamentam a proporcionalidade direta entre grandezas, a saber: a) relação de dependência, isto quer dizer que se duas grandezas $\mathrm{x}$ e $y$ são diretamente proporcionais, então elas estão de tal modo relacionadas que a cada valor de uma corresponde um valor determinado de outra, isto é, há uma correspondência entre uma e outra e este fato pode ser simbolizado por $\mathrm{x} \mapsto y$ ou $y = f(\mathrm{x})$; b) quanto maior for $\mathrm{x}$, maior será $y$, fato que pode ser traduzido, simbolicamente, da seguinte forma: se $\mathrm{x} \mapsto y$ e $\mathrm{x}' \mapsto y'$, então $\mathrm{x} < \mathrm{x}'$ implica $y < y'$; e c) existe um valor *c* qualquer, de tal modo que se $x_0$ está relacionado a $y_0$, então $cx_0$ estará relacionado a $cy_0$. Simbolicamente: se $x_0 \mapsto y_0$ então $cx_0 \mapsto cy_0$.

Dados esses três critérios, devemos considerar que, matematicamente, a proporcionalidade direta só pode ser aferida caso os três sejam satisfeitos. No exemplo dado no documento, no problema do suco concentrado, os critérios são atendidos e não haveria reparos quanto a ele. As observações que podem ser feitas, porém, dizem respeito a *certo risco* de o enunciado, se for reproduzido automaticamente, desconsiderar a natureza das grandezas em questão. Por exemplo, parafraseando o enunciado, poderíamos propor o seguinte: se um quadrado cuja medida do lado é 2m tem uma área de $4m^2$, qual é a área de um quadrado cuja medida do lado é 6m? Vê-se que, neste caso, embora os dois primeiros critérios estejam satisfeitos, o terceiro não está, uma vez que se multiplicarmos o lado do quadrado por uma constante *c*, a área do quadrado não ficará multiplicada por essa mesma constante. Decorre desta observação que a medida da área de um quadrado e a medida de seu lado não são grandezas proporcionais. Vemos que a estrutura do enunciado permaneceu idêntica, no entanto o objeto referido foi alterado. No novo caso, considerou-se duas grandezas de ordens diferentes, a medida do lado de um quadrado, que é uma grandeza linear, e a medida da área desse quadrado, que é uma grandeza bidimensional. Neste caso, mostrou-se que não existe uma proporcionalidade entre essas grandezas, mas apenas uma relação de dependência.

Considerando-se que esse documento, embora seja destinado ao Ensino Fundamental, não tem como público-alvo os alunos, mas sim os professores, esse tipo de exemplo deveria vir acompanhado de reflexões mais detalhadas sobre o tema em questão, no caso específico uma discussão sobre os critérios para que duas grandezas sejam consideradas proporcionais. Caso contrário corre-se o risco de gerar imprecisões e o pensamento matemático não as comporta. A linguagem do dia a dia comporta tais imprecisões, como é o caso da conjunção proporcional que participa de orações correlativas. Podemos dizer, no campo da análise linguística que, por exemplo, em um período como “a pobreza aumenta à medida que os índices de desemprego sobem” é composto de duas orações articuladas por uma locução conjuntiva proporcional, “à medida que”, mas não é a proporcionalidade matemática, pois ainda que haja correlação entre os termos, não há uma constante de proporcionalidade. Assim, o uso da técnica sem a apreensão do conceito, o como e o porquê, pode levar a equívocos. Este seria um exemplo de como uma visão fenomenológica poderia contribuir para processos de construção de conhecimento crítico. Note que, no caso analisado, a inserção, no texto das Bases Curriculares, de uma descrição dos critérios inerentes à proporcionalidade garantiria que algum leitor descuidado não propusesse, a partir do exemplo dado no documento, uma prática que não se adequasse à natureza dos objetos considerados[40]. O método, portanto, deve ser compreendido e exercido de modo reflexivo, vale dizer que a aplicação da Álgebra deve decorrer da compreensão, tanto quanto possível ampla, de suas propriedades.

No estudo da Matemática enquanto uma técnica operatória, tanto no que diz respeito à sua própria ampliação quanto à sua aplicação, corre-se o risco de transformá-la em uma mera arte, uma “técnica calculatória segundo regras (...) [para] obter resultados cujo sentido de verdade só é alcançável num pensar objetivamente intelectivo” (HUSSERL, 2012, p.36). No modo puramente técnico de proceder,

> Opera-se com letras, sinais de ligação e relação (+, x, = etc.), e segundo as r*egras do jogo* da sua ordenação conectiva, de um modo que, de fato, em nada difere no essencial do jogo de cartas ou xadrez. O pensar *originário* que confere propriamente sentido a este procedimento técnico e verdade aos resultados corretos (ainda que seja a “verdade formal” própria da *mathesis universalis* formal), está aqui posto fora de circuito. Deste modo, tal pensar é posto também fora de circuito (...) na doutrina algébrica dos números e grandezas. (HUSSERL, 2012, p. 36-37, grifos do autor).

Esta ideia do filósofo é consoante ao que dissemos sobre o cuidado que se deve ter quanto ao tecnicismo e o risco de ele levar ao esvaziamento do sentido. Para além do conteúdo, destacamos também a forma do texto de Husserl, que se estrutura sugestivamente, ensinando-nos o rigor e a clarificação das ideias que, segundo nossa perspectiva, faltam no documento oficial. Na construção de suas ideias, o fenomenólogo desenvolve cada conceito utilizando inserções, fazendo ressalvas por meio de concessivas “ainda que”, ampliando certas descrições por meio do uso de termos colocados entre parênteses ou usando-os para intercalar exemplos, retomando outros termos por repetição ou sublinhando ideias ou destacando conceitos por meio do uso de aspas. Em um documento destinado a orientar a educação, guardadas as diferenças entre os gêneros filosófico, o de Husserl, e o prescritivo, da BNCC, seria, ainda assim, necessário que houvesse mais cuidado na

---

[40] O propósito desta menção sobre o problema da proporção é apresentar um exemplo de que a visão fenomenológica do conhecimento implica a necessidade de reflexão sobre o objeto em análise que procure dar conta de seus vários "momentos" de forma que se afaste uma visão ingênua da natureza das coisas.

formulação dos conceitos, sobretudo os matemáticos, temas desta pesquisa, para garantir a clareza do objeto do discurso e evitar lacunas que possam levar a equívocos.

Para o 4º e o 5º anos, a BNCC propõe que sejam trabalhadas as operações aritméticas, a fim de, também, estimular a investigação de regularidades como, por exemplo, múltiplos de um número natural. Além disso, propõe trabalhar as relações entre a adição e subtração, bem como multiplicação e divisão. Sugere, ainda, para os 4º e 5º anos, a investigação do sinal de igualdade, explorando seus múltiplos significados em diferentes contextos.

Já nos anos finais do Ensino Fundamental,

> os alunos devem compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2017, p. 270-271).

Para o desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano, a BNCC propõe um trabalho com foco nos números racionais (compreendendo seus diferentes significados) e o sinal de igualdade. Para o 7º ano, é sugerido um trabalho voltado à análise e interpretação da relação de interdependência entre grandezas, apresentando aos alunos a linguagem algébrica mais aprofundada, a que contempla os conceitos de variável e incógnita, bem como aquela que dá conta da resolução de equações do 1º grau.

O documento sugere para o 8º e 9º anos uma continuidade da proposta sobre a relação entre grandezas (aquelas diretamente, inversamente ou não proporcionais) e amplia os estudos das técnicas e resoluções de equações, agora levando em conta as de 2º grau. Há, ainda no 9º ano, a indicação do trabalho com funções, suas representações algébricas e geométricas e suas aplicações.

Nesta descrição dos conteúdos notamos a ênfase tecnicista que identificamos no início deste trabalho. Isso se evidencia no final do último fragmento citado, em que se fala da necessidade de resolução de problemas práticos em detrimento daquilo que é mencionado e pode ser expresso pelos conceitos matemáticos. Considerando os modos, presentes no documento, para uma compreensão da Álgebra, nossa leitura leva-nos a entender que a Base Nacional Comum Curricular prioriza uma visão tecnicista e operatória para o ensino dessa área da Matemática na Educação Básica. Assim, continuando a discussão, desvelaremos os sentidos e significados dessa visão, buscando compreendê-la, tal qual concebe o documento.

Sobre aquela primeira referência específica ao pensar algébrico, já citada neste trabalho, na página 75, em que ele é caracterizado como um tipo especial de pensamento, o documento cita generalizações e, novamente, enfatiza a resolução de problemas, sempre metonimizada por meio da linguagem algébrica, agora, por meio das “equações e inequações”:

> As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, p. 270).

Assim, divisamos na BNCC, o pensamento algébrico associado a duas categorias bem específicas: a representação simbólica e a organização desses símbolos por meio da linguagem algébrica, ou seja, organização que consiste em operações de procedimentos combinados, não necessariamente refletidos, para se chegar a um objetivo[41]; e a utilização deles na resolução de problemas práticos. Isso, certamente, não está fora de questão quando se volta o olhar para o pensar algébrico, mas não corresponde à complexidade desse tipo de pensamento que agrega atividades não necessariamente voltadas ao aspecto utilitário. O pensar algébrico compreende mais do que a representação simbólica; esta é apenas um resíduo dele que abarca, também, uma reflexão sobre o que é a própria Álgebra[42] e sobre o que é o seu pensar.

Conforme compreendemos em nossa leitura da BNCC, o pensar algébrico vem associado diretamente ao uso de letras e outros símbolos, o que revela que o documento prioriza o método em detrimento ao entendimento da Álgebra, quer dizer,

---

[41] A exemplo do mencionado nas páginas 78 e seguintes acerca da questão da proporcionalidade, conforme consta na BNCC.

[42] Quando utilizamos o verbo de ligação “é” para predicar nominalmente a Álgebra, estamos nos referindo ao modo de ser da Álgebra que se mostra em suas aparições, que se realiza em torno de características nucleares presentes no âmago de sua constituição/produção. A respeito da construção de predicados e das características nucleares da Álgebra, remetemos o leitor à seção 6 deste trabalho: “A Álgebra na perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”.

prioriza uma visão algorítmica. A definição de algoritmo, aliás, é dada no próprio documento como:

> uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. (BRASIL, 2017, p. 271).

Essa visão algorítmica, processual, converge para o modo como a BNCC propõe a prática do pensar algébrico: por meio da identificação das regularidades e padrões e associação delas às leis matemáticas, com vistas a atingir o plano das representações gráficas e simbólicas, processo este ligado, no documento, à resolução de problemas. Aproximar o pensamento algébrico de modo tão intenso a um algoritmo equivale a associá-lo excessivamente a regras e à finitude dos processos, ou seja, reduzi-lo, em certo sentido. Isso se revela também na associação que o documento faz entre o pensar algébrico e o “pensamento computacional”: “[o]utra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos” (BRASIL, 2017, p. 271).

O pensamento computacional é, assim, concebido como a capacidade de “traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa” (BRASIL, 2017, p. 271). Associado a esse pensar, segundo o documento, "cumpre salientar a importância dos algoritmos” (BRASIL, 2017, p. 271). Desse modo, evidencia-se aqui certa transitividade entre Álgebra, pensamento computacional (conforme concebido pelo documento) e algoritmos e, portanto, uma vinculação forte entre a primeira e os aspectos processuais dos dois últimos elementos. Isso caracteriza o pensar algébrico, do modo como é concebido pela BNCC, excessivamente associado ao pensar computacional com viés algorítmico.

A algoritmização, o privilégio dado ao desenvolvimento processual e a aplicabilidade na resolução de problemas pode não propiciar a compreensão sobre a o pensar algébrico em suas múltiplas dimensões. Nesse sentido, vale indagar se o desenvolvimento desse pensamento visa mesmo apenas a atender às “demandas para identificar a relação de dependência entre duas grandezas em contextos significativos e comunicá-la, utilizando diferentes escritas algébricas, além de resolver situações-problema por meio de equações e inequações" (BRASIL, 2017, p. 527). Atender a demandas e comunicar constituem, estritamente, aspectos utilitários da linguagem algébrica, uma instrumentalização que, embora seja importante em determinadas atividades, dificilmente diz respeito à totalidade desse pensar, entendido aqui como uma busca daquilo que vai além de sua representação simbólica e de aspectos algorítmicos.

Compreendemos, portanto, que uma linguagem, quer algébrica, quer de outra ciência, enforma ou constitui um vir à luz da forma, do pensamento característico daquela atividade que faz dessa linguagem sua expressão e não o núcleo desse pensamento. Assim, talvez fosse necessário, para se desprender de certa superficialidade de apenas observar os elementos simbólicos que constroem a linguagem algébrica, um voltar-se para o mencionado por meio desses símbolos e para a própria natureza da Álgebra. Essa é uma das dimensões da atitude fenomenológica.

Além disso, voltar-se para a própria Álgebra, e não apenas para sua aplicabilidade prática, pode desvelar muito da forma de pensar que é inerente a ela. É nesse sentido que iremos propor uma reflexão sobre as múltiplas possibilidades ou olhares que se pode ter sobre o estudo de uma equação, tal como a apresentada em (1), cujo enunciado propõe que a solução deva ser buscada no conjunto dos números reais.

$$x^2 + 1 = 0 \quad (1).$$

Para realizar este exercício, vamos imaginar, num primeiro momento, um sujeito proficiente em Matemática que compreende, já num primeiro olhar, que a equação (1) não tem solução no conjunto dos números reais, uma vez que $x^2 \geq 0$ e, portanto, ao somar $1$ a $x^2$, nunca se obteria o zero como resultado. Vamos imaginar, ainda, que esse sujeito proficiente seja um professor de Matemática que simplesmente dê essa informação para seus alunos, e que determine que eles registrem isso na memória ou no caderno sem vivenciarem o desdobramento da equação que os levaria a essa verdade. Com esse procedimento, ele estaria privando os alunos de possibilidades de conhecimento desse objeto matemático.

Em vez disso, é possível abordar o objeto matemático por meio de uma atitude fenomenológica que parte daquela *epoché*, daquele método de parentetização[43], em que não se nega e nem se duvida da possibilidade de solução da equação, mas convida o sujeito cognoscente a não fazer qualquer juízo sobre a existência espaço-temporal do objeto em questão. Esta atitude permitirá aplicar as operações lógico-matemáticas sobre o objeto que se apresenta para validar, ou não, as verdades matemáticas que são imanentes a ele. Compreendemos que, por meio desta atitude, a experiência em relação ao objeto matemático proposto em (1) tem a potencialidade de abrir caminhos para diversas possibilidades pelas quais ele pode ser experienciado, as quais serão descritas a seguir e que podem desvelar os complexos processos do movimento do conhecer, da compreensão de como o conhecimento desse objeto constitui-se para o sujeito.

Uma das perspectivas é a proposta de resolução de (1) por meio de passos encadeados numa sequência de implicações lógicas que progride em uma única direção. A equação (1) pode, desse modo, ser tratada como apresentado em (2), por meio de um processo sintético e pragmático em que simplesmente se opera, numa atitude usual, isolando a incógnita $x$ ao subtrair-se 1 de ambos os lados da equação, tal como efetuado a seguir:

$$
\begin{gathered}
x^2+1=0 \Rightarrow \\
\Rightarrow x^2+1-1=0-1 \Rightarrow \\
\Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow \\
\Rightarrow x= \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x \in \emptyset \qquad (2).
\end{gathered}
$$

As passagens envolvidas neste primeiro processo representam implicações lógicas da forma “se então” as quais, por meio de uma relação de transitividade, levam-nos a concluir que “se $x^2+1=0$, então $x^2=-1$”. Esta implicação conduz a uma impossibilidade matemática, já que estamos buscando uma solução no conjunto de números reais, isto é, aquele em que não se insere a raiz quadrada de um número negativo, portanto a equação não tem solução, ou, dito de outra forma, seu conjunto solução é vazio.

Outra perspectiva para resolver a equação (1), apresentada em (3), exigiria uma postura mais investigativa, que envolve a busca de equivalência entre objetos

[43] O tema da redução fenomenológica, correlacionado à *epoché* foi tratado nas páginas 36 e seguintes deste trabalho.

matemáticos e que, por meio de operações algébricas válidas, procura a solução em outra equação, equivalente à inicialmente proposta, ou seja, cuja solução seria também a solução da equação original. Tal equivalência novamente seria obtida por meio de uma relação de implicação, conforme os passos a seguir:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 + 1) * (x^2 - 1) = 0 * (x^2 - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x \in \{-1, 1\} \qquad (3).$$

A implicação (3) diz respeito a um conjunto discreto e não contínuo, uma vez os únicos possíveis valores para $x$ são -1 e 1. Essa implicação pode ser traduzida na seguinte proposição: "se a equação $x^2 + 1 = 0$ tem solução, então $x$ pertence ao conjunto {-1, 1}", que não implica reciprocidade e, ainda assim, é verdadeira, mas não apresenta a solução, uma vez que a proposição que relaciona uma equação à sua solução é sempre composta pelo conectivo "se e somente se", que sintetiza em uma única proposição uma afirmação e a sua recíproca. Por isso deve ser analisada a proposição recíproca "se $x$ pertence ao conjunto {-1, 1}, então ele é uma solução". Quem assim procedesse, intuiria ou veria que essa recíproca é falsa e concluiria que a equação não tem solução real. Para verificar a falsidade, é necessário substituir a incógnita em (1) por qualquer um dos elementos do conjunto {-1,1} e notar que a igualdade não se verifica. Conclui-se, portanto, que não se pode dizer que $x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 = 0$ . O que é verdadeiro é que $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0$ , mas não é verdade que $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0$.

Uma terceira perspectiva (4) seria uma abordagem sob o ponto de vista da representação geométrica. Queremos dizer com isso que $x^2$ pode ser considerado a representação da área de um quadrado cuja medida do lado vale $x$. Analogamente, pode-se considerar 1 como sendo a medida do lado de um quadrado de área 1, uma vez que $1^2 = 1$. Assim sendo, o problema pode ser entendido como a composição de dois quadrados, um deles cuja área é $x^2$ e o outro cuja área é 1, e desta forma a composição resultaria em uma figura geométrica que possui área igual a zero, por exemplo, um círculo degenerado. Essa solução evidencia-se como impossível, do ponto de vista lógico.

Uma quarta abordagem (5) é possível num contexto de funções, em que o problema poderia ser traduzido como a busca da raiz da função $f: R \to R$, definida por $f(x) = x^2 + 1$, cujo gráfico está representado na Figura 1.

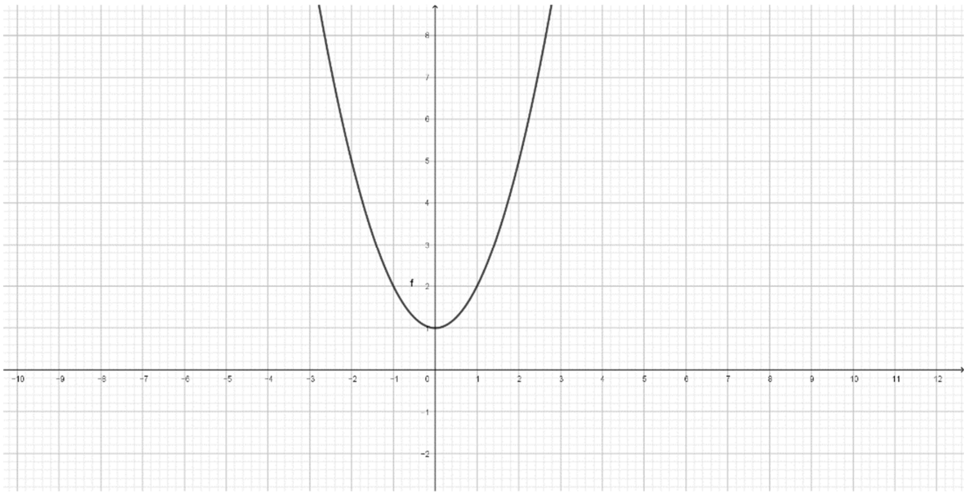


Figura 1. Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 1}$

Analisando a Figura 1, vê-se que o problema inicial não tem solução, uma vez que o gráfico de $f(x)$ não toca o eixo das abscissas.

Buscando uma aproximação entre o que foi descrito e o modo de analisar as vivências da perspectiva fenomenológica, temos que os vários modos de intuir o objeto apresentado em (1) constituem apresentações adumbrativas, aparições, para o sujeito o qual as mantêm unidas por meio de um processo de síntese, resultando, assim, na possibilidade de um ou diferentes *noemas* ou sentidos ou significados, vale dizer, a parte substantiva da vivência. Estes significados, por sua vez, são formas de apreensão do objeto, o percebido, como no caso de uma equação matemática, pois poderia ser o recordado, o imaginado etc., se não estivéssemos falando de um objeto presente na esfera dos sentidos do sujeito.

Num esforço de síntese dos sentidos das faces de nossa experiência com (1), temos que em (2), (4) e (5), encontramos a forma de apreensão: a equação proposta não tem solução; em (3), a forma de apreensão: se houver solução, ela está no conjunto {-1,1}. Veja que, ainda que chegando a sentidos idênticos em (2), (4) e (5), os processos cognitivos dirigidos a esse objeto não foram idênticos. Por outro lado, quando se chegou, em (3), ao significado –1 ou 1, chegou-se a uma forma de apreensão que inclui, alternativamente, dois elementos de um conjunto, mas isso foi feito por atos de construção de sentido, *noesis*, quer dizer, por processos particulares de apreensão dos *noemas*. Os atos empíricos que o sujeito realiza num longo movimento de compreensão de uma ideia não são a própria ideia, uma vez que esta é um conteúdo ou significado que não depende dos atos do sujeito: "vários *noesis* diferentes, podem estar referidos a um só e mesmo *noema*" (CHAUÍ, 2000, p 8). Procuramos descrever aqui a vivência dinâmica de criar, recriar, significar, ressignificar objetos em face de atos de uma consciência intencional, cujo sentido se faz pelas correlações *noético-noemáticas*. Este exemplo nos permite retomar o que dissemos no início desta seção, no estudo da Álgebra não devemos olhar apenas para os símbolos e para o jogo simbólico, mas através dos símbolos para desvelar o que por eles é mencionado. Percebemos por meio deste exercício que na equação $x^2 + 1 = 0$ há uma menção que, conforme os atos do sujeito do conhecimento, remete-o a diferentes mencionados.

No caso da vivência reflexiva da equação (1), ela não pode ocorrer sem que o sujeito revisite os conceitos de incógnita, de igualdade, os significados dos símbolos aritméticos, tais como os sinais indicativos das quatro operações, além do conceito de potência, de área e de funções. Revisitar tais conceitos significa torná-los disponíveis à consciência a cada momento em que seus significados forem exigidos, ou seja, dar espaço a retenções, possibilitando assim uma vivência simultânea de fases da percepção. Nesse processo, a consciência projeta-se continuamente, desde o instante inicial da percepção, até o instante presente que, por sua vez, expande-se ao longo da vivência, como um foco de luz sobre o objeto visado. Este mantém a sua identidade por meio de um *continuum* entre cada impressão originária e sua retenção. Tal horizontalidade é percebida à medida que um determinado momento presente da análise da equação requer que sejam trazidas à lembrança conceitos matemáticos já compreendidos, ao mesmo tempo que projeta, protensiona, os momentos futuros, o que gera uma expectativa de solução do problema.

As operações realizadas permitem que se perceba os processos lógicos que se operam sobre a equação (1) e conduz-nos a um conjunto de possíveis resultados para ela, mas como nem todo processo de ida, "se então", replica-se num processo de ida e volta, "se e somente se", verifica-se que as possibilidades encontradas no caminho de ida não se confirmam, necessariamente, como sua solução. Esses diversos modos de estudar a equação, que compreendem olhares a partir de diferentes pontos de vista, ou seja, de diferentes perspectivas, e que por isso mesmo possibilitam diferentes percursos pelos quais se pode tentar encontrar uma solução foram possibilitados pela adoção de uma postura investigativa que permitiu transpor a conclusão inicial de uma não solução e tratou a resolução não apenas de forma procedimental, mas abriu possibilidades para se discutir o que foi solicitado no enunciado.

Tendo trilhado o caminho da descrição, ainda que lacunar, do processo de vivência de um objeto matemático, é possível perceber que aquele sujeito imaginário que estava no início deste exercício, o professor de Matemática que apresentasse irreflexivamente a impossibilidade de solução para a equação, não estaria distante da verdade empírica, mas estaria adotando um olhar ingênuo, pouco reflexivo, sobre um objeto do conhecimento cuja complexidade exige que ele seja percebido em seus vários momentos. As muitas formas, e não as únicas, de experienciar o problema algébrico expandiram a vivência para os campos da Geometria, das funções, do cálculo diferencial e, se eliminarmos do enunciado a parte que solicita a busca do resultado no conjunto dos números reais, ainda teríamos à disposição o universo dos números complexos.

Esse modo de apresentar o conteúdo não como mero conteúdo, mas como base para a criação de novas possibilidades de compreensão, seria uma forma de apresentar o conhecimento não como algo dado, mas como um caminho a ser percorrido ao longo do movimento de ensino e aprendizagem. Trata-se, esta experiência, de uma postura investigativa que questiona o que é uma equação, bem como as possibilidades que se abrem para sua resolução.

Para além do simples informar que a equação não tem solução, portanto, os processos descritos desvelam os modos pelos quais essa impossibilidade pode ser experienciada pelo voltar-se para a Matemática em si, que implica trilhar os caminhos abertos pelo pensar algébrico, sem a preocupação excessivamente prática que nossa leitura da BNCC evidenciou. A nossa reflexão mostra um modo de ver a Álgebra que vai além de suas simples aplicações, já que elas não são suficientes para darem sentido ao que se faz matematicamente.

# 4. A ÁLGEBRA COMO UMA TAREFA EDUCACIONAL

Na seção anterior, constatamos que o ensino da Álgebra tem sido tratado, a julgar pelo que regem os documentos oficiais, de um modo estritamente pragmático, tecnicista, a ponto de se recomendar que a Matemática não seja vista em si, mas como ferramenta para resolução de problemas práticos. Nem sempre isso foi assim. Não há muito tempo, houve um movimento, por assim dizer, oposto: o “Movimento da Matemática Moderna” (MMM), cuja proposta era privilegiar o formalismo, o que também poderia trazer problemas para o ensino, segundo veremos na obra de Freudenthal, que conforme compreendemos, contempla uma visão que se afasta dos extremos, ora o pragmatismo excessivo, ora o formalismo excessivo.

Nesta seção, teceremos considerações a respeito de duas partes do livro *Mathematics as an educational Task*, de Hans Freudenthal. Analisaremos os capítulos XIII “Development of the Number Concept – The Algebraic Method” e XIV “Development of the Number Concept – From the Algebraic Principle to the Global Organization of Algebra”. Neles, Freudenthal faz críticas à Educação Matemática da segunda metade do século XX, justamente aquela em que predominava o MMM, movimento que também esteve presente no ensino de Matemática brasileiro. Como o Movimento da Matemática Moderna não é objeto deste trabalho, não discutiremos suas motivações, os atos de seus protagonistas, as suas implicações, o seu alcance, suas oposições e numerosos outros aspectos, mas nos concentraremos naquilo que nos ajudará a refletir sobre ensino da Matemática e o pensamento algébrico, bem como sobre algumas ponderações que possibilitarão a compreensão da crítica, empreendida por Freudenthal (1973), ao ensino da Matemática decorrente daquele movimento.

Nosso interesse, nesta seção, é apresentar modos de ver o ensino de Álgebra pautado pelas reflexões de Freudenthal que poderiam agregar aos processos de ensino e aprendizagem outras dimensões que não aquelas excessivamente pragmáticas que identificamos em certos pontos da BNCC. Esta alternativa procura compreender o que é mencionado pelos símbolos, uma leitura que busca evidenciar aquilo que vai além do jogo simbólico, além do uso irrefletido de letras e símbolos, das meras regras operatórias da linguagem algébrica.

O capítulo XIII encerra uma crítica a conteúdos, a autores de livros didáticos e a formas de ensinar Matemática, mais especificamente à tríade: “o quê”, “por meio de quem" e "como" era ensinada a Matemática na época. O "o quê", que se refere ao conteúdo, é visto como inadequado por uma série de razões que serão discutidas a seguir; "por meio de quem", o livro e o sistema escolar, são considerados impróprios uma vez que propõem, para o ensino, os conteúdos de forma irrefletida; e o "como", o método, também é criticado porque aos alunos são dados certos conceitos já prontos.

Segundo Búrigo (2006, p. 39), nos anos 1960, o "ensino de matemática era valorizado, no discurso de organismos governamentais e de matemáticos europeus e norte-americanos, como elemento de uma formação científica que teria continuidade no ensino superior". Pretendia-se, assim, uma aproximação entre a Matemática ensinada no secundário[44] e aquela estudada no ensino superior. Essa aproximação deveria ocorrer, naquele movimento, segundo a autora, em termos conceituais, metodológicos e de linguagem. Do ponto de vista do conteúdo, acreditava-se que a teoria dos conjuntos, tida como um elo entre as diversas matemáticas, por exemplo entre Álgebra, Geometria e Aritmética, possibilitaria tal empreendimento. Esse programa de ensino cujo sentido

> de aproximação ou adaptação à matemática universitária expressou-se com particular veemência em algumas ênfases presentes no discurso do movimento, relativas: ao rigor, à precisão da linguagem e à correção matemática das abordagens pedagógicas; às generalizações e à unidade da matemática como disciplina acadêmica; à compreensão das relações de necessidade e possibilidade entre axiomas e proposições decorrentes. (BÚRIGO, 2006, p. 39).

O rigor[45], a precisão da linguagem, a capacidade de dedução, de abstração, entre outras habilidades, intencionados naquele movimento, não necessariamente eram habilidades que poderiam ser desenvolvidas nos alunos da educação básica e, portanto, o movimento encontrou forte oposição e entrou em declínio no fim dos anos 1970.

---

[44] Essa nomenclatura, secundário, designava, naquela época, a etapa escolar que corresponde ao atual Ensino Médio.

[45] O termo "rigor" é frequentemente utilizado em Husserl em um sentido que já discutimos na fundamentação teórica deste trabalho, ou seja, diz respeito à clarificação de conceitos e, portanto, implica uma atitude reflexiva. Esta compreensão do conceito de "rigor" não é a mesma que a adotada pelo MMM. Conforme entendemos, Freudenthal sugere que naquele movimento ocorria um "pseudorrigor", uma vez que o ensino de Álgebra daquele período, por vezes, ocorria de forma irrefletida, ou seja, sem que se levasse em conta as especificidades da linguagem algébrica, bem como o estágio cognitivo do educando e recaindo, assim, no jogo simbólico, em uma mera técnica, um tecnicismo. Por vias opostas, corria-se o risco de se chegar àquele mesmo pragmatismo, o excesso de valorização da roupagem de símbolos, que já apontamos no estudo da BNCC.

> No Brasil, bem como em diversos países, a implantação da Matemática Moderna nas escolas gerou intensa polêmica e o declínio do movimento veio acompanhado de uma obra que proclamava o Fracasso da Matemática Moderna (Kline 1976). Kline constrói argumentos que se contrapõem aos argumentos defendidos pelo MMM com o objetivo de "corrigir" dificuldades no ensino tradicional da Matemática como a memorização. Assim, o autor questiona que pilares do MMM – abordagem dedutiva (lógica Matemática), rigor, linguagem Matemática – possam efetivamente superar as dificuldades do currículo tradicional. (OLIVEIRA, 2006, p. 87).

Não apenas a obra de Kline, *O Fracasso da Matemática Moderna*, contribuiu para o declínio do movimento, mas conjecturamos que as análises de Freudenthal (1973), pela sua importância como matemático e educador, também prestaram suas contribuições. Ao tecer um panorama histórico sobre o ensino de Álgebra, Freudenthal (1973) aponta que uma das características clássicas desse ensino é o cálculo literal. A esse respeito diz que "até há alguns anos [antes do MMM], didáticos e autores de livros didáticos sabiam muito bem o que era introduzir letras" (FREUDENTHAL, 1973, p. 288, tradução nossa)[46]. A introdução à Álgebra era cuidadosamente planejada não apenas pelos autores, mas também pelos professores, que sabiam que essa disciplina poderia, facilmente, tornar-se um jogo, de 26 letras, sem sentido (FREUDENTHAL, 1973, p. 288).

Um processo lento, historicamente desenvolvido, de iniciação à Álgebra foi abruptamente interrompido pela Nova Matemática que, na concepção de Freudenthal, era propagada por autores ignorantes ou com espírito comercial, a quem chamou de "parasitas da Nova Matemática" (FREUDENTHAL, 1973, p. 290, tradução nossa)[47]. Uma característica predominante desse movimento, na visão do autor, é a de que a Matemática, era fortemente dependente da teoria dos conjuntos. Por sua vez, esta teoria, no MMM, era exemplificada, frequentemente, por meio da utilização de uma coleção de letras. Ocorre que, segundo Freudenthal (1973), a razão dessa forma recorrente de abordar esse conceito matemático é que, quem assim procede, não sabe, de fato, o que ele é e o objetivo dele na "Matemática genuína" (FREUDENTHAL, 1973, p. 288, tradução nossa)[48], Matemática tomada aqui como ciência na civilização ocidental, de modo que acaba inventando algumas aplicações que não contemplam

---

[46] *Up to a few years ago didacticians and textbook authors were very much aware what introducing letters meant.*
[47] *parasites of New Maths*
[48] *genuine mathematics*

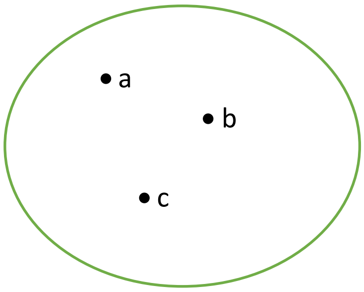
os conjuntos numéricos, porque esses devem ser introduzidos, justamente, por meio de conjuntos. Resta, assim, o apego às coleções formadas por letras (FREUDENTHAL, 1973, p. 288-289). Ocorre que na linguagem algébrica, as letras servem para mencionar diferentes tipos de objetos, como incógnitas, variáveis, números gerais, nomes de conjuntos, e não apenas como elementos de conjuntos. Esse modo restrito de tratar o uso das letras ofusca, portanto, o entendimento da presença desses símbolos na linguagem algébrica em seus diferentes modos de aparição.

Quando Freudenthal (1973) fala sobre o objetivo do conceito de conjuntos na "Matemática genuína", provavelmente refere-se ao fato de que esses objetos têm a finalidade de expressar a ideia de agrupamento de elementos com propriedades compartilhadas, o que permite entender as características dos seus elementos particulares. Por exemplo, quando se fala que um objeto pertence ao conjunto dos triângulos da Geometria Plana, já se sabe que esse elemento tem três lados, tem três ângulos, que a soma desses ângulos tem 180 graus entre outras particularidades, mesmo sem estudá-lo especificamente.

Em síntese, o uso dos conjuntos de letras, tão característico da Nova Matemática, constituiu, na visão do autor, um retrocesso porque seus proponentes desconsideraram que os professores anteriores a ela já faziam grandes esforços na tentativa de ajudar os alunos a entenderem que nenhuma fórmula algébrica é significativa, a menos que se saiba que as letras que a compõem são correlatas àquilo que é formulado na expressão, vale dizer, àquilo que ela diz respeito para o objeto de conhecimento que ela menciona. Por exemplo: em uma fórmula algébrica como $A(l) = l^2$, as letras só ganham sentido se compreendidas em função do objeto matemático a que elas se referem, neste caso consideramos um quadrado, sua área e seu lado. Fora do entendimento da situação em que foram propostas, são apenas letras. Desse modo, tratar conjuntos de letras como pretexto para realizar operações com essas coleções é um modo restrito de compreender a participação das letras na linguagem algébrica. Esse afastamento das fórmulas algébricas daquilo que lhes é correlato está relacionado à excessiva valorização da técnica, procedimento, aliás, criticado por Husserl (2012) e já discutido na subseção 2.2, "A presença da linguagem algébrica no processo de tecnicização", deste trabalho. Ressalta-se, assim, a necessidade da compreensão dos elementos que habitam uma determinada fórmula algébrica e da correlação desses elementos com os demais que integram a expressão.

Para o autor, o mau uso das letras na teoria dos conjuntos, isto é, quando elas são usadas sem significado algum, representando apenas a si mesmas ou pontos em um diagrama de Venn, pode ocasionar um bloqueio que impedirá o aprendiz de entender, por exemplo, a letra como uma variável que por isso menciona não um objeto específico, mas qualquer um que pertença a um determinado domínio. Freudenthal (1973, p. 291-292) descreve uma situação hipotética que contribui para o entendimento desse possível bloqueio. Essa situação pode ser compreendida a partir do seguinte enunciado:

Dado o conjunto $\{a, b, c\}$ com seu diagrama de Venn ilustrado a seguir,




façamos a seguinte pergunta: $x \in \{a, b, c\}$?

A resposta matematicamente correta é:

$$x \in \{a, b, c\} \leftrightarrow x = a \lor x = b \lor x = c,$$

isto é, $x$ pertence a esse conjunto se, e somente se, $x$ for um dos elementos $a$, $b$ ou $c$. Freudenthal argumenta, contudo, que o autor do livro didático não apresentava uma resposta para a questão. Pelo contrário, o estudante era submetido a uma lavagem cerebral, "*brainwashed*" (FREUDENTHAL, 1973, p. 292), para aceitar que $x$ era apenas outra letra ou outro local definitivo não indicado no diagrama de Venn e, certamente, o aluno responderia que não pertence ao conjunto.

A letra, nesse tipo de abordagem didática, passa a não significar nada, não indica um número ou qualquer outra coisa e nem pode ser substituída por outra $a$ não é nada além de $a$; $b$ não é nada além de $b$; e $c$ não é nada além de $c$. Isso dificulta o entendimento do conceito de variável ou do uso da letra na linguagem algébrica, cuja menção não está nela, mas é através dela que se chega ao mencionado. Esse tipo de abordagem pode resultar em obstáculos epistemológicos, entendidos aqui na concepção de Bachelard (1996, p. 17, grifo do autor), quando afirma que "o ato de conhecer dá-se *contra* um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização". Para exemplificar, ainda, um possível efeito desses obstáculos, pode-se considerar um aluno que não tenha compreendido o papel das letras na linguagem algébrica ("conhecimento mal estabelecido") e por isso não compreendeu que é possível enxergar através delas. Posteriormente, ao estudar as equações precisará compreender que uma letra representa uma incógnita, um valor a ser determinado. Já quando estudar as funções, precisará compreender que a letra, neste contexto, também não é ela própria, mas uma variável que representa um número ou um objeto matemático que pertence ao domínio de validade de uma função.

Na obra de Freudenthal em questão, ainda que ele não explicite a interrogação "o que significa o uso de letras em Matemática?", não só essa pergunta, mas também as possibilidades de respostas a ela estão presentes, implicitamente, em seu texto, segundo nosso entendimento. O autor analisa a questão do ponto de vista do rigor matemático, do ponto de vista do ensino e também da perspectiva de quem aprende, colocando-se no lugar do aluno. A Matemática e seu ensino, portanto, são observados de forma análoga a alguém que fotografa uma paisagem por uma lente grande angular e, por isso, Freudenthal amplia consideravelmente o campo de visão do objeto de sua obra. Essa perspectiva crítica remete-nos àquela atitude de olhar o objeto do conhecimento e buscar intuí-lo para compreendê-lo, isso quer dizer que, no contexto matemático, as letras ($a, b, c$ , $x$ , …) não devem ser tomadas como elas mesmas, apenas como elementos de conjuntos, que se mostram objetivamente num diagrama, mas podem ser tomadas também como variáveis, incógnitas ou representantes de outros elementos. Desse modo, uma das características da linguagem algébrica seria essas múltiplas possibilidades associadas aos símbolos que a compõem, os quais não se prestam a uma leitura apenas. A atitude crítica proposta por Freudenthal vai de encontro tanto à abstração excessiva da nova Matemática quanto à tendência que analisamos na BNCC, em que se estimula a não estudar a Matemática pela Matemática, mas como uma técnica para resolução de problemas.

Simultaneamente à preocupação com as asserções matemáticas do ponto de vista conceitual, deve-se entender que nem toda Matemática conceitualmente correta é adequadamente comunicada do ponto de vista didático. Nesse sentido, autores de livros didáticos, cujas proposições são matematicamente verdadeiras, não necessariamente as expõem com uma clareza aceitável. A esse respeito, Freudenthal diz que existem verdadeiras monstruosidades didáticas (FREUDENTHAL, 1973, p. 291).

Feita essa crítica aos livros didáticos, sobre a introdução equivocada à teoria dos conjuntos e ao uso das letras, Freudenthal prossegue abordando a questão sob diversos enfoques: letras não significando nada além de elas mesmas; como um nome próprio; como nomes ambíguos ou números indeterminados; como incógnitas e como variáveis. Dessa forma, pode-se dizer que o autor coloca em suspensão esse objeto e procura entender, sob múltiplas perspectivas, o significado das letras e de suas formas de uso na Matemática, evidenciando aquilo que se mostra.

Sobre as especificidades do uso das letras, Freudenthal (1973) considera ainda que elas podem ser usadas, por exemplo, como nome próprio para nomear objetos bem específicos, como no caso de $\pi$, que representa a razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, ou *A* para representar um ponto no plano. Já na forma de um nome ambíguo, seu uso assemelha-se àquele da linguagem cotidiana, por exemplo "homem" é um nome que pode ser dado a todos os homens, isto é, quando assim usadas, as letras nomeiam objetos do mesmo tipo, indeterminados. Freudenthal(1973), no entanto, chama atenção para um aspecto didaticamente fraco dos nomes algébricos ambíguos, qual seja: o seu significado, o tipo de coisa que eles nomeiam, deve ser mencionado explicitamente e repetidamente, por exemplo, deve-se enfatizar que "a" é uma abreviação do número "a" (o número a) ou que "A" é uma abreviação do ponto "A" (o ponto A) (FREUDENTHAL, 1973, p. 296). Essa forma aproxima o uso das letras como variáveis. Finalmente, no sentido de incógnita, uma letra refere-se ao termo desconhecido em uma equação.

O uso das letras, portanto, deve ser pensado e planejado não apenas do ponto de vista dos critérios da Matemática, isto é, não basta estar matematicamente correto, mas tem que ser didaticamente bem elaborado, de modo a possibilitar que o aluno use-as não de forma mecânica, mas dando-se conta de que elas sempre significam alguma coisa e que diferentes letras podem, eventualmente, significar a mesma coisa, como no caso de Londres e a capital da Inglaterra, que são formas diferentes de se referir ao mesmo ponto do mapa (FREUDENTHAL, 1973, p. 295).

Não apenas as letras constituem uma preocupação para Freudenthal, mas toda a simbologia que compõe a linguagem algébrica. A clareza com que essa simbologia deve ser empregada na escrita matemática também é objeto de reflexão do autor, como se pode ver quando trata da questão das peculiaridades do sinal de igual, momento em que evidencia alguns equívocos que ocorrem, mesmo em livros conhecidos pelo seu rigor matemático, ao empregarem o sinal de igualdade "=". Para ilustrar o mau uso desse sinal, Freudenthal (1973, p. 300) apresenta os seguintes exemplos, todos extraídos, segundo ele, de um famoso livro didático:

$$a\ soma\ \mu(f) = \textstyle\sum_{x \in X} \alpha(x) f(x) \ldots,$$

$$a\ integral\ I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \ldots,$$

$$a\ união\ A = \cup_n A_n \ldots,$$

$$a\ função\ f = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \text{ é } integrável$$

$$o\ conjunto\ dos\ elementos\ x \in X\ tal\ que \ldots$$

$$o\ conjunto\ M \in \Phi \ldots$$

$$o\ conjunto\ aberto\ G \subset X \ldots.$$

Pergunta, na sequência, qual é o erro dessas expressões. O autor explica que sinais de igualdade (=), inclusão (⊂) e pertinência (∈), indicam declarações que podem estar certas ou erradas. Contudo, continua ele, quando lemos alguma coisa como “a soma...”, “a integral...”, “o conjunto aberto...”; então, no lugar dos três pontos, é esperada “uma soma”, “uma integral” ou um “conjunto aberto”. Ao que parece, Freudenthal sugere que, após a expressão “*the sum*”, do exemplo anterior, deveria aparecer, de fato, uma soma, no entanto, é exibido o símbolo $\mu(f)$ e, somente após o sinal de igualdade, é que aparece a soma. O mesmo equívoco ocorre com as outras expressões do exemplo.

Sobre expressões como 2 + 7 = 9, o autor argumenta que não devem ser entendidas como um comando para somar dois números e verificar que o resultado é o que está do lado direito da igualdade, algo como “dado 2, eu adiciono 7 e o resultado é 9”. A expressão, diz o autor, deve ser lida como uma afirmação que declara dois números como sendo iguais (FREUDENTHAL, 1973, p. 301). Em sua argumentação, interpretar 2 + 7 como um número é um pensamento genuinamente algébrico. Essa interpretação não é uma novidade quando se lida com números racionais, por exemplo, o número 3/7, de fato, é entendido como um número racional, não como um comando para dividir 3 por 7. Sendo assim, interpretar 2 + 7 como um problema primordialmente aritmético pode ocasionar o não entendimento de expressões como $a + b$. Não se pode interpretar $a + b$ como um comando para adicionar $a$ e $b$, mas apenas como a soma de $a$ e $b$, que é um número se as parcelas forem números (FREUDENTHAL, 1973, p. 301). Husserl (1962) ao tratar da objetualidade em geral, ensina que nas teorias algébricas, o sinal de $+$ , por exemplo, não deve ser entendido como o sinal de adição usual da aritmética, mas como uma conexão em geral em que é válida, entre outras, a lei $a + b = b + a$ . Essa questão será retomada neste trabalho na seção 6, “A Álgebra na perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”.

Sobre o sinal de igualdade Freudenthal (1973, p. 301-302) exemplifica que, em suas aulas, quando usa a lei associativa $(a + b) + c = a + (b + c)$, para substituir $a + (b + c)$ por $(a + b) + c$, em alguma expressão ou outra, quase sempre acontece de um aluno se opor a essa maneira de fazê-lo. A justificativa apresentada pelo aluno é a de que ele, enquanto professor, sempre substitui o membro do lado esquerdo pelo membro do lado direito, ao invés de fazer o contrário. A explicação, diz o autor, para objeções como essas, está nos maus hábitos que ocorrem no ensino da Matemática. Sobre isso, pondera que a solução de uma equação linear é sempre escrita como $x =$ ... e nunca como ...$= x$. Uma equação quadrática é sempre apresentada também deste modo, por exemplo, a equação $x^2 - 3x = 0$ nunca é apresentada como $0 = x^2 - 3x$ (FREUDENTHAL, 1973, p. 303)[49].

Especificamente sobre a linguagem das fórmulas algébricas, Freudenthal (1973) considera que o aprendiz deve ser tão fluente no emprego delas como o é no trabalho com textos, “[o] aluno deve aprender a ler e escrever fórmulas algébricas exatamente como lê textos em sua língua materna”[50] (FREUDENTHAL, 1973, p. 304, tradução nossa). A esse respeito, novamente faz uma crítica aos autores de livros didáticos, afirmando que alguns desses livros estimulam conscientemente o processo de aprendizado dessa linguagem, enquanto outros se comportam como se esse problema não existisse (FREUDENTHAL, 1973, p. 304).

Há que se considerar que, embora o aluno deva ser fluente na leitura de fórmulas algébricas, o desenvolvimento dessa habilidade não é simples. Além disso, esse tipo de leitura é exercitado com uma frequência muito menor que a da leitura de textos na linguagem vernacular. A linguagem algébrica, por sua vez, é dotada de características sintáticas próprias e convenções que nem sempre facilitam sua compreensão e, por conseguinte, o seu aprendizado. Isso requer do professor a

[49] Para um entendimento mais aprofundado a respeito das considerações do autor sobre a relação de igualdade, é recomendável a leitura da obra *Didactical phenomenology of mathematical structures* (FREUDENTHAL, 2002, p. 477- 482).

[50] *The pupil must learn to read and write algebraic formulae just as he reads texts in his mother tongue.*

sensibilidade de perceber em que grau essas particularidades constituem ou não obstáculos para o entendimento dela.

Algumas características dessa linguagem são exemplificadas no texto, o autor faz isso analisando expressões como $cd = dc$. Se trocarmos $c$ por $a + b$, o complexo de sinais $a + b$ deve ser cercado por parênteses. Se, no entanto, em $ab$ substituirmos $a$ por $-a$ , torna-se $-ab$, sem a necessidade de parênteses. Contudo, se $b$ for substituído por -$b$, não se torna $a - b$, mas $a(-b)$. “Isso não é louco?”, questiona enfaticamente Freudenthal (1973, p. 305, tradução nossa)[51]. Neste exemplo fica claro que os processos não são executáveis, com o mesmo efeito, sem estarem correlacionados à natureza dos objetos e às regras com as quais se opera segundo essa natureza. Por conta dessas especificidades, Freudenthal insiste tanto em dizer que a Álgebra não é um jogo com 26 letras, pois por mais que se possa ser criativo em um jogo, como no xadrez, por exemplo, as regras dele limitam muito mais os jogadores do que as regras de uma linguagem, tão complexa como a algébrica, limitam. Isso explica, em certo sentido, como a Álgebra liberta a Aritmética de toda realidade intuível, conforme citação de Husserl na página 69 deste trabalho. Para o matemático, a estruturação sistemática de expressões algébricas por meio de parênteses e convenções é o que distingue a linguagem algébrica da linguagem materna, esta faz-se entender mesmo sem esses sinais, por exemplo, em “chocolate quente e sorvete”, está claro que o chocolate não se estende ao sorvete, já em “três dias e noites”, o numeral “três” aplica-se a dias e noites (FREUDENTHAL, 1973, p. 306). Sem nenhum sinal adicional, essas sentenças permitem compreender exatamente o que se quer dizer com elas. Façamos uma comparação deste último exemplo com expressões semelhantes na linguagem algébrica: na sentença “três dias e noites”, três será substituído por *a*, dias por *b* e noites por *c*. Se queremos dizer que o três refere-se aos dias e às noites, então devemos expressar na forma $a\,(b + c)$. Notemos que, na linguagem cotidiana, em nenhuma das expressões foi necessário qualquer tipo de separador. Já no exemplo algébrico sim. É, portanto, por meio do uso adequado desses separadores, entre outros recursos, que os textos algébricos são estruturados. Ao falar em uso adequado, aquele que decorre do conhecimento, Freudenthal convida-nos a estarmos dispostos a uma aproximação entre a linguagem algébrica e a do cotidiano no sentido de perceber tanto suas semelhanças quanto

[51] *Isn’t this crazy?*

suas diferenças, num exercício de reflexão que foge ao automatismo dos processos algorítmicos.

As expressões algébricas são, portanto, estruturas linguísticas peculiares, por isso o professor deve ter muito conhecimento dessas peculiaridades. Com relação ao mercado editorial de seu tempo, o autor mostra certa indignação com a qualidade dos livros didáticos, que nem sempre atentam para os problemas apontados. Em sua visão, é necessário o desenvolvimento de um plano didático bem elaborado, que prossiga com escalas crescentes de dificuldade. Um material didático projetado dessa maneira raramente é encontrado (FREUDENTHAL, 1973, p. 309).

Em diversas passagens do texto, o autor mostra uma preocupação com a questão do ensino de Álgebra e procura refletir sobre ele, evidenciando o que ela é, sua linguagem, seu modo de ser em uma perspectiva voltada para o seu ensino. Essas reflexões dialogam com nosso problema de pesquisa à medida que contribuem para o entendimento de um modo de ser da Álgebra. A importância de se desvelar as peculiaridades dessa linguagem e seu uso adequado, com conhecimento, bem como de suas fórmulas na resolução de problemas, uso em que se compreenda o como e o porquê de sua aplicação, deve ser inerente ao ensino e aprendizagem, pois essa atitude pode impedir que a Álgebra torne-se um jogo simbólico sem sentido para o educando. Essas reflexões sobre o eventual esvaziamento tanto do sentido da Álgebra quanto do seu ensino valem para o momento em que o autor escreveu suas reflexões, mas valem também para o nosso momento e para o propósito da nossa investigação sobre os modos de ser da Álgebra.

No capítulo XIV, "O Desenvolvimento do conceito de números, o método algébrico: do princípio algébrico para a organização global da Álgebra" (Freudenthal, 1973, p. 312-332)[52] , que analisaremos em seguida, a atenção do matemático holandês volta-se para as relações mais profundas entre a Aritmética e a Álgebra e como esta fundamenta a noção de operação sobre números e outros objetos, ou seja, como ela fundamenta a Aritmética e nos ensina a operar com os diferentes objetos matemáticos. Esse movimento de compreensão revela-nos, também, um dos modos de ser da Álgebra, aquele que possibilita a generalização da noção seja de números, seja de operações. Além disso, amplia o universo de objetos matemáticos, aqueles que correspondem às multiplicidades, os objetos definidos axiomaticamente,

[52] *Development of the Number Concept – From the Algebraic Principle to the Global Organization of Algebra.*

conforme trataremos na seção 6 deste trabalho “A Álgebra na perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”. Trata-se, a abordagem de Freudenthal, de uma análise que desvela e descreve os fatos mais significativos deste modo de ser da Álgebra, ou seja, uma análise, por assim dizer, fenomenológica.

No capítulo que analisaremos, Fredenthal (1973) amplia as críticas ao modo como o processo de desenvolvimento de habilidades matemáticas organiza-se, argumentando que certas regras intuitivas e necessárias em níveis básicos de aprendizado, em dado momento são reorganizadas abruptamente para o estudante, como se não pudesse lhe parecer estranho que essas regras devam integrar, no âmbito do domínio da linguagem algébrica, um conjunto de procedimentos que, nem sempre, estão ligados a atividades práticas. Além disso, aponta outros fatores que podem complicar o que ele chama de extensão dos domínios numéricos. Certas propriedades de conjuntos de números são extensíveis a conjuntos que deles derivam e outras não. Por exemplo, a transição dos números naturais para os inteiros e para os racionais positivos seguem um padrão. No entanto, quando fala que os números racionais são menos intuitivos do que os negativos, compreendemos que esteja referindo-se à representação dos racionais, uma vez que essa representação pressupõe a ativação de operações aritméticas que lhes dão sentido. Por exemplo, na reta numérica, para representarmos o número ¾, um dos possíveis procedimentos é dividir 3 por 4, para a partir do resultado, 0,75, encontrar sua localização, que deverá, portanto, estar entre 0,5 e 1. Existem ainda outros modos que permitem a localização desse número na reta, mas que ainda assim requerem a ativação de certas operações, isto é, ela não é dada a um primeiro olhar.

Já quando trata das operações potenciação e radiciação e da proximidade das leis que regem essas operações e as que regem os logaritmos, Freudenthal aponta a necessidade de, em matéria de procedimentos didáticos, adotar a mesma lógica da extensão a qual se referiu para os conjuntos numéricos, neste caso, quer dizer que as propriedades e procedimentos operacionais com logaritmos devem ser introduzidas após a potenciação e radiciação terem sido amplamente discutidas. Explica que da radiciação emerge uma vasta variedade de novas leis aritméticas, as quais se assemelham às da potenciação. Mesmo que inicialmente as leis logarítmicas pareçam muito diferentes das leis das potências, alguns procedimentos didáticos podem ser utilizados para diminuir as dificuldades que possam aparecer na compreensão dessas leis. O matemático conclui essa ideia retomando aquela que parece ser o núcleo das ideias por ele apresentadas, qual seja, a da extensão, “essa extensão é realizada pelo princípio algébrico, embora agora não haja novos objetos a serem introduzidos, mas operações a serem interpoladas e extrapoladas com certas leis preservadas” (FREUDENTHAL, 1973, p. 315, tradução nossa)[53], nesse caso, refere-se à extensão das leis logarítmicas a partir das leis das potências.

Podemos sintetizar, desse modo, três aspectos relevantes ao ensino da Matemática que dizem respeito à problematização deste trabalho. O primeiro, aquele que remete ao fato de que as novas operações derivam daquelas primeiras já estudadas e não se trata, portanto, de apresentar aos educandos novidades, mas chamar a atenção deles para, por assim dizer, a extensão das regras primeiras aos assuntos que sucedem: multiplicação, potenciação, logaritmo e assim por diante. O segundo aspecto é tratado em todas as instâncias: em vez de apresentar tabelas, é necessário estimular a compreensão de como são construídas essas tabelas, no caso dos logaritmos, por exemplo. Uma excessiva visão da Matemática como instrumentalização poderia levar ao excessivo uso de tabelas, por exemplo, as tabelas logarítmicas, atualmente substituídas pelo uso de calculadoras, e a um distanciamento da compreensão de como essas tabelas são construídas. O terceiro aspecto que se infere das observações de Freudenthal é aquele que discutimos quando apresentamos nosso objeto de estudo, a Álgebra: compreender que ela permeia diversas áreas da Matemática, por exemplo, a Aritmética, sem, contudo, deixar-se confundir com essas áreas.

Em consonância com o objetivo de apontar caminhos para o processo de organização da Álgebra, Freudenthal reiterou as críticas ao ensino desta área da Matemática, no contexto da Nova Matemática. Essas críticas foram fundamentadas por meio de dois pontos: o primeiro pelo fato de que a Nova Matemática trabalhava a Álgebra na escola a partir de uma perspectiva herdada da Matemática ensinada no Ensino Superior que, muitas vezes, desconsiderava o estágio próprio do desenvolvimento escolar em que o educando estava. O segundo aspecto, conectado ao primeiro, dizia respeito ao fato de que os conceitos eram desenvolvidos, geralmente, por meio de uma organização didática padronizada, que não era construída nem pelo aluno, nem pelo professor e nem pelos criadores dos próprios livros didáticos, uma vez que estes reproduziam aquelas práticas acadêmicas na

[53] *this extending is performed by the algebraic principle, though now there are no new objects to be introduced but operations to be interpolated and extrapolated with certain laws preserved.*

construção dos materiais. A crítica de Freudenthal centrava-se na falta de reflexão sobre o ensino da Matemática e sugeria práticas indutivas, da simplicidade das partes para a complexidade do todo, e não dedutivas, da complexidade do todo para a simplicidade que se pressupõe que haja nas partes.

Mais especificamente sobre o ensino básico de Álgebra, Freudenthal discorda, em sua obra, que o conteúdo deva ser iniciado pela definição de *corpo*. Ressalta que embora existam razões pertinentes para que seja assim na universidade, não há nada que justifique esse tipo de abordagem nos níveis escolares, nem há pesquisa que respalde essa prática. Desse modo, Freudenthal argumenta sobre a má organização da Álgebra na educação básica ponderando que, no MMM, os que se consideravam inovadores enunciavam os axiomas de *corpo* assim que os alunos aprendiam as quatro operações aritméticas fundamentais e, a partir desses axiomas, continuavam dedutivamente a exposição de novas leis. Reclama que, nesse caso, o estudante não tinha permissão para organizar o assunto autonomamente e que podia acontecer que as leis prontas lhe fossem impostas em um momento em que ele ainda não sabia o que significava derivar leis umas das outras e, ainda menos, selecionar as mais importantes, ou seja, reduzir uma variedade de leis a algumas delas (FREUDENTHAL, 1973, p.315). Ao chamar esse processo de “inversão antididática”, diz que se ao aluno não fosse dada a oportunidade de organizar o assunto por ele mesmo, ao professor também não era, porque este o recebia pronto dos autores de livros didáticos, os quais, por sua vez, imitavam o que encontravam nos livros de Álgebra do nível universitário. Havia nesse contexto, evidentemente, um problema que não era simples de ser resolvido e que gerava consequências ruins para o aprendizado de Álgebra e de Matemática de um modo geral. Em sua época, o matemático levantou a questão: entender os assuntos propostos nos livros de Álgebra da universidade requer conhecimento da Álgebra escolar, mas o que fazer se esta tem sido uma cópia mal elaborada daquela? Freudenthal lamenta que graças aos inovadores, assim chamados ironicamente por ele, o essencial da Álgebra foi desviado da instrução escolar (FREUDENTHAL, 1973, p.316).

Mais importante do que a polêmica em torno da organização dos conteúdos da Álgebra nos diferentes níveis do ensino, discussão que, aliás, é extemporânea haja vista que o MMM não prosperou, interessa-nos nesta seção trazer à luz os aspectos da reflexão de Freudenthal que nos ajudam a compreender o pensar algébrico de modo ampliado, ou seja, para além daquele jogo com as letras que decorre do pragmatismo presente no modo puramente técnico de ver a Álgebra. Em toda esta seção e, mais especificamente, nesta parte do trabalho, debruçamo-nos sobre aspectos mais específicos de como a ampliação dos números obedece a leis operatórias regidas pela Álgebra, o que nos permitiu refletir sobre ela e sobre aspectos que ampliam a sua mera instrumentalização.

Nas reflexões que se seguem, argumentaremos com Freudenthal sobre como as operações aritméticas encontram fundamentação teórica nos conceitos algébricos tais como *grupos*, *corpos*, homomorfismo entre outros. Do mesmo modo como Freudenthal usou a Álgebra para fundamentar as operações, Costa (1971, p. 229-241), no capítulo "A Generalização algébrica da noção de número", desenvolve argumentos que evidenciam a Álgebra também como uma área da Matemática a qual provê sustentação teórica para a própria noção de números que, por sua vez, precede a noção de operações discutida por Freudenthal, haja vista que as operações se aplicam também aos números. Esse é, portanto, um dos modos pelos quais a Álgebra se evidencia, como sendo uma área da Matemática que provê sustentação teórica a conceitos usados em outras áreas.

As considerações de Freudenthal sobre a influência do currículo universitário na educação básica permitem ainda uma compreensão das dificuldades próprias desta etapa do ensino. Para ele, se na universidade o ensino de Álgebra poderia começar pelo conceito de *corpo*, nada autoriza assumir, sem nenhuma prova, que na escola também a Álgebra deva ser organizada desse modo. A estrutura de um *corpo* define-se a partir de duas operações: adição e multiplicação, que são regidas pelos axiomas de: *Associatividade*, *Elemento Neutro*, *Elemento Inverso* e *Distributividade.*

Estabelecendo um diálogo com o questionamento de Freudenthal sobre a Álgebra na universidade, vale a pena, neste texto, em alguma medida, argumentar sobre as razões para que, entre os conteúdos iniciais abordados nessa disciplina, possa figurar o conceito de *corpo*. Para tanto, iniciaremos com a definição de *corpo* apresentada por Lima (2010b, p. 61, grifos do autor):

*Definição (1)*: Definição de *corpo* - Um *corpo* é um conjunto $K$, munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os *axiomas de corpos*.

Recuperaremos, a seguir, a axiomática apresentada por Lima (2010b, p. 61-62).

**Axiomas da Adição**:

- *A1. Associatividade:* para quaisquer que sejam $x,\ y,\ z \in K$, tem-se $(x+y)+z\ =\ x+(y+z)$.
- *A2. Comutatividade:* para quaisquer que sejam $x,\ y \in k$, tem-se $x+y=y+x$.
- *A3. Elemento neutro:* existe $0 \in k$ tal que $x+0\ =\ x$, seja qual for $x \in k$. O elemento $0$ chama-se *zero.*
- *A4. Simétrico:* todo elemento $x \in k$ possui um simétrico $-x \in k$ tal $x\ +(-x)=0$.

**Axiomas da Multiplicação**

- *M1. Associatividade:* dados quaisquer $x,\ y,\ z \in k$, tem-se $(x.y).z\ =\ x.(y.z)$.
- *M2. Comutatividade:* para quaisquer que sejam $x,\ y \in k$, tem-se $x.y\ =\ y.x$.
- *M3. Elemento neutro:* existe $1 \in k$ tal que $1\ \neq 0$ e $x.1\ =\ x$, qualquer que seja $x \in k$. O elemento $1$ chama-se *um.*
- *M4. Inverso multiplicativo:* todo $x\ \neq\ 0$ em $k$ possui um inverso $x^{-1}$, tal que$x\ .\ x^{-1}=1$..

Segundo Lima ((2010b, p. 63), "as operações de adição e multiplicação num *corpo* $k$ acham-se relacionadas por um axioma, com o qual fica completa a definição de *corpo.*" O axioma que relaciona a adição e a multiplicação é descrito a seguir:

- *D1. Axioma de distributividade.* Dados $x,\ y,\ z$ quaisquer, em $k$, tem-se $x.(y+z)\ =x.y+y.z$.

Dos axiomas anteriores resultam boa parte das regras familiares de manipulação dos números reais. Algumas delas são encontradas em (LIMA, 2010, p.12) e, para ilustrar nossa argumentação, serão aqui recuperadas.

Da comutatividade e da existência do elemento neutro resulta que $0+x\ =\ x$ e $-x+x=0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Analogamente, $1.\ x=x$ e $x^{-1}.x\ =\ 1$ quando $x \neq 0$. A *soma* $x+(-y)$ será indicada por $x-y$ e chamada de *diferença* entre $x$ e $y$. Se $y \neq 0$, o produto $x.y^{-1}$ será também representado por $x/y$ e chamado *quociente* de $x$ por $y$. As operações $(\mathrm{x,y}) \rightarrow \mathrm{x-y}$ e $(\mathrm{x,y}) \rightarrow \mathrm{x} \cdot \mathrm{y}$ chamam-se, respectivamente, *subtração* e *multiplicação*. A divisão de $x$ por $y$ só faz sentido quando $y \neq 0,$ pois $0$ (zero) não possui inverso multiplicativo.

Se continuarmos a explorar esses axiomas, chegaremos a outras conclusões, como por exemplo à chamada “regra de sinais”, ao fato de que se o produto de dois fatores é zero, então um deles é zero e a diversas outras conclusões, que nos ensinam a manipular os números reais. Embora o conceito de *corpo* refira-se a apenas duas operações, *adição e multiplicação*, como vimos, a *subtração* e a *divisão* podem ser derivadas dessas. Talvez sejam essas algumas das razões pelas quais alguns livros universitários de Álgebra abordam inicialmente o conceito de *corpo*. Freudenthal, se não concorda explicitamente, ao menos não discorda que deva ser assim no nível superior, talvez porque, como foi exemplificado, o trabalho com o conceito de *corpo* agregue ao conhecimento operatório, que o indivíduo traz da escola, o conhecimento conceitual.

Embora a potenciação, ao menos para expoentes inteiros, não esteja longe de ser obtida por meio dessa mesma abordagem, restam ainda outras duas operações, totalizando sete na contagem de Freudenthal: *adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação* e *logaritmização*. Para ele, todas essas operações devem ser dominadas pelos alunos, algo que não é alcançado unicamente pela teoria de *corpo* e, por isso indaga: “Seria sensato restringir a álgebra escolar àquelas operações consideradas essenciais de acordo com o conceito de *corpo* e, em caso afirmativo, como as outras podem ser eliminadas?” (FREUDENTHAL, 1973, p.317, tradução nossa)[54].

O autor não apresenta uma resposta a essa pergunta, em vez disso, sugere que a Teoria dos *Grupos* comutativos seria um ponto inicial para o estudo da Álgebra mais apropriado do que a teoria de *corpo*. No entanto, caso o início seja pela definição de *corpo*, diz que um exame minucioso da adição e multiplicação no *corpo* dos racionais pode ser uma oportunidade para apresentar ao estudante o padrão da axiomática de *grupo*. Tendo em vista o desenvolvimento dos alunos, Freudenthal aconselha que seja feito uma analogia entre adição e multiplicação, tal como a que segue, na Tabela 1.

---

[54] *Would it be wise to restrict school algebra to those operations that are considered essential according to the field concept, and if so, how can the others be eliminated?*

| | |
|---|---|
| $a + b = b + a$ | $ab = ba$ |
| $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(ab)c = a(bc)$ |
| $a + 0 = a$ | $a \cdot 1 = a$ |
| $a + (-a) = 0$ | $a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$ |
| $a - b = a + (-b)$ | $a/b = a \cdot b^{-1}, b \neq 0$ |
| $a + a = 2a$ | $a \cdot a = a^2$ |
| $a + a + a = 3a$ | $a \cdot a \cdot a = a^3$ |
| $(-a) + (-a) = -2a$ | $a^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-2}, a \neq 0$ |

Tabela 1. Analogia entre a adição e a multiplicação.
Fonte: Freudenthal (1973, p. 317), adaptado.

Antes de continuarmos, vale dizer que as quatro primeiras linhas da Tabela 1, desconsiderando a ordem, correspondem aos quatro primeiros axiomas de *corpo* enunciados na *Definição (1).*

Os casos apresentados possibilitam uma analogia entre a adição e a multiplicação. É producente, segundo o autor, acrescentar alguns casos em que a analogia seja parcialmente quebrada. Por exemplo:

| | |
|---|---|
| $a > 0 \rightarrow a + a > 0$ | $a > 1 \rightarrow a^2 > 1$ |
| $a > 0 \rightarrow a + b > b$ | $a > 1 \rightarrow ab > b$ |

Tabela 2. Analogia entre a adição e a multiplicação: uma quebra parcial.
Fonte: Freudenthal (1973, p. 317-318), adaptado.

A segunda coluna da última linha (Tabela 2), ou seja, a parte que se refere à multiplicação é verdadeira apenas para os casos em que $b > 0$. A analogia nesse caso é quebrada parcialmente, uma vez que na segunda linha da primeira coluna (Tabela 2), isto é, no caso da adição, a sentença é verdadeira sempre, sem que seja necessária qualquer observação sobre $b$. Freudenthal prossegue com sua explanação enunciando a lei da distributividade (essa lei corresponde ao último axioma, axioma *D1,* da *Definição (1)* de *corpo*). Ela liga a adição e a multiplicação e não está comprometida com nenhuma das colunas, mas se for necessário escrever em uma delas, o autor sugere que seja na coluna da esquerda, em que a adição e a multiplicação já estiveram presentes. A seguir apresentaremos a Lei da distributividade conforme definida por Freudenthal (1973, p. 318).

*Definição (2)*: Lei da distributividade

$$n(a+b) = na + nb \qquad (ab)^n = a^n \cdot b^n$$
$$n(a-b) = na - nb \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Essa analogia pode ser estimulada de modo que o aluno possa, por ele mesmo, ser capaz de fazer novas deduções. Até esse ponto, o expoente $n$ deve pertencer aos inteiros, uma vez que nesses casos é fácil definir uma potência recursivamente. Para a introdução de expoentes racionais e posteriormente dos reais, o autor faz uso dos conceitos de *grupos* e homomorfismo de *grupos*. A seguir apresentaremos a definição de *grupos* dada por Gonçalves (2009, p. 119)[55].

*Definição (3)*: Definição de *Grupo* - Seja *G* um conjunto não vazio onde está definida uma operação entre pares de *G*, denotada por,

$$*: G \times G \rightarrow G$$
$$(x \times y) \rightarrow x * y.$$

Dizemos que o par $(G,*)$ é um *grupo* se são válidas as seguintes propriedades:

$$G1.\ a*(b*c) = (a*b)*c, \quad \forall\, a, b, c \in G$$
$$G2.\ \exists\, e\, G \text{ tal que } a*e = e*a, \quad \forall\, a \in G$$
$$G3.\ \forall\, a \in G, \exists\, b \in G \text{ tal que } a*b = b*a = e.$$

A operação $*$ sempre será explicitada pelo contexto. Quando se tratar de uma adição, usaremos a notação $a + b$ no lugar de $a * b$, no caso da multiplicação, por simplicidade, adotaremos $ab$. Além disso, quando a operação for a multiplicação, o *grupo* será chamado de *grupo* multiplicativo e seu elemento inverso será denotado por $a^{-1}$. Analogamente, no caso da adição, o *grupo* é chamado de *grupo* aditivo e seu elemento inverso é denotado por $-a$.

Vale observar que se tomarmos como critério de simplicidade a quantidade de operações que definem uma estrutura algébrica, então a estrutura chamada *corpo*, que deve ser munida de duas operações, é menos simples que um *grupo*, uma vez que esse requer uma única operação. Talvez seja essa uma razão para Freudenthal preferir que se inicie o estudo das estruturas algébricas pelo conceito de *grupo*.

---

[55] Esta definição de *grupos* será recuperada neste trabalho na seção 6 “A Álgebra na perspectiva husserliana: a teoria das multiplicidades”.

Na sequência, para que se compreenda a fundamentação que a Álgebra provê à operação denominada potenciação, apresentaremos a definição de homomorfismo de *grupos* de Lang (2008, p. 45-46).

*Definição (4):* Definição de homomorfismo - Sejam $G$ e $G'$ *grupos*. Um homomorfismo $f: G \to G'$ de $G$ em $G'$ é uma aplicação dotada da seguinte propriedade: para todos $x, y \epsilon G$, temos $f(xy) = f(x)f(y)$,
e na notação aditiva, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Um homomorfismo é, portanto, uma função que permite uma interação entre duas estruturas, nesse caso, entre dois *grupos*. Essa interação ocorre da seguinte forma: a imagem de $x$ operado com $y$, isto é, de $x * y$ em $G$ pela função $f$ é dada pela operação definida em $G'$, aplicada por $f$ em $x$ e $y$, isto é, $f(x) * f(y)$. Grosso modo, ela leva a operação do conjunto $G$ na operação do conjunto $G'$.

*Exemplo (1):* A lei da distributividade, enunciada na *Definição (2)*, permite dizer que a função $f: (K, +) \to (K, +)$, definida por $f(x) = nx$, é um homomorfismo do *grupo* aditivo $(K, +)$ nele mesmo, conforme argumentaremos a seguir.

Dados dois elementos $x, y \in K$ tem-se que $f(x) = nx$ e $f(y) = ny$. Além disso, $f(x + y) = n(x + y) = nx + ny = f(x) + f(y)$. Convém observar que a expressão $nx$ significa a adição constituída por $n$ parcelas dadas por $x$ , $x + x + \cdots + x$ , e que $x$ não necessariamente precisa ser um número. Portanto, os critérios da definição de homomorfismo de grupos foram satisfeitos, logo $f$ é um homomorfismo. Uma conclusão importante desse exemplo é que para $n \neq 0$, a função $f$, quando definida no *corpo* dos reais é um automorfismo, isso significa que ela é bijetora. Para mostrar que, de fato, ela é bijetora, precisamos mostrar que é injetora e sobrejetora[56]. Faremos isso a seguir:

Uma função é dita injetora sempre que $(x, b), (y, b) \in f \Rightarrow x = y$. A função $f$, do exemplo anterior, quando definida no *corpo* dos reais e considerando $n \neq 0$, é injetora, uma vez que $nx = ny \Rightarrow x = y$. Mostraremos agora que $f$ também é sobrejetora, para então concluirmos que é bijetora.

Uma função $f: A \to B$ é sobrejetora, desde que para todo $b \in B$, exista um $a \in A$, tal que $f(a) = b$. A função $f$ goza dessa propriedade, uma vez que

[56] As noções de funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras não serão definidas formalmente nesta tese, mas apresentadas em linguagem corrente durante o desenvolvimento deste texto, procedimento que julgamos suficiente para nossa argumentação.

$$nx = b \Rightarrow x = \frac{b}{n}.$$

Portanto, $f$ é bijetora, logo é também um automorfismo.

Notemos que sobre a *Definição (2),* pode-se dizer que esses homomorfismos preservam a ordem ou a invertem, uma vez que:

$$a < b \wedge n > 0 \rightarrow na < nb \qquad 0 < a < b \wedge n > 0 \rightarrow a^n < b^n$$
$$a < b \wedge n < 0 \rightarrow na > nb \qquad 0 < a < b \wedge n < 0 \rightarrow a^n > b^n\ .$$

Novamente, a analogia entre a coluna da esquerda e a da direita da Tabela 1 não é perfeita, porque nessa última é necessária uma suposição suplementar $a > 0$. Isso leva, no segundo caso, à restrição de seu homomorfismo à $K_+$, isto é, à parte positiva de $K$, conforme procederemos no próximo exemplo.

*Exemplo (2):* De modo análogo ao exemplo (1), a coluna da direita da lei de distributividade (*Definição (2)*), é um homomorfismo do *grupo* multiplicativo $(K_+,\ \cdot)$ nele mesmo, isto é, a função $f: (K_+\backslash\{0\},\ \cdot) \rightarrow (K_+\backslash\{0\},\ \cdot)$, definida por $f(x) = x^n$ é um homomorfismo.

Essa função, para $n \neq 0$, também pode ser bijetora, isso acontecerá para conjuntos $K$ específicos. Vejamos:

$$x^n = y^n \Rightarrow x = y, \text{ logo } f \text{ é injetora.}$$

Entretanto, a equação $x^n = b$ terá solução apenas para os conjuntos $K$ que forem fechados para a operação de radiciação, ou seja, $f$ será sobrejetora apenas para alguns conjuntos $K$. Para $K = \mathbb{Q}$ (conjunto dos números racionais), $f$ não será sobrejetora, uma vez que os elementos desse conjunto não necessariamente possuem uma raiz enésima. Já para $K = \mathbb{R}$, $f$ é sobrejetora, porque o *corpo* dos reais positivos é fechado para a radiciação.

Além disso, para $K = \mathbb{Q}$, $f$ é uma função contínua e crescente. Pode-se provar essa afirmação com alguns conceitos oriundos do cálculo diferencial. Atentar para sua continuidade é importante, uma vez que garantirá a existência de potências e raízes para todo $x$ positivo. Claro que seu gráfico dependerá de $n$ e de $x$, mas é possível ao menos sabermos qual é a região por ele ocupada no plano cartesiano. Dessa forma, para $0 < x < 1 \Rightarrow f(x) = x^n < 1$, para todo $n$ natural, isto é, a função ocupará a parte verde do gráfico, conforme exibido na Figura 2. Já para $x > 1 \Rightarrow f(x) = x^n > 1$, a representação gráfica estará na parte azul.

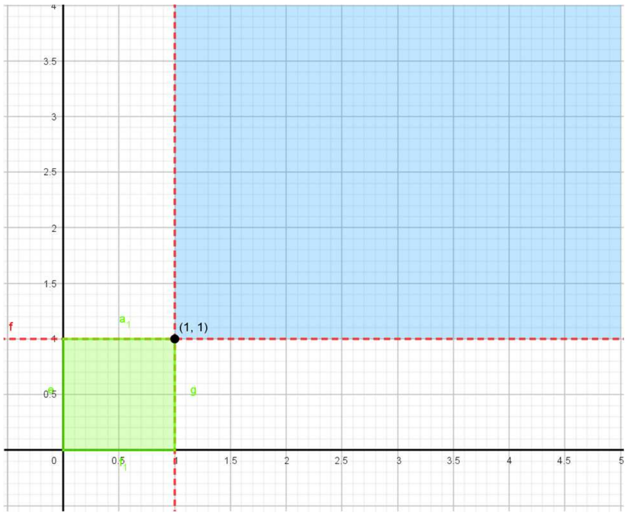



Figura 2. Região ocupada pelo gráfico de $\boldsymbol{f(x) = x^n}$

Desse desenvolvimento, concluímos que para $n \in \mathbb{N}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = nx$ é um automorfismo do *grupo* aditivo $(\mathbb{R}, +)$. Além disso, concluímos também que $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^n$ é um automorfismo do *grupo* multiplicativo $(\mathbb{R}_+, \cdot)$ e que ambos preservam a ordem.

O próximo passo seria generalizar esse desenvolvimento para multiplicadores e expoentes reais, isto é, mostrar que as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \alpha x$ e $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^\alpha$, são automorfismos para $\alpha \neq 0$. Ambos os tipos de automorfismos preservam a ordem se $\alpha > 0$ e invertem-na se $\alpha$ <0. Finalmente, pode-se ver que são automorfismos do *grupo* aditivo de $\mathbb{R}$ ou, no segundo caso, do *grupo* multiplicativo de $\mathbb{R}_+$ que preserva ou inverte a ordem. Nesse movimento argumentativo, Freudenthal desenvolve as regras operacionais das potências. Nessa abordagem, evidenciou as bases algébricas que permitem ampliar a possibilidade de operar as potências para além dos expoentes naturais, isto é, justificou a existência de potências com expoentes reais.

Após desenvolver esse paralelismo entre o *grupo* aditivo e o *grupo* multiplicativo, entre a coluna da esquerda e a coluna da direita na Tabela (1), Freudenthal conclui que a operação de elevar a uma potência como contrapartida da multiplicação realmente desempenha um papel importante, o mesmo vale para a divisão e a extração de raízes (FREUDENTHAL, 1973, p.317).

Nossa trajetória, nesta seção, seguiu paralela à de Freudenthal para mostrar, de modo bem detalhado e preenchendo, inclusive, certas lacunas da exposição, como se pode estruturar, partindo do conceito de *grupo*, quase todas aquelas operações que foram consideradas básicas: adição, multiplicação, subtração, divisão, potenciação e radiciação. Restaria, agora, o logaritmo, operação também fundamentada na Álgebra como aponta Freudenthal. Para chegar a esse conceito, o autor percorreu outro longo e similar caminho, que seria desnecessário percorrer neste texto, uma vez que consideramos suficiente compreender como as operações aritméticas encontram fundamentações teóricas em conceitos algébricos, ou seja, para evidenciar a Álgebra como sendo uma área da Matemática que provê sustentação teórica a conceitos usados em outras áreas.

Por fim, evidenciamos, na conclusão desta seção, que a proposta de Freudenthal, a de fundamentar as operações aritméticas em teorias algébricas, possibilita aos alunos compreendê-las para além de seu aspecto algorítmico, isto é, para além do “como”, o “porquê”. Portanto, é necessário ir além de certas obviedades recorrentes no ensino, por exemplo aquela que enfatiza que a Álgebra diz respeito ao uso das letras ou ao reconhecimento de padrões, ideia que encontramos mesmo hoje em dia na BNCC e que apontamos na seção 3 deste trabalho, “O Pensar Algébrico na BNCC: sentidos e significados que se abrem”. Essa atitude, a de ir além das obviedades, permite-nos encontrar na Álgebra a fundamentação teórica dos modos de se operar com números e outros objetos. Além disso, leva-nos à compreensão de um dos modos de ser da Álgebra, aquele que revela o efeito salutar, já anunciado por Husserl (2012) e citado na seção anterior deste trabalho, de seu emprego para compreender, fundamentar e libertar a Aritmética de toda a realidade circunstancial.

Dessas considerações, compreendemos, ainda, que a crítica de Freudenthal e a leitura que dela fizemos apontam para o fato de que não se deve apresentar o objeto do conhecimento como algo pronto, óbvio. No caso da Álgebra, esse modo de apresentá-la pode não permitir que o educando tenha a oportunidade de intuir as múltiplas possibilidades de organização de suas expressões e pode não permitir compreender como essas expressões mencionam as idealidades matemáticas.

Na próxima seção, procuraremos compreender os caminhos que possibilitaram uma evolução conceitual dos números, quando deixaram de ser um instrumento de contagem para se tornarem um símbolo, movimento que ocorreu entrelaçado à simbolização da Álgebra.

## 5. CAMINHOS PARA UMA DESSEDIMENTAÇÃO DA ÁLGEBRA: DO *ANZAHL* PARA O *ZAHL*, UM CONCEITO SIMBÓLICO

Nossa investigação sobre as formas pelas quais a Álgebra se mostra não poderia deixar de contemplar o desenvolvimento de sua linguagem simbólica. Para tanto, nesta seção, esse desenvolvimento foi investigado tanto do ponto de vista filosófico quanto histórico. Como uma área da Matemática, o percurso da Álgebra esteve associado ao da Geometria e da Aritmética e, à medida que sua linguagem foi se simbolizando, tornou-se independente de ambas. Neste ponto da pesquisa, nos deparamos, porém, com um problema adicional: ainda que neste trabalho o modo histórico de mostrar-se da Álgebra não pudesse ser ignorado, um longo inventário sobre sua história e imbricações com outras áreas da Matemática poderia representar um desvio longo e talvez redundante, que nos afastasse excessivamente de nosso problema de pesquisa, tendo em vista a profusão de detalhadas e completas histórias da Matemática e dos símbolos algébricos.

A solução para esse problema foi, por isso, percorrer o fluxo da história da Matemática privilegiando pontos que dizem respeito mais de perto à Álgebra num caminho investigativo que busca compreender, nessa corrente histórica de fatos, sujeitos e, principalmente, de ideias, aqueles pontos que nos parecem nucleares para refletir sobre "em que medida o pensamento algébrico e os símbolos imbricaram-se para, por meio de um diálogo já milenar entre culturas (semelhante ao que tentamos estabelecer com os historiadores em nossa pesquisa), construir uma linguagem que expressa de modo claro e rigoroso o mundo das idealidades". Certamente o texto, por conta disso, passa ao largo de séculos em poucos parágrafos ao passo que se estende por algumas páginas em períodos menores de acordo com nossa intenção ou, por assim dizer, com o nosso modo de olhar em direção ao tema por meio de um dos múltiplos modos de ele mostrar-se. Entendemos que toda visão histórica não é senão uma revisitação recortada pela subjetividade do sujeito que a visita, de sua perspectiva. Assim como a Álgebra se interessa pela coerência interna de seu sistema, esta breve reconstrução tenta obedecer a uma coerência interna de nossa pesquisa, não necessariamente é, portanto, um inventário linear dos sucessivos passos do desenvolvimento do pensamento algébrico e de sua simbologia. Trata-se de uma investigação que visa compreender como se deu a simbologia da Álgebra, como surgiram as ideias expressas por essa simbologia, que foi responsável por tornar a linguagem algébrica um meio construtor e revelador de idealidades, de multiplicidades, as quais serão mais bem discutidas na seção seguinte.

Desse modo, o estudo será desenvolvido nas seguintes subseções: “As origens historicizadas das ideias que estruturam a Álgebra”; “Conceitos de número e suas implicações no desenvolvimento da Álgebra simbólica”; “Conceitos de número: *arithmos* e mônadas”; “A Álgebra de Diofanto e sua concepção de número”; “A contribuições da cultura medieval para a divulgação das ideias matemáticas: uma ênfase no mundo árabe”; “Viète e a volta aos gregos: contribuições para o desenvolvimento da Álgebra simbólica - a Logística Especiosa“; e “Descartes e a volta aos gregos: contribuições para o desenvolvimento da Álgebra simbólica: a *Mathesis Universalis*”.

Nessas subseções estudaremos os caminhos da dessedimentação da Álgebra com vistas a compreender a transformação que ocorreu primordialmente no conceito de número, uma vez que é paralelamente a essa transformação que a Álgebra se transforma em simbólica, num caminho que se inicia com a análise de Viète (1540 – 1603) e culmina na *Mathesis Universalis* cartesiana. Esse percurso inclui reflexões sobre a etimologia da palavra Álgebra e estudos de fatos históricos que permitiram a Viète e Descartes abrirem -se à compreensão do mundo grego, uma volta às origens da Álgebra. No início de cada subseção, buscaremos esclarecer ao leitor o propósito do tema, bem como a conexão entre esses temas.

Iremos estudar, a partir dos gregos, os conceitos de números bem como as implicações desses conceitos no tratamento desse componente básico da Matemática. Além disso, abordaremos a perspectiva diofantina e, mais especificamente, as contribuições de Viète que, voltando-se ao mundo grego e estudando Diofanto (*c*. 201/214 - 284/298) e outras fontes, abriu caminho para a Álgebra simbólica. Ao longo desta parte do trabalho, dialogaremos também com os estudos de Klein (1992), contemporâneo de Husserl e, ele próprio, um estudioso que empreendeu uma volta às origens da Álgebra num diálogo, tanto com os gregos quanto com Viète e os matemáticos que o sucederam. Nesta investigação, entendemos ser importante também revisitar a obra *Introduction to the analytical art - Isagoge* (1992) de Viète, bem como as *Regras para a direcção do espírito* (1989) de Descartes. O resultado desse estudo, conforme nossa leitura, nos permitiu compreender as imbricações entre os modos de conhecer da Álgebra e o modo de ser de sua linguagem que, ao longo dos séculos, foi se tornando mais simbólica, analogamente a um leito de um rio que se adapta ao fluxo da água para lhe dar vazão.

### 5.1 As origens historicizadas das ideias que estruturam a Álgebra

Nesta subseção faremos uma exposição a respeito da etimologia da palavra Álgebra, com foco na ideia de redução. Redução[57] é tema central no âmbito da Álgebra e é entendida neste nosso trabalho como uma forma de apreensão das idealidades, de modo a poder generalizá-las, não apenas pelo seu aspecto operacional, mas também por expressar simbolicamente essas idealidades. No que diz respeito ao desenvolvimento da linguagem simbólica, fomos guiados pela divisão tripartite dos meios de expressão algébrica: retórica, sincopada e simbólica.

Os nomes das coisas, em certa medida, quando não são atribuídos aleatoriamente e quando são produto de evolução histórica, evolução ainda que errante como é o caso da palavra Álgebra, guardam aspectos da essência daquilo a que fazem referência. Em linha com esse entendimento, a investigação etimológica da palavra “álgebra” mostra-se relevante para compreender a Álgebra para além das roupagens de símbolos que revestem as ideias que a estruturam. Antenor Nascentes, em seu *Dicionário etimológico da Língua Portuguesa*, assim apresenta a origem do termo:

> ÁLGEBRA - Do árabe *aljabr*, restauração, abreviação de *Aljabr Wal* — Muqabala, restauracão e oposição, título de uma obra do matemático árabe Abu Jafar Moamed Ihn Musa. O nome era fundado na regra em virtude da qual se restabelecia num dos membros da equação a quantidade que se suprime no outro, mudando a função positiva ou negativa desta quantidade. (NASCENTES, 1955, p. 18).

Dessa origem vem o termo “ALGEBRISTA — De álgebra, como nome de ciência; [do termo] antigo, de álgebra, no sentido etimológico de restauração, redução- (de membros deslocados)” (NASCENTES, 1955, p. 18)[58]. Ainda que, inicialmente, a Álgebra estivesse ligada à equação e, portanto, à ideia do trabalho com quantidades, a ideia da “redução”, já em sua origem, remete-nos aos objetivos da Álgebra moderna

---

[57] Redução esta que está relacionada, conforme explicaremos, à etimologia da palavra Álgebra e não à “redução fenomenológica”, aquela que foi explicada ao longo da seção 1 desta tese.
[58] Ainda que Descartes tenha se referido a essa disciplina como uma “*mathesis universalis*” designada em seu tempo “com o bárbaro nome de álgebra” (DESCARTES, 1989, p. 28), pela etimologia árabe da palavra, é com esse nome que ela se fixou e se desenvolveu, inclusive com as contribuições relevantes do próprio Descartes, conforme veremos nesta seção.

ou abstrata, conforme afirmam Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 78), ao constatarem que:

> o desenvolvimento da Álgebra na história considera como ponto de referência o momento em que se teve a clara percepção de que o objeto de investigação desse campo do conhecimento matemático ultrapassava o estudo das equações e operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas, para centrar-se no estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos, isto é, sobre estruturas matemáticas como grupos, anéis, corpos etc.

Nesse texto fica expresso que o domínio de conhecimentos pertencentes à Álgebra ultrapassa o estudo de equações e operações clássicas efetuadas sobre quantidades, discretas ou contínuas, para abarcar as estruturas algébricas. Esses autores compreendem, ainda, que não há uma ruptura entre os períodos clássico e moderno, mas que existe um movimento contínuo em que o segundo momento emerge do primeiro num fluxo histórico de compreensão e busca de métodos para a resolução de equações.

Analisando o movimento desse fluxo histórico, o estudo das equações quínticas surge como um mote para o nascimento da Álgebra Moderna, em virtude da efetivação de um salto teórico que reúne, em um campo mais abrangente, ideias constantes dos períodos clássico e moderno da Álgebra. Assim, entende-se não serem duas ciências distintas; entretanto, não há apenas uma continuidade entre ambos os períodos, há um pensar teorizante que nucleia muitas ideias concernentes a ambos os períodos.

No fazer algébrico do qual se dá conta analisando sua história, está presente uma espécie de intuição abstracionista que os primeiros algebristas tinham das potencialidades dessa área de investigação ao se preocuparem com a resolução dos problemas do cotidiano. É um modo de proceder à redução matemática. Para esclarecer esta argumentação, valemo-nos do *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*, perscrutando o que diz "redução", da perspectiva do sentido matemático. Conforme está nesse dicionário: "conversão de uma quantidade em outra de mesmo valor" (2001, p. 2408), bem como tem o sentido linguístico de "transformação de uma palavra em outra mais curta por abreviação, apócope, contração, evolução fonética etc." (2001, 2048). É possível afirmar que, enquanto arte da redução no primeiro sentido, o de conversão, a Álgebra está mais próxima da "tendência tradicional [que a considerava] como uma Aritmética universal ou generalizada" (FIORENTINI; MIORIM;

MIGUEL,1993, p. 79). Já enquanto arte da redução, no sentido linguístico de transformação, parece que a Álgebra transcende seu valor instrumental para tornar-se uma linguagem que desvela idealidades, "um sistema simbólico postulacional, isto é, um sistema cujos símbolos e regras operatórias sobre eles são de natureza puramente arbitrária, sujeitos apenas à exigência de consistência interna" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993, p. 79).

No campo da escavação das significações linguísticas dos conceitos, podemos estabelecer uma analogia entre a linguagem natural[59] e a construção poética[60] de novas realidades, construção cuja característica é dizer o máximo com o mínimo de palavras e de promover o adensamento dos sentidos. Poesia, vem, justamente, do grego "*poiesis*, ação de fazer alguma coisa" (Nascentes, 955, p. 406). Pensando-se analogicamente, a passagem da linguagem natural do referir ao produzir, do quantitativo ao qualitativo, pode ilustrar a passagem da Álgebra da concepção clássica para a abstrata, da fase da operacionalização para a fase da criação de novos objetos os quais, ainda que não se refiram a sentimentos como os trazidos na poesia, existem como idealidades e se conectam com o mundo-da-vida.

De outra perspectiva, pode-se seguir um caminho que evidencie como a Álgebra ascende do plano da representação para um modo de pensamento. Desta perspectiva, segundo Struik (1992, p. 47-48),

> As matemáticas orientais surgiram como uma ciência prática com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e a cobrança de impostos. A ênfase inicial foi dada naturalmente à aritmética prática e à medição. Porém, uma ciência cultivada durante séculos como um ofício especial e cuja tarefa não é apenas aplicar, mas também ensinar os seus segredos, desenvolve tendências para a abstração. Gradualmente, ela virá a ser estudada por si própria. A aritmética transformou-se em álgebra, não só porque possibilitava melhores cálculos práticos, mas também porque era o resultado natural de uma ciência cultivada e desenvolvida nas escolas dos escribas. Pelas mesmas razões, a medição deu origem aos começos - mas não mais do que isso da geometria teórica.

Na trajetória não linear percorrida pela Álgebra, os campos quantitativo e qualitativo fundem-se. Percorrer esse caminho possibilita compreender os modos de pensar daqueles que se dedicam ao estudo dessa área da Matemática. Desta

---

[59] Esta linguagem que se desenvolveu, provavelmente, a partir de um conjunto de sons articulados, os quais permitiam às pessoas estabelecerem comunicação pragmática com seus pares apenas para suprirem as necessidades do dia a dia, ou seja, como meio de referência às coisas existentes.

[60] Linguagem tomada como veículo poético das emoções, das vicissitudes do ser e do mundo, adensando os sentidos do dito com um mínimo de expressões.

perspectiva, é possível acompanhar o desenvolvimento dos três momentos que comentamos, marcados "em função das fases evolutivas da linguagem algébrica: a retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993, p. 79). No trânsito, nem sempre reto da retórica ao simbolismo, mediado pela sincopação, a redução, o adensamento dos sentidos das muitas ideias reunidas, é sempre ponto de convergência nas formas de representação algébrica. Da fase retórica, quando se descreve, mediante a linguagem corrente, os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e operações, passa-se à fase sincopada. Esse passo não foi dado de forma abrupta, mas como resultado de um movimento que solicitava essa modificação à medida que a Álgebra se desenvolvia. No Século III a.C. Diofanto introduziu pela primeira vez "um símbolo para a incógnita – a letra 'sigma' do alfabeto grego – e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL,1993, p. 80). A Álgebra irá, finalmente, atingir a fase simbólica, em que suas expressões não são descritas unicamente por meio de palavras, com Viète (meados do Século XVI e início do XVII) e com Descartes (final do Século XVI e século XVII).

Nessa linha de investigação, de escavar as origens do pensamento matemático, Struik (1992), em sua *História Concisa da Matemática*, faz considerações sobre o uso do número nas sociedades do período neolítico (10000 a 3000 a.C.), uso que talvez tenha sido resultado da sedentarização; bem como leva em conta o notável aperfeiçoamento técnico do homem, fenômeno que ocorreu de forma desigual no planeta, mas que se deu por conta da prática das atividades agrícolas que substituíram a simples coleta de alimentos e, consequentemente, impulsionaram atividades comerciais entre as diversas povoações que começaram a se comunicar e deram início às técnicas de fundição do cobre e do bronze.

As linguagens desenvolvem-se, consequentemente, nesse período cujas palavras "exprimiam coisas muito concretas e muito poucas abstrações, mas havia já lugar para alguns termos numéricos simples e algumas relações de forma" (STRUIK, 1992, p. 30). Os números, aliás, em seus primeiros usos foram mais qualitativos do que quantitativos "marcando somente a distinção entre um, dois e muitos" (STRUIK, 1992, p. 30). Boyer (1974, p. 1) sintetiza também essa origem qualitativa dos números:

> A princípio as noções primitivas de número, grandeza e forma podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhanças – a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre

> uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre uma forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática. As próprias diferenças parecem indicar semelhanças, pois o contraste entre um lobo e muitos, entre um carneiro e um rebanho, entre uma árvore e uma floresta, sugerem que um lobo, um carneiro e uma árvore têm algo em comum – sua unicidade[61].

Boyer associa, aliás, o desenvolvimento do pensamento matemático abstrato ao desenvolvimento da linguagem com base em evidências arqueológicas pré-históricas que apontam o registro de números mediante marcas em ossos ou bastão de modo que

> A demora no desenvolvimento da linguagem para exprimir abstrações como o número também pode ser percebida no fato que as expressões verbais numéricas primitivas invariavelmente se referem a coleções concretas específicas – como 'dois peixes' ou 'dois bastões' – e mais tarde tal frase seria adotada convencionalmente para indicar todos os conjuntos de dois objetos". (BOYER, 1974, p. 3).

O fato de a concepção primitiva de número referir-se a coleções concretas específicas, ou seja, a uma contagem específica de coisas específicas, está relacionado ao conceito grego de *arithmo,* um estágio em que o número ainda estava muito ligado à atividade de contagem de coisas concretas e não como mônadas[62], entendidas como unidades puras[63].

As reflexões de Boyer nos remetem a um dos aspectos discutidos na abertura desta subseção sobre a ideia de redução presente na etimologia da palavra Álgebra. Generalizar é, em certo sentido, reduzir conjuntos de quaisquer coisas a uma propriedade comum a esses conjuntos. Neste caso, tal propriedade refere-se à quantidade no momento da apreensão, abstraindo-se as diferenças entre os seres que participam dessa ideia de quantidade. A noção de número como mônadas, por assim dizer, sintetizaria em si certa qualidade a saber: a quantidade em que se apresentam as coisas no momento em que são apreendidas. Assim, três estrelas, por

[61] Conforme explicaremos, do ponto de vista da Álgebra simbólica, o entendimento do número como *Zahl*, liberado de sua condição de instrumento pragmático de contagem, o *Anzhal*, foi um fenômeno fundamental para o desenvolvimento desta ciência. Contudo, isso é perceptível se olharmos do ponto de vista de nosso tempo. O que ressaltamos neste trecho é que parece ter sido já com a ideia de *Zahl* que nasceu o conceito de número que, ao longo do tempo, ganhou contornos de *Anzahl*, ou seja, foi usado para finalidades mais pragmáticas e que, após isso, houve, por assim dizer, um retorno à sua ideia primordial ao longo da Álgebra.

[62] O conceito de mônada será abordado na próxima subseção.

[63] Essa afirmação será retomada e mais bem explicitada posteriormente nesta seção.

mais diferentes que sejam de três pedras, comungam entre si um estado: o de pertencerem a uma coleção de três elementos segregados dos demais elementos inumeráveis da mesma espécie, por algum critério ou necessidade do sujeito que os segregou. Isso sugere que certo aspecto do pensamento algébrico que apontamos em nosso trabalho, o da construção das idealidades, já estava presente nos primeiros tempos do desenvolvimento da Aritmética em que a linguagem se esforçava para designar o abstrato a partir das experiências concretas:

> A tendência da linguagem de se desenvolver do concreto para o abstrato pode ser percebida em muitas das medidas de comprimento em uso atualmente. A altura de um cavalo é medida em palmos e as palavras 'pé' e 'ell' (*elbow*, cotovelo) também derivam de partes do corpo. (BOYER, 1974, p. 3).

Outro argumento que se agrega à defesa de uma Aritmética que carregava a semente da Álgebra em si, no que diz respeito ao conceito de números, é a teoria, ainda que não comprovada, de que a arte de contar teria origem em rituais religiosos, tendo o aspecto ordinal, qualitativo, precedido do aspecto cardinal, quantitativo, dos números: "Em ritos cerimoniais representando os mitos da criação era necessário chamar os participantes à cena segundo uma ordem específica, e talvez a contagem tenha sido inventada para resolver esse problema" (BOYER, 1974, p. 4). Isso quer dizer que o primeiro não seria, necessariamente, o de número um, tal como se estivéssemos enumerando uma sequência de objetos, mas o que se considerava como mais importante, independentemente de sua posição espacial, era a sua hierarquia. Percebe-se, desta perspectiva, a intersecção entre o quantitativo e o qualitativo, entre os domínios aritmético e algébrico.

De qualquer modo, a ausência de registros escritos não permite que sejam provadas essas conjecturas. Apenas se sabe que as origens da Matemática são anteriores às mais antigas civilizações que conhecemos e é bem possível que essas origens estejam ligadas tanto a necessidades práticas de contagem e medição quanto a demandas estéticas, ao gosto pela beleza e pelas formas, próprios dessas culturas.

Grandes civilizações desenvolveram-se próximas aos grandes rios da África e da Ásia, tais como o Nilo, o Tigre, o Eufrates, o Indo, o Ganges, o Huang Ho e o do Yang-Tse. Especificamente quanto à civilização que viveu às margens do Nilo, há registros de natureza matemática além das imprecisas inscrições tumulares ou calendários. Um desses documentos é chamado *Papiro de Rhind* (nome do antiquário escocês que o comprou em 1858) ou *Papiro Ahmes* (nome do escriba que o teria copiado por volta de 1640 a.C. de fontes que datam de 2000 a 1800 a.C., entretanto, as origens do conteúdo seriam ainda mais antigas). Esse documento contém 85 problemas matemáticos descritos por Boyer (1974, p. 9), grande parte deles de natureza aritmética. Chama atenção, para o tema deste trabalho, os problemas de natureza algébrica que

> Não se referem a objetos concretos, específicos, como pães e cerveja, nem exigem operações entre números conhecidos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações lineares, da forma
> $$x + ax = b$$
> ou
> $$x + ax + bx = c,$$
> onde $a$, $b$ e $c$ são conhecidos e $x$ é desconhecido. A incógnita é chamada de 'aha'. (BOYER, 1974, p. 12).

Se por um lado é verdade que os egípcios eram exímios construtores, por outro lado pode-se dizer que não se aprofundaram no conhecimento teórico subjacente às suas técnicas, permanecendo, assim, no campo empírico. Isso quer dizer que eles alcançavam seu propósito sem necessariamente compreender os processos pelos quais aqueles propósitos eram alcançados. Já na região situada entre os rios Tigre e Eufrates, Struik (1992, p. 54) afirma que "[a]s matemáticas mesopotâmicas [que usavam um sistema numérico sexagesimal] atingiram um nível mais elevado do que o obtido pelas matemáticas egípcias". Do inventário feito por Boyer (1992, p. 18-32) sobre a matemática[64] mesopotâmica, destacaremos algumas questões relativas ao desenvolvimento algébrico. Ainda que sua Álgebra fosse retórica,

> os Babilônios da época de Hammurabi [cerca de 1728 a 1686 a.C.] estavam na posse completa da técnica para manipular as equações quadráticas. Resolviam equações lineares e quadráticas com duas variáveis, e até mesmo problemas que envolviam equações cúbicas e biquadráticas. (Struik,1992, p. 58).

Struik (1992) apresenta um exemplo extraído de uma placa de barro da época para mostrar que os babilônicos conheciam uma regra geral para resolução de problemas:

> Uma determinada área $A$, que é a soma de dois quadrados, tem o valor 1000. O lado de um dos quadrados é igual a 2/3 do lado do outro menos 10. Quanto medem os lados dos quadrados?

---

[64] Aqui grafamos "matemática" com letra minúscula, pois ainda não designa a Ciência do mundo Ocidental, é um fazer.

Isto conduz às equações, $x^2 + y^2 = 1000$, $y = \frac{2}{3}x - 10$ e a solução pode encontrar-se resolvendo a equação quadrática

$$\frac{13}{9}x^2 - \frac{40}{3}x - 900 = 0$$

que tem uma solução positiva, $x = 30$.

A solução nos textos cuneiformes limita-se - tal como em todos os problemas do Oriente - à simples enumeração dos passos numéricos que têm de ser dados para resolver a equação quadrática.

Ache o quadrado de 10; dá 100; subtraia 100 de 1000; dá 900, etc. O número 1000 é escrito (16, 40), 900 é (15, 0), etc. (STRUIK, 1992, p. 58-59).

Struik (1992, p. 59) observa ainda que o aspecto aritmético-algébrico da Matemática babilônica transparece em sua Geometria. Os textos mostram que, na Geometria babilônica, "o chamado 'teorema de Pitágoras' era conhecido, não apenas para casos especiais, mas com toda a generalidade, como uma relação numérica entre os lados de um triângulo retângulo" (STRUIK, 1992, p. 59). Também Boyer (1974, p. 37) afirma que "o teorema, a que o nome de Pitágoras ainda está ligado, muito provavelmente veio dos babilônicos", os quais desenvolveram uma Geometria com suporte algébrico, especialmente em épocas mais recentes, cerca de 600 a.C. a 300 d.C.

Boyer (1974) chama atenção para certo dogmatismo presente naqueles que, ao historicizar as civilizações pré-helênicas, afirmam que "não havia [nessas civilizações] atividade intelectual claramente discernível de espécie caracteristicamente unificada comparável ao que mais tarde recebeu o nome de 'matemática'" (BOYER, 1974, p. 31). É curioso que faça essa ressalva quanto à necessidade de se relativizar o abismo entre os antigos e os gregos argumentado que, para além do mundo da "experiência espacial", havia nos antigos um certo embrião do pensar algébrico, "a preocupação com os números e suas aplicações", que viria a ser amplamente difundida entre os pensadores gregos:

Pode ser verdade que a geometria ainda não se havia cristalizado a partir de uma matriz tosca de experiência espacial que incluía toda espécie de coisas que podiam ser medidas; mas é difícil não perceber na preocupação babilônica e egípcia com os números e suas aplicações algo muito próximo do que usualmente, em épocas posteriores, chamou-se de álgebra. (BOYER, 1974, p. 31).

O utilitarismo que se atribui a essas matemáticas também é relativizado pelo autor, que destaca o aspecto lúdico que as permeava num tempo em que havia menos espaço para as atividades de contemplação, reflexão e compreensão do que aquele que existia no mundo grego, “mesmo assim havia no Egito e na Babilônia problemas que têm as características de recreação” (BOYER, 1974, p. 31). Sustenta o autor, ainda, que embora esses problemas envolvessem elementos como soma de gatos ou medidas de trigo, não deixavam de conter “um certo humor ou uma procura de abstração” (BOYER, 1974, p. 31).

A Idade Potâmica da Matemática, a das civilizações que viveram próximas aos grandes rios, foi sucedida pela Idade Talássica (800 a.C. - 800 d.C.), a das culturas que viveram próximas ao mar, representadas pela civilização grega. Certamente essa mudança não ocorreu abruptamente, porém de modo contínuo. Em certo sentido, não pode ser considerada uma simples substituição dos modos de pensar e tratar a Matemática. Essa transição foi marcada mais por uma mudança geográfica do que temporal, haja vista que as culturas se desenvolveram simultaneamente por um longo período.

Ao tratar dos avanços da civilização helênica, que se espalhou ao longo do Mediterrâneo, Boyer afirma que no segundo milênio antes de Cristo, os “invasores iletrados, vindos do norte, abriram caminho até o mar [e] não trouxeram tradição matemática ou literária consigo; no entanto tiveram desejo ansioso de aprender e não demoraram a melhorar o que lhes ensinaram” (BOYER, 1974, p. 33). Graças às atividades dos mercadores, o alfabeto originário das culturas egípcia e babilônica chegou às colônias gregas, romanas e cartaginesas e “supõe-se que alguns rudimentos de cálculo viajaram pelas mesmas rotas” (BOYER, 1974, p. 33). Após isso, os gregos viajaram aos centros de cultura do Egito e da Babilônia, onde “entraram em contato com a matemática pré-helênica” (BOYER, 1974, p. 33). Ainda que não tenham necessariamente criado os conceitos, os gregos “não estavam dispostos a apenas receber antigas tradições, e se apropriaram tão completamente do assunto que logo ele tomou forma drasticamente diferente” (BOYER, 1974, p. 33). Por conta desse aperfeiçoamento que os gregos fizeram dos conhecimentos recebidos, da sua disposição para a contemplação e seu amor ao saber, a subseção seguinte será destinada a tratar de suas realizações e de como elas ecoaram no Renascimento, já com Viète, para desaguarem na simbolização da Álgebra.

Quanto ao fator da proximidade cultural em relação às civilizações antigas, Tales de Mileto (624 - 548 a.C.) e Pitágoras de Samos (580 - 500 a.C.) tinham a vantagem, pela posição geográfica da civilização mediterrânea de que faziam parte, de poder viajar mais facilmente aos territórios em que floresceram os conhecimentos antigos e naqueles locais aprenderem sobre Astronomia e Matemática: “[n]o Egito, diz-se que aprenderam geometria; na Babilônia (...) Tales provavelmente entrou em contato com tabelas e instrumentos astronômicos” (BOYER, 1974, p. 34).

Com o fortalecimento da sociedade grega e sua expansão econômica e militar, também a Matemática se desenvolveu, a partir do século V a. C.:

> Pela primeira vez na história, um grupo de homens críticos, os ‘sofistas’, menos preocupados com a tradição do que qualquer outro grupo ilustrado surgido anteriormente, abordavam problemas de natureza matemática, como parte de uma investigação filosófica do mundo natural e moral, desenvolvendo uma matemática mais no espírito da compreensão que da utilidade. (STRUIK, 1992, p.75).

As observações anteriores destacam os aspectos da cultura helênica de amor ao saber e do espírito de aperfeiçoar as heranças recebidas das culturas precedentes, aspectos esses que, por meio da revisitação feita por Diofanto, helênico de um tempo posterior, por Viète e Descartes, mais próximos de nosso tempo, propiciaram o desenvolvimento da Álgebra simbólica consoante à transformação do conceito grego de *arithmos*. Nesse período, destacou-se a figura de Hipócrates de Quio (cerca de 470 a.C. — 410 a.C.) que

> demonstrou que os matemáticos gregos da idade de ouro da Grécia possuíam um sistema ordenado de geometria plana, em que o princípio da dedução lógica (*apagoge*), que permitia inferir uma afirmação a partir de outra, tinha sido inteiramente aceito. (STRUIK, 1992, p.76).

Esses estudos precederam a tradição euclidiana em mais de um século. Os problemas enfrentados pelos matemáticos gregos nesse período, a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo, não poderiam “ser resolvidos geometricamente pela construção de um número finito de linhas retas e círculos senão por aproximação, constituindo um meio de alcançar novos campos da matemática” (STRUIK, 1992, p.76-77). Parece-nos importante assinalar essa fase, pois historicamente os matemáticos, inclusive os nossos contemporâneos, “têm mostrado a relação entre os problemas gregos e a teoria moderna das equações, implicando considerações relativas aos domínios da racionalidade, dos números algébricos e da teoria dos grupos" (STRUIK, 1992, p.77). Nessa fase, já se encontram os princípios daquela Matemática que viria a emergir na modernidade, com Viète e sua leitura de Diofanto e dos gregos, abrangendo a Álgebra que a sustenta. O aperfeiçoamento que os gregos fizeram das ideias das culturas antigas deve-se ao seu interesse filosófico, entendida a filosofia aqui no sentido original de "amor ao saber", reflexões que conduziram os pensadores daquele tempo a perguntarem menos sobre como resolver os problemas matemáticos e mais sobre o porquê deles.

Como nosso interesse é mapear as aparições da Álgebra nesse trajeto da Matemática pela cultura, vamos destacar a figura de Euclides, século III a.C., autor dos treze livros que constituem os *Elementos* e que estão entre os mais estudados da história da cultura ocidental. Entre seus textos, encontra-se "o *Data*, que contém o que chamaríamos aplicações da álgebra à geometria, sendo apresentados numa linguagem estritamente geométrica" (STRUIK, 1992, p. 90). Mesmo nos *Elementos*,

> O raciocínio algébrico em Euclides é expresso totalmente numa forma geométrica. A expressão $\sqrt{A}$ é introduzida como sendo o lado de um quadrado de área $A$ e o produto $ab$ como sendo a área de um retângulo de lados $a$ e $b$. As equações lineares e quadráticas são resolvidas por construções geométricas, conduzindo à chamada "aplicação de áreas". (STRUIK, 1992, p. 92).

Essas observações sobre o pensamento algébrico de Euclides expresso por meio da Geometria constituem argumento em favor de uma das ideias que estamos desenvolvendo em nossa pesquisa, a perspectiva de ver a Álgebra para além de um suporte simbólico, mas também como uma área da Matemática que visa às idealidades.

Traçado o percurso historicizado da origem da Álgebra e sua assimilação feita pelos gregos, cuja contribuição foi a de olhar para os conhecimentos a que tiveram acesso e compreendê-los não apenas de um modo prático, mas também teórico, estabelecendo assim ontologias que lhes possibilitaram articular logicamente teorias a respeito dos saberes herdados dos antigos, iremos agora nos concentrar justamente nas contribuições da cultura helênica, notadamente quanto aos conceitos que envolvem o número e, posteriormente, na generalização do número iniciada por Diofanto para, finalmente, tratar do salto qualitativo dado por Viète e Descartes ao buscarem, mediante uma visada do ideário grego, uma Álgebra simbólica capaz de dar conta de objetos matemáticos que vão além dos números em si e desvelar idealidades matemáticas.

## 5.2 Conceitos de número e suas implicações no desenvolvimento da Álgebra simbólica

Este trabalho contempla uma visão husserliana, portanto, fenomenológica, sobre a Filosofia da Matemática e, mais especificamente, sobre a Álgebra. Assim, nesta subseção, que amplia o panorama histórico até agora descrito, para compreendermos a origem do símbolo na Álgebra e o próprio desenvolvimento desta área da Matemática, dialogamos com o trabalho de Jacob Klein (1899 – 1978)[65], bem como com Viète e Descartes. De Klein, analisaremos a obra *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra*[66], publicada em duas partes, a primeira em 1934 e a segunda em 1936, em *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien*, Vol. 3, fasc. 1 (Berlim, 1934), pp. 18-105 (Parte I); fasc. 2 (1936), pp. 122-235 (Parte II)[67]. Mais especificamente, estudamos a versão traduzida para o inglês por Eva Brann, sob o título *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*[68], publicada pela primeira vez pelo *The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts* em 1968 e republicada em 1992. De Viète, analisamos a obra *Introduction to the analytical art - Isagoge* (1992), Apêndice de Klein (1992). De Descartes, analisamos as *Regras para a direcção do espírito* (1989). Para uma compreensão mais profunda do processo analítico, recorremos à obra de Pappus de Alexandria (*c.* 290 – 350), *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones* (1876).

---

[65] Klein nasceu na cidade de Liepāja, Letônia, que naquele período, compunha o território russo. Segundo Hopkins (2017), Klein obteve o título de doutor em 1922 na Universidade alemã de Marburg, sob a orientação de Nicolai Hartmann, com a tese intitulada *Das logische und geschichtliche Element in Hegels Philosophie* (uma possível tradução, desse título, para o português é: *O elemento lógico e histórico na filosofia de Hegel.).* Klein assistiu às palestras de Heidegger em Marburg entre os anos de 1924 e 1928, além de ter estudado, nos anos de 1928 e 1929, com Max Planck e Erwin Schrödinger, no Instituto de Física Teórica de Berlim, antes de imigrar para os Estados Unidos em 1938 para escapar dos nazistas. A relação entre Klein e Husserl ocorreu não só porque ambos se interessavam por Filosofia, por Matemática e pela história das Ciências, mas para além disso, segundo Hopkins (2017), Klein era amigo da família de Husserl e, em 1919, teria visitado o filósofo alemão em Freiburg, com a intenção de ser seu aluno, mas naquele ano os soldados voltaram da guerra e ocuparam todos os quartos disponíveis, de modo que Husserl o encaminhou à Marburg para estudar com Paul Gerhard Natorp. Burt Hopkins, por sua vez, é um estudioso da conexão entre as obras de Husserl e Klein. Ele publicou, em 2011, o livro *The Origin of the Logic of Symbolic Mathematics: Edmund Husserl and Jacob Klein*, em que apresenta uma análise cuidadosa da relação entre os estudos destes dois filósofos.

[66] *Logística grega e a origem da álgebra*

[67] Fontes e Estudos em História da Matemática, Astronomia e Física, Seção B: Estudos, Vol. 3, fasc. 1 (Berlim, 1934), pp. 18-105 (Parte I); fasc. 2 (1936), pp. 122-235 (Parte II).

[68] *Pensamento Matemático Grego e a Origem da Álgebra*

Eva Brann, em suas "Notas de tradução" (KLEIN, 1992, p. VII-IX), já aponta para a direção em que Klein caminhou em seu trabalho filosófico sobre a Álgebra. A tradutora esclarece que a palavra grega *arithmos* (*αριθμός*) foi traduzida para o alemão como *Anzahl*, significando "uma série de coisas" e essa tradução foi feita para distingui-la do conceito moderno de *Zahl*, que em alemão expressa "número". Esclarece também que um dos objetivos da obra de Klein é mostrar que a concepção grega de *arithmos* e a concepção moderna de números não significam a mesma coisa, uma vez que o primeiro estabelece uma contagem, um número de coisas, enquanto o último abarca um conceito, qual seja, o de quantidade.

Depreende-se do estabelecimento da parelha conceitual *Anzahl* e *Zahl*, a discussão do papel que a linguagem simbólica da Álgebra Moderna desempenha na concepção e expressão das descobertas da Física Matemática, já que "[a] criação da linguagem formal da matemática é idêntica à fundação da álgebra moderna" (KLEIN, 1992, p. 4, tradução nossa)[69], isso porque a Álgebra, com sua linguagem própria, lida não só com quantidades abstraídas de coleções concretas, com aqueles *arithmoi* à maneira do pensamento grego, mas também com números gerais, simbólicos, que se apresentam apenas como um mero objeto de cálculo, uma entidade indeterminada, o que vale dizer que essas operações algébricas e seus símbolos prestam-se a desvelar os novos objetos do conhecimento que se mostraram e se mostrarão ao longo do desenvolvimento dessas ciências.

Nesse sentido, há dois aspectos que se destacam a respeito das interconexões entre os conceitos e os fenômenos a que eles remetem nas ciências que os desvelam. Em primeiro lugar, seria impossível pensar a expressão das descobertas da Física Moderna sem a linguagem simbólica desenvolvida a partir dos séculos XVI e XVII, conforme destaca Klein ao dizer que "[a]pós três séculos de intenso desenvolvimento, tornou-se finalmente impossível separar o conteúdo da física matemática de sua forma" (1992, p. 3, tradução nossa)[70]. Em segundo lugar, contudo, quem vê nessa linguagem um mero dispositivo de apresentação dessas descobertas, compreende mal, tanto a linguagem quanto os conceitos por ela expressos:

> Se a apresentação matemática é considerada como um mero dispositivo, preferido apenas porque os *insights* da ciência natural podem ser expressos por "símbolos" da maneira mais simples e exata

[69] The creation of the formal language of mathematics is identical with the foundation of modern algebra. (KLEIN, 1992, p. 4)
[70] After three centuries of intensive development, it has finally become impossible to separate the content of mathematical physics from its form.

> possível, o significado do simbolismo, bem como dos métodos especiais das disciplinas físicas em geral serão mal compreendidas. (KLEIN, 1992, p. 3, tradução nossa)[71].

Segundo Klein (1992), a má compreensão do simbolismo algébrico e dos métodos propiciados por esse simbolismo é resultado de uma ruptura das ciências modernas com aquele modo grego de pensar, já referenciado na subseção anterior, um modo contemplativo, que busca compreender as ideias que emanam do mundo-da-vida e os conceitos que delas resultam. Para o autor, essas ideias são percebidas pelos sentidos e alcançam, por meio da episteme, uma idealização progressiva. A dissolução dessa má compreensão é possível, ainda segundo Klein, por meio de uma dessedimentação desses conceitos, expressando um pensamento análogo ao de Husserl quando propõe uma volta às origens, um reencontro com aquela intuição original que subjaz à matemática simbólica.

Essa má compreensão do simbolismo matemático bem como dos métodos científicos que eles propiciam, também foi tematizada no texto desta tese, mais especificamente na seção 2, quando abordamos a questão da roupagem de símbolos que, muitas vezes, mascara o sentido das ciências (HUSSERL, 2012); e também na seção 3, em que abordamos o modo pelo qual a Álgebra é tratada na BNCC. Se a citada má compreensão ocorre, tanto segundo o próprio Husserl, quanto segundo Klein, em certo sentido, por conta da ruptura das ciências modernas com o modo grego de pensar, então é necessário revisitar o pensamento helênico que se debruçou sobre esses conceitos, notadamente por meio das investigações do elemento fundamental da Matemática, o número e seus modos de doação, tanto na Aritmética quanto na Logística, focando suas modalidades prática e teórica e, consequentemente, a Álgebra e seus desdobramentos pelas linguagens retórica, sincopada e simbólica, a qual enfatizaremos.

Ainda que os gregos não tenham inventado os métodos e conceitos da Matemática, sabemos que a herança milenar que receberam das culturas que já os aplicavam foram, no mundo helênico, interpretadas à luz da Filosofia, daquele amor ao saber que o caracterizou, de tal modo que, se as dimensões práticas da Aritmética e da Logística não foram deixadas de lado, tampouco os filósofos da Grécia deixaram

[71] If the mathematical presentation is regarded as a mere device, preferred only because the insights of natural science can be expressed by “symbols” in the simplest and most exact manner possible, the meaning of the symbolism as well as of the special methods of the physical disciplines in general will be misunderstood.

de contemplar os porquês dos objetos do conhecimento. Essa visada epistêmica, segundo nosso entendimento, resultou em um ambiente favorável para o desenvolvimento da linguagem simbólica algébrica. Desse modo, nosso percurso nas próximas subseções se iniciará por meio do estudo das investigações de Platão e Aristóteles sobre a Aritmética, da Logística e sobre como o número, aqui compreendido como o símbolo fundamental da Matemática, mostra-se em dimensões que apontam para o mundo-da-vida e para as idealidades, segundo a apropriação que dele fazem tanto o que opera com ele, o que o vê como correspondendo a uma dimensão prática, quanto aquele que busca compreender seu conceito. Em seguida, buscaremos compreender como Viète, na esteira do trabalho iniciado por Diofanto e por meio do entendimento da ciência grega, expandiu os limites da linguagem algébrica de modo que as ciências puderam servir-se do número como símbolo, conforme apontou Descartes e, assim, desenvolveram-se por meio da e com a linguagem algébrica na descoberta e na expressão de multiplicidades, como as que serão tratadas na seção 6 deste trabalho.

### 5.3 Conceitos de número: arithmos e mônadas

Klein (1992) começa a realizar a dessedimentação a que nos referimos estudando o entendimento grego de número, que inicialmente foi concebido como *arithmos*, uma quantidade específica de coisas específicas. Isto quer dizer que o número era tido como um instrumento de contagem de objetos, agrupados segundo propriedades que emanam da intenção do sujeito que os coleciona e que são apreendidas pelos sentidos, por exemplo: três bananas, quando se trata da mesma fruta, ou ainda uma banana, uma maçã e uma laranja, que seriam agrupadas na categoria de frutas, e que também poderiam ser contadas como três, portanto três coisas específicas colecionadas segundo critérios que resultam de uma intenção: a de contar frutas.

Este modo de o número mostrar-se é próprio da Aritmética e da Logística: a primeira lida com os números segundo suas propriedades fundamentais, a paridade, a imparidade, se é ou não um número primo; e a segunda com as relações entre eles e as leis que governam essas relações, sempre com o objetivo de utilizá-los como referentes a um universo de coisas sensíveis.

Klein (1992), em sua revisitação à teoria platônica acerca da Aritmética, da Logística e de suas interrelações, buscou compreender o modo pelo qual Platão aproxima e distingue as duas disciplinas. Apoiando-se em Platão, ele afirma que ambas não pertencem a níveis deferentes, mas podem mostrar-se unificadas em "uma 'ciência' que adquirimos primeiro em nossa relação com os objetos da vida diária e na qual podemos, posteriormente, avançar para um conhecimento especializado" (KLEIN, 1992, p. 18, tradução nossa)[72]. Sendo assim, é possível analisar essa ciência segundo duas perspectivas. A primeira delas consiste em que

> Diante de multidões definidas de coisas, nós habitualmente *determinamos seu número exato* – nós "numeramos", isto é, contamos as coisas, e isso pressupõe uma certa familiaridade com números em geral, especialmente no caso de grandes multidões. Para poder contar é preciso conhecer e distinguir os números individuais, é preciso "distinguir o um e o dois e o três". (KLEIN, 1992, p. 18, tradução nossa, grifos do autor)[73].

Essa primeira perspectiva remete-nos, portanto, à arte do cálculo, à Aritmética, enquanto ao operarmos com essas multidões,

> não estamos mais satisfeitos com o número pelo qual enumeramos as coisas em questão, mas trazemos sobre esse número novos "números", quer desejemos separar um "terço" da respectiva quantidade ou desejemos produzir uma multidão que equivale a "quatro" vezes o dado. Em tais multiplicações e divisões, ou, de modo mais geral, em todos os *cálculos* que impomos às multidões, devemos *saber de antemão* como os diferentes números *se relacionam entre si* e como se constituem *em si mesmos*. Toda essa ciência, que diz respeito ao comportamento dos números entre si, isto é, às suas relações mútuas, e que primeiro nos permite *relacionar* os números, ou seja, calcular com eles, é chamada de "arte do cálculo" – "logística". (KLEIN, 1992, p. 18-19, tradução nossa, grifos do autor)[74].

Depreende-se, portanto, que a arte do número é complementada pela arte do cálculo. "'Aritmética' não é, portanto, 'teoria dos números', mas antes de mais nada a

---

[72] a "science" which we first acquire in our intercourse with objects of daily life and in which we may thereafter advance to special expert knowledge.

[73] In the face ofdefinite multitudes of things we habitually determine their exact number — we "number," i.e., count, the things, and this presupposes a certain familiarity with numbers in general, especially in the case of larger multitudes. In order to be able to count we must know and distinguish the single numbers, we must "distinguish the one and the two and the three".

[74] we are no longer satisfied with the number by which we have enumerated the things in question, but that we bring to bear on this number new "numbers," whether we wish to separate off a "third" part of the respective quantity or wish to produce a multitude which amounts to "four" times the given one. In such multiplications and divisions, or, more generally, in all calculations which we impose on multitudes, we must know beforehand how the different numbers are related to one another and how they are constituted in themselves. This whole science, which thus concerns the behavior of numbers toward one another, i.e., their mutual relations, and which first enables us to relate numbers, i.e., to calculate with them, is called the "art of calculation" - "logistic".

arte da contagem correta" (KLEIN, 1992, p.19, tradução nossa)[75]. Já em Platão, contudo, o conceito de *arithmos,* entendido como elemento de contagem de coisas sensíveis, materiais, é ampliado de modo que essas coisas sensíveis, por assim dizer, desvanecem, dando lugar às mônadas puras, inteligíveis, aquela unidade que eleva "poderosamente a alma para o alto e [força-a] a discorrer sobre os números em si, sem aceitar jamais que alguém introduza nos seus raciocínios números que tenham corpos visíveis ou palpáveis" (PLATÃO, 2005, p. 197). As mônadas puras, portanto, em Platão, são aqueles elementos que possibilitam a "contemplação da natureza dos números unicamente pelo pensamento, não cuidando deles por amor à compra e venda, (...) [mas] para facilitar a passagem da própria alma da mutabilidade à verdade e à essência" (PLATÃO, 2005, p. 197). Essa mônada pura, assim concebida, seria indivisível. Portanto, segundo esse entendimento, quando o logístico prático se propõe a calcular com frações da unidade, acaba por violar aquela inteligibilidade do número, que o desvincula de toda a materialidade (ao ser tomado como mônada pura), e, portanto, da própria ciência da Aritmética, já que a Logística teórica exige que se opere por meio de um conceito de número cuja base ontológica é ampliada em coleções de unidades indivisíveis ou "mônadas puras".

Conforme compreendemos, Platão enuncia uma Logística teórica e uma prática, cujas diferenças são captadas pelo modo como o sujeito apreende seu objeto de contagem. No primeiro caso, contam-se mônadas; no segundo, coisas desiguais, factuais:

> O que diferencia essa logística teórica da logística prática é o tipo de multidão com que cada uma lida; em um caso, estamos preocupados com multidões de objetos "desiguais" – e obviamente todos os objetos dos sentidos o são – no outro, com multidões de objetos, unidades totalmente semelhantes, ou seja, precisamente aquelas que não podem ocorrer no reino dos objetos dos sentidos. (KLEIN, 1992, p. 22-23, tradução nossa)[76].

Pode-se dizer que, não obstante a intenção prática do logístico quando lida com *arithmos,* o que subjaz ou valida o seu modo de pensar é a episteme manifestada de forma consciente por quem lida com a Logística teórica, já que "eleva a uma ciência explícita aquele conhecimento das relações entre os números que, embora

---

[75] "Arithmetic" is, accordingly, not "number theory," but first and foremost the art of correct counting.
[76] What differentiates this theoretical logistic from practical logistic is the kind of multitude with which each deals; in the one case we are concerned with multitudes of "unequal" objects — and obviously all objects of sense are such — in the other with multitudes of wholly similar units, namely precisely those which cannot occur in the realm of objects of sense.

implicitamente, precede, e de fato deve preceder, todo o cálculo. Só assim a logística faz o uso correto desse conhecimento" (KLEIN, 1992, p. 23, tradução nossa)[77]. Se for abstraído o aspecto que conecta a Logística aos objetos dos sentidos, ela passa a "referir-se a um material 'neutro', ou seja, às mônadas homogêneas" (KLEIN, 1922, p. 23, tradução nossa)[78]. Conclui-se, desse modo, que "a logística teórica surge da logística prática quando suas aplicações práticas são negligenciadas [abstraídas] e seus pressupostos são perseguidos por si mesmos" (KLEIN, 1922, p. 23, tradução nossa)[79].

A discussão sobre o entendimento grego de *arithmos* desenvolve-se, portanto, em dois momentos. No primeiro deles, é conceituado como um número específico de objetos específicos e, portanto, captado pelos sentidos no processo de contagem. No segundo, abstraindo-se dos objetos da percepção, aqueles factuais, passa a ser fundamentado pelos objetos homogêneos, oriundos de uma episteme, baseada na razão: as mônadas, tomadas como uma unidade pura.

Há que se considerar, contudo, que esta evolução conceitual a respeito do número não ocorreu sem que houvesse contrapontos. Por um lado, Platão considerava as unidades puras como seres preexistentes, separados da percepção sensorial; por outro lado, para Aristóteles essas unidades puras não têm existência própria e

> se afirmarmos que os objetos matemáticos existem desse modo, ou seja, como realidades separadas, decorrerão consequências contrárias à verdade e ao que é comumente admitido. Com efeito, as grandezas matemáticas, em virtude desse seu modo de ser, deverão ser anteriores às grandezas sensíveis; entretanto, na verdade são posteriores. (ARISTÓTELES, 2002, p. 595).

Portanto a indivisibilidade da mônada pura "é apenas uma expressão do fato de que contar e calcular sempre pressupõe uma 'unidade' última e irredutível que deve ser entendida como a 'medida' dada" (KLEIN, 1992, p. 9, tradução nossa)[80]. Isto quer dizer que, para Aristóteles, a unidade foi escolhida como contador apenas por

[77] theoretical logistic raises to an explicit science that knowledge of relations among numbers which, albeit implicitly, precedes, and indeed must precede, all calculation. Only in doing this does logistic make the right use of this knowledge.
[78] refer to a "neutral" material, namely the homogeneous monads.
[79] theoretical logistic arises from practical logistic when its practical applications are neglected and its presuppositions are pursued for their own sake.
[80] Their indivisibility is only an expression of the fact that counting and calculating always presuppose a last, irreducible "unit," which is to be understood as the given "measure."

conveniência e que nada impede que uma medida menor possa ser usada como elemento de contagem, o que soluciona o problema da indivisibilidade da unidade. Em Aristóteles abre-se, portanto, a possibilidade de se operar com partes fracionárias da antiga unidade.

Se para Platão os objetos matemáticos são considerados como entidades separadas da realidade, para Aristóteles os objetos mundanos são captados pelas sensações e essas entidades advêm de um processo de abstração em que são desconsiderados seus aspectos sensíveis. Assim,

> [o] matemático desenvolve sua investigação acerca das noções obtidas por abstração. Ele estuda as coisas prescindindo[-as] de todas as características sensíveis: por exemplo, do peso e da leveza, da dureza e de seu contrário e, ainda, do quente e do frio e de todos os outros pares de contrários que exprimem características sensíveis. (ARISTÓTELES, 2002, p. 495).

Consoante ao modo aristotélico de pensar, Klein afirma que: “[s]e a redução vai tão longe que as coisas não são mais consideradas nem mesmo como ‘meros corpos’, mas apenas como ‘itens’, essas coisas foram transformadas em ‘mônadas neutras’” (KLEIN, 1992, p. 105, tradução nossa)[81]. É o processo de abstrair que as converte nesses meros itens contáveis, nessas mônadas neutras que constituem “o material noético que fundamenta o estudo científico” (KLEIN, 1992, p. 105)[82].

É possível, agora, por meio das considerações de Klein, destacar o diálogo entre as teorias de Aristóteles e Husserl, uma vez que para o fenomenólogo é do mundo-da-vida que emana o conhecimento que temos das coisas e para ele as idealidades são constituídas e produzidas por meio de um processo que também compreende a abstração com as materialidades. Nesse sentido, Diofanto constitui figura fundamental no desenvolvimento da simbologia algébrica, no resgate daquele pensamento algébrico grego de um período anterior a ele. Esse valor atribuído a Diofanto é fortalecido quando se constata que suas obras foram referência para os matemáticos do Renascimento, quando estes retomaram e expandiram a compreensão grega sobre a Álgebra. Esses aspectos serão discutidos nas próximas subseções.

---

[81] If the reduction goes so far that things are no longer regarded even as “mere bodies” but only as “items,” these things have been transformed into “neutral” monads.
[82] the noetic material which underlies scientific study.

### 5.4 A Álgebra de Diofanto e sua concepção de números

Como nosso trabalho está centrado na Álgebra e esta subseção, mais especificamente, trata da origem da Matemática simbólica, vamos agora, amparados pelos conceitos de *arithmos* e mônadas, conforme tratamos até aqui, abordar as contribuições trazidas por Diofanto (201-214 d.C – 284-298 d.C) à Álgebra. É importante a referência a esse matemático, inclusive porque ele poderia ser considerado um ponto de inflexão entre a linguagem retórica e a linguagem simbólica dessa área da Matemática.

A obra de Diofanto, que chegou até nosso tempo, está para a resolução de equações como estava a obra de Euclides para a Geometria de seu tempo. Isto é, ela sintetiza os métodos conhecidos para a resolução das equações de primeiro e de segundo graus, determinadas ou indeterminadas, sendo que "[a]o longo de sua apresentação, Diofanto utiliza, além de vários outros sinais, uma série de abreviaturas de incógnitas e suas potências que entram no próprio cálculo, conferindo-lhe um caráter 'algébrico'" (KLEIN, 1992, p. 126, tradução nossa)[83]. Isso lhe rendeu, muitas vezes, o título de precursor ou até mesmo inventor ou criador da Álgebra moderna.

Ao fazer algumas considerações sobre as motivações externas que teriam influenciado o emprego da linguagem sincopada por Diofanto, Klein, contudo não se atém a essas motivações, mas procura trazer à luz a Matemática grega buscando a compreensão dessa ciência segundo os próprios gregos, pois isso permitirá a ele

> somente [assim poder] determinar que tipo de meios conceituais gregos, em distinção dos modernos, a matemática emprega. E, do mesmo modo, apenas tornando explícito o caráter particular da intencionalidade grega, cuja peculiar transformação nos séculos XVI e XVII equivale à "introdução de um meio de expressão completamente novo para o pensamento matemático", a saber, um simbolismo formal "algébrico", pode-se compreender o caráter conceitual específico deste último". (KLEIN, 1992, p. 127 – 128, tradução nossa)[84].

---

[83] In the course of his presentation Diophantus uses, besides various other signs, a series of abbreviations for unknowns and their powers which enter into the calculation itself, thus lending it an "algebraic" character.

[84] Only then can we determine what kind of conceptual means Greek, in distinction from modern, mathematics employs. And similarly, only by making explicit the particular character of Greek intentionality, whose peculiar transformation in the sixteenth and seventeenth century is equivalent to the ''introduction of a completely new means of expression for mathematical thinking," namely, a formal "algebraic" symbolism, can the specific conceptual character of the latter be understood.

Trata-se, este propósito, da realização da volta às origens, de uma compreensão da intencionalidade grega com a finalidade de compreender o simbolismo formal algébrico, atitude de caráter fenomenológico de Klein. Diofanto elevou a Logística ao nível de uma verdadeira ciência, uma ciência apodítica, uma vez que "acrescenta a 'demostração' (*απόδείξις*), ou seja, a solução real de cada problema" (KLEIN, 1992, p. 128)[85] . Além disso, segundo Klein, Diofanto aproxima-se de Aristóteles no que diz respeito ao emprego de números concebidos como uma multidão de mônadas. Isto porque as mônadas diofantinas são de natureza divisíveis, "fundada em uma teoria peripatética das relações numéricas" (KLEIN, 1992, p. 135, tradução nossa)[86], portanto aristotélica. Contudo o "uso de 'frações' por Diofanto não deve, de forma alguma, nos levar a concluir que, no nível de sua Logística, o conceito de *arithmos* compreende tudo o que chamamos de 'reino do número racional'" (KLEIN, 1992, p. 136, tradução nossa)[87]. Na Matemática grega em geral, bem como em Diofanto, *arithmos* significa uma quantidade de alguma coisa, por conseguinte, por fração, Diofanto entende "*um número de partes fracionárias*. A 'magnitude' de tal parte fracionária corresponde a 'quantas' (ou seja, que multidão de) partições a mônada sofre (KLEIN, 1992, p. 137, tradução nossa e grifos do autor)[88]. Isso quer dizer que, por exemplo, a fração ¼ significa nada mais do que uma contagem de 4 partes de um todo.

Ainda que Diofanto tenha trabalhado com a concepção clássica de *arithmos,* sua Álgebra apresenta, no que diz respeito à linguagem, importantes inovações. Esse pensador foi o responsável pela sincopação da Álgebra que, embora tenha continuado retórica por um longo tempo e mesmo tenha continuado com ele, em parte, a retórica, tornou-se mais sintética em função da abreviação de certas quantidades e operações que se repetem mais frequentemente, dando assim um salto qualitativo em seus processos. Diofanto adotou um símbolo para o valor desconhecido, a incógnita, a letra grega sigma "ς". Além disso, criou os símbolos $D^Y$, dínamos, para o quadrado da incógnita; $K^Y$, kubos, para o cubo; $D^YD$, dínamos-dínamos, para a potência de

---

[85] This is why he adds the "demonstration" (*απόδείξις*) i.e., the actual solution of each problem.
[86] founded on a Peripatetic theory of number relations.
[87] Diophantus'use of "fractions" should by no means lead us to conclude that on the level of Diophantine logistic the concept of the *arithmos* comprehends the whole of what we call the "realm of rational number."
[88] Correspondingly, by a fraction Diophantus means nothing but *a number of fractional* parts.171 The '"magnitude" of such a fractional part corresponds to "how many" (i.e., what multitude of) partitions the *monas* undergoes.

expoente quatro; $DK^Y$, quadrado cubo, para as potências de expoente cinco; e $K^YK$, cubo-cubo, para expoente seis. Conforme Cajori (1993, p. 72-73, tradução nossa), "Diofanto não [tinha] símbolo para multiplicação; ele [escrevia] os resultados numéricos da multiplicação sem qualquer passo preliminar que exigiria o uso de um símbolo. A adição [era] expressa por simples justaposição" [89]. A justaposição de uma expressão que agora unimos pelo sinal de adição (+) pode ser exemplificada por $\varsigma\bar{K}M^0\bar{\varepsilon}$, em que o símbolo de mônada ($M^0$) indica que a posição à direita dele será ocupada por um número, isto quer dizer que a expressão anterior, escrita na notação atual, pode ser representada por: $20x + 5$ .

As inovações simbólicas introduzidas por Diofanto conferiram a ele um trabalho facilitador para realizar "a multiplicação de expressões que são compostas de números de diferentes 'espécies'" (KLEIN, 1992, p. 147, tradução nossa)[90] ou seja, trabalhou potências com diferentes expoentes, números fracionários, números inteiros, entre outros, permitindo assim, que ele fizesse o uso do conceito de número como um caráter puramente instrumental.

> A facilidade com que Diofanto realiza a multiplicação de expressões que são compostas de números de diferentes "espécies", a maneira natural como ele lida com tais expressões em geral, a maneira, além disso, como ele ensina a multiplicação com "falta de" magnitudes, sem, no entanto, considerar os números negativos possíveis como tais, e, finalmente, o uso puramente instrumental que ele faz do conceito de eidos — tudo isso mostra, de fato, uma tensão interna entre o "material" tratado e o caráter dos conceitos forçado a isso. (KLEIN, 1992, p. 147, tradução nossa)[91].

Entre os trabalhos que Diofanto escreveu, aquele intitulado *Aritmética* é considerado o mais importante e dele restam seis dos treze livros. Trata-se, essa obra, de "uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de gênio em seu campo" (EVES, 2011, p. 207), razão pela qual vários comentadores ocuparam-se dela ao longo dos séculos e uma dessas edições, do século XVII, é, inclusive, historicamente muito importante, pois possui algumas

---

[89] Diophantus has no symbol for multiplication; he writes down the numerical results of multiplication without any preliminary step which would necessitate the use of a symbol. Addition is expressed by mere juxtaposition.

[90] The multiplication of expressions which are composed of numbers of different "kinds".

[91] The ease with which Diophantus carries out the multiplication of expressions which are composed of numbers of different "kinds," the matter of-course fashion in which he handles such expressions in general, the way, furthermore, in which he teaches multiplication with "lacking" magnitudes, without, however, considering negative numbers possible as such,187 and, finally, the purely instrumental use he makes of the eidos concept — all this does indeed show an inner tension between the "material" treated and the character of the concepts forced on it.

anotações marginais de Pierre de Fermat (1601 - 1665). Dentre elas, figura o chamado "último teorema de Fermat", que trata da impossibilidade de separar um cubo em dois cubos, ou uma biquadrada em duas biquadradas, ou, em geral, sobre a impossibilidade de decompor uma potência com expoente inteiro maior do que dois em duas outras potências com o mesmo expoente daquela que seria decomposta:

> Não existem inteiros positivos $x, y, z, n$ onde $n > 2$, de modo que $x^n + y^n = z^n$. Esta é a famosa conjetura conhecida como último "teorema" de Fermat. Ela foi enunciada por Fermat na margem de seu exemplar da Aritmética de Diofanto, em tradução de Bachet, ao lado do Problema 8 do Livro II: "Dado um número quadrado, dividi-lo em dois quadrados". Na nota marginal de Fermat lê-se, "Dividir um cubo em dois cubos, uma quarta potência ou, em geral uma potência qualquer em duas potências da mesma denominação acima da segunda é impossível, e eu seguramente encontrei uma prova admirável desse fato, mas a margem é demasiado estreita para contê-la". (EVES, 2011, p. 391-392).

A demonstração desse teorema, cuja verdade da afirmação de Fermat sobre tê-la desenvolvido é um enigma, só foi apresentada, formalmente, em 1995, pelo inglês Andrew Wiles (1953), com o emprego de uma Matemática que ainda não era disponível no tempo de Fermat. Importa, contudo, que suas anotações foram de grande importância para o desenvolvimento da Teoria dos Números e tais anotações surgiram, justamente, no diálogo de Fermat com a obra de Diofanto, ou seja, no retorno de Fermat ao pensamento grego. Foi, portanto, também por intermédio de Diofanto, que o matemático francês dialogou com as culturas antigas e que, nesse diálogo, se teceram suas ideias e foram concretizadas suas demonstrações, que são também formas de convencimento. Se por um lado a retórica procura convencer o enunciatário a respeito do ponto de vista do enunciador quando este o formula, por meio da linguagem natural, de modo menos sintético e sujeita à ambiguidade; por outro lado, uma demonstração matemática procura convencer quem a lê a respeito da verdade enunciada em uma proposição, do modo mais sintético possível, sem ambiguidade.

O próprio Diofanto, não obstante sua genialidade, não foi o único daquela época a contribuir com o desenvolvimento da Álgebra. Conforme Eves (2011), também

> [o]s hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Muitos dos problemas aritméticos eram resolvidos por *falsa posição*. Outro método de resolução preferido era o de *inversão* no qual se trabalha para trás, a partir dos dados. (p. 255, grifos do autor).

A cultura hindu, que sofreu com constantes invasões estrangeiras ao longo dos séculos V ao XV de nossa Era, deixou importantes contribuições das quais destacamos aqui as relativas à Álgebra, notadamente quanto ao fato de a terem sincopado, assim como Diofanto:

> [Os hindus] indicavam a adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escrevendo-se *bha* (primeira sílaba da palavra *bhavita*, “produto”) depois dos fatores, a divisão escrevendo-se o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escrevendo-se *ka* (da palavra *karana*, “irracional”) antes da quantidade. *Brahmagupta* denota a incógnita por *yā* (de *yāvattāvat*, “tanto quanto”). Os inteiros conhecidos eram antecedidos de *rū* (de *rūpa*, “número puro”). As incógnitas adicionais eram indicadas pelas sílabas iniciais de palavras que expressam diferentes cores. (EVES, 2011, p. 256)[92].

Além disso, ainda segundo Eves (2011, p. 256), os hindus reconheciam os números negativos bem como os irracionais e sabiam que uma equação quadrática tem duas raízes, bem como sabiam resolvê-las pelo método conhecido como “completar quadrados”. Diofanto teria ainda, segundo Klein (1992), exercido influência na Álgebra desenvolvida ao longo dos anos em que a cultura árabe, tendo se tornado importante no cenário do mundo antigo, serviu para estabelecer conexões, ao longo da Idade Média, entre as culturas antigas do Oriente, da Grécia e a renascentista europeia que, por sua vez, iria desenvolver a Álgebra simbólica. Argumento em favor dessa função exercida pela cultura árabe entre dois momentos da Álgebra está no fato de que essa escola algébrica, em voga no Renascimento europeu, “toma consciência de seu próprio caráter ‘científico’ e da novidade de seu conceito de ‘número’ apenas no momento do contato direto com a ciência grega, isto é, com a *Aritmética* de Diofanto”. (KLEIN, 1992, p. 148, tradução nossa)[93]. Reitera-se aqui o argumento de que a Álgebra simbólica tem, entre os aspectos de seu desenvolvimento, uma volta à sua origem grega intermediada pela leitura da obra de Diofanto, que foi “colocado na forma ‘simbólica’ moderna em 1585 por [Simon] Stevin [(1548 - 1620)] e em 1591 por Viète” (KLEIN, 1992, p. 148, tradução nossa)[94]. Foi, contudo, Viète que "por meio da introdução de um simbolismo matemático geral,

---

[92] O divisor debaixo do dividendo é um procedimento simbólico usado na modernidade. É possível que esse procedimento tenha sido uma herança hindu.

[93] This algebraic school becomes conscious of its own “scientific” character and of the novelty of its 'number' concept only at the moment of direct contact with the corresponding Greek science, i.e., with the *Arithmetic* of Diophantus.

[94] Diophantus is put into modern “symbolic” form in 1585 by Stevin and in 1591 by Vieta.

realmente [realizou] a transformação fundamental das bases conceituais [da Álgebra]" (KLEIN, 1992, p. 149, tradução nossa)[95]. Antes de nos voltarmos para Viète, são necessárias, portanto, algumas considerações sobre a cultura medieval, com ênfase nos árabes, para compreender como se deu o processo de transmissão da Matemática para a Europa de seu tempo.

### 5.5 As contribuições da cultura medieval para a divulgação das ideias matemáticas: uma ênfase no mundo árabe

Os árabes interagiram com as diferentes culturas que desenvolveram a Matemática ao longo dos séculos e, graças a eles, muito do conhecimento antigo foi preservado na passagem entre a Antiguidade e o Renascimento. Trata-se de um povo que, em termos históricos, passou rapidamente de uma cultura iletrada de nômades do deserto a constituir um grupo que, a partir das ideias de Maomé (cerca de 570 d.C. a 632 d.C.), embora não totalmente hegemônico do ponto de vista político, pôde ser identificado como cultura islâmica. Foram conquistadores que se mostraram interessados em absorver os conhecimentos daqueles que conquistavam. Bagdá tornou-se um centro islâmico, de tal modo que "por [volta de] 766 [d.C.] (...) uma obra astronômico-matemática, conhecida pelos árabes como *Sindhind* foi trazida a Bagdá da Índia" (BOYER, 1974, p. 166) e, consequentemente, foi traduzida para o árabe, assim como tempos depois, aproximadamente em 780 d. C., Ptolomeu (90 – 168)[96] também foi traduzido do grego. Esses movimentos culturais levam à conclusão de que "o 'milagre árabe' não está tanto na rapidez com que surgiu o império político como no entusiasmo com que, uma vez despertado seu gosto, os árabes absorveram a cultura de seus vizinhos" (BOYER, 1974, p. 166). Graças a esse gosto árabe pelo saber e sua capacidade de dialogar com as culturas conquistadas, muito do conhecimento antigo da Matemática, entre eles as obras algébricas, puderam chegar ao mundo ocidental.

---

[95] [it is Vieta who], by means of the introduction of a general mathematical symbolism, actually realizes the fundamental transformation of the conceptual foundations.

[96] Cláudio Ptolomeu foi um cientista grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito. Dentre seus trabalhos, destaca-se aqueles em matemática, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical. Segundo Evens, foi ele que "depois de Arquimedes, [realizou] a primeira aproximação notável do [número] pi (...) em sua famosa *Syntaxis mathematicas* (EVENS, 2011, p. 142). Essa obra é popularmente conhecida por seu título árabe de *Almagesto.*

Especialmente no que diz respeito à Álgebra, como apontamos no início desta seção ao tratar da origem etimológica do termo, sua denominação vem da obra de um sábio do califado de Al-Mamun (809-833 d.C.), califa que instituiu em Bagdá uma "Casa da Sabedoria". O matemático Abu Jafar Moamed Ihn Musa al-Kowarizmi[97] escreveu, entre outras obras, uma de Aritmética e outra de Álgebra. A obra de Aritmética expôs de forma tão completa os "numerais hindus que provavelmente foi o responsável pela impressão muito difundida, mas falsa, de que nosso sistema de numeração é de origem árabe" (BOYER, 1974, p. 166). Metonimicamente e por corruptela do termo, a Ciência, foi designada pelo nome do autor e de sua obra, *al-Kowarizmi*, derivam os nossos termos algarismo e algoritmo, embora não tenha havido nenhuma contribuição original por parte dele para a Ciência e nem tenha ele negado que o sistema fosse de origem hindu.

A obra de Álgebra, por sua vez, de *Aljabr Wal — Muqabala*, ou *Al-jabr Wa'l Muqabalah* (igualmente aqui a grafia varia dependendo das fontes) legou ao Ocidente, também por metonímia, agora tomando-se o título pelo conteúdo de que a obra trata, a palavra que designa uma área da Matemática. Ainda que a obra de Kowarizmi seja mais elementar do que a de Diofanto e que seja uma Álgebra retórica,

> *Al-jabr* está mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofanto e de Brahmagupta, pois o livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada, mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de segundo grau. (BOYER, 1974, p. 167).

Boyer faz uma análise da Aritmética e da Álgebra de Kowarizmi e por essa análise podemos dizer que os árabes foram uma espécie de catalisadores, no sentido figurado, ou seja, de estimuladores dos diferentes conhecimentos matemáticos. Um argumento a favor dessa ideia é que ainda no mundo árabe, em um período posterior a Kowarizmi, destaca-se a figura de Omar Khayyam (ou al-Khayyãmi, *c.* 1038/48 - 1123/24), poeta, matemático e astrônomo persa, cujo tratado sobre Álgebra, escrito por volta de 1074, explica como resolver todas as equações de segundo e terceiro graus. Nesse tratado, a partir do prólogo, percebe-se a influência dos *Elementos,* de Euclides, obra considerada indispensável pelo próprio Khayyam para a compreensão de seu texto. Esse tratado

[97] Boyer adota a grafia Moamed Ibu Musa al-Kowarizmi assim como Struik, mas em muitas fontes, inclusive traduções eletrônicas do nome escrito em árabe, grafam como Abu Jafar Moamed Ihn Musa al-Kowarizmi. Eves(2011), por sua vez, grafa Al-Khowârizmí.

> continha uma investigação sistemática de equações cúbicas. Empregando um método usado ocasionalmente pelos Gregos, determinou as raízes dessas equações como a intersecção de duas secções cónicas. Não tinha soluções numéricas e fazia a discriminação - também no estilo grego - entre soluções “geométricas” e “aritméticas”, existindo apenas as últimas se as raízes fossem racionais positivas. Esta abordagem era, por isso, inteiramente diferente da do século XVI, dos matemáticos bolonheses, que usavam métodos puramente algébricos. (STRUIK, 1992, p. 126).

A Europa medieval não produziu conhecimento matemático significativo durante a Alta Idade Média, do século V ao XI. Pode-se dizer que, nesse período, o Oeste Europeu foi, paradoxalmente, beneficiado pela invasão árabe à Península Ibérica, no século VIII d. C., invasão que se prolongou por quase sete séculos em algumas regiões da Espanha, apesar do movimento de retomada promovido pelos cristãos. Esse benefício deve-se ao fato de os mouros, conforme vimos, terem sido os responsáveis pela preservação de grande parte do conhecimento do mundo antigo que esteve negligenciado no mundo medieval europeu. Essa tese comprova-se pelo fato de que após a queda de Toledo, em 1085 d. C., “verificou-se um influxo de intelectuais cristãos rumo àquela cidade, visando adquirir o saber muçulmano” (EVES, 2011, p. 291), fenômeno que aconteceu também em outros centros espanhóis da cultura árabe de tal modo que “o século XII tornou-se, na história da matemática, um século de tradutores” (EVES, 2011, p. 291). Outra região, a Sicília, também foi irradiadora do conhecimento matemático. Devido à sua posição geográfica, a ilha estabeleceu uma conexão entre Oriente e Ocidente, durante esse período:

> Assim foram obtidos e traduzidos para o latim muitos manuscritos gregos e árabes sobre ciência e matemática [na Sicília]. Esse trabalho foi grandemente encorajado pelos dois reis e patronos da ciência Frederico II (1194-1250) e seu filho Manfredo (c. 1231-1266). (EVES, 2011, p. 291).

Além dos árabes, também os mercadores italianos das cidades de Gênova, Pizza, Veneza, Milão e Florença, por força de suas atividades, entraram em contato com os povos do Oriente e trouxeram para a Península Itálica conhecimentos aritméticos, algébricos e os números indo-arábicos. Esses movimentos de saberes da Pérsia, da Índia, da Grécia para Bagdá, de Bagdá para o Norte da África e desta região para a Península Ibérica, para a Sicília e para a Europa Ocidental foi, em grande medida, o que estimulou o desenvolvimento posterior da Matemática e da Álgebra no Velho Continente. Dele participaram tanto os mouros quanto os mercadores europeus. Essa conexão entre as diversas culturas materializou-se, por exemplo, no século XIII, na obra de Leonardo Fibonacci (c. 1175-1250), cujas atividades do pai mercador despertaram seu interesse pela Aritmética, interesse que se ampliou depois de viagens ao Egito, à Grécia, à Sicília e à Síria. Sua obra, *Liber abaci*, cuja segunda versão conhecida é de 1228, ocupa-se

> de aritmética e álgebra elementares e, embora em essência [seja] uma pesquisa independente, mostra a influência das álgebras de Al-Khowârizmí e Abu Kâmil. O livro ilustra com profusão e defende com energia a notação indo-arábica, muito se devendo a ele pela introdução desses numerais na Europa. (EVES, 2011, p. 293).

Não obstante o talento e a profusão de obras brilhantes que produziu, a Álgebra de Fibonacci é retórica. Contudo, um contemporâneo dele, Jordanus Nemorarius (1225 – 1260), apesar de ter deixado trabalhos de menor relevância, produziu textos sobre Álgebra que podem ser considerados, em seu conjunto, “o primeiro passo à frente no assunto na Europa Ocidental” (EVES, 2011, p. 294), uma vez que Nemorarius “talvez tenha sido o primeiro a usar letras amplamente para representar números em geral, embora essa prática não tivesse influenciado escritores subsequentes” (EVES, 2011, p. 294). O uso de letras para representar números gerais é um salto qualitativo se comparado ao *arithmo,* aquele número concreto, sensorial, que representa uma contagem de coisas específicas, conforme tratamos anteriormente. Isso porque, as letras são símbolos que não representam uma coisa, um objeto ou um conceito determinado, mas são tratadas como um elemento de cálculo, um uso instrumental que permitiu, por assim dizer, um avanço da Aritmética, avanço que poderia ser representado, por um vetor com origem no mundo-da-vida e direção e sentido apontando para o mundo das idealidades, aquele expresso pela linguagem simbólica.

Após um período de estagnação, o século XV foi marcado pelo Renascimento, em grande parte resultante do ingresso de obras clássicas na Europa trazidas por estudiosos refugiados na Península Itálica, em decorrência da tomada de Constantinopla pelos turcos em 1453. O desenvolvimento da Matemática deu-se nas cidades italianas e em certas cidades da Europa Central, Nuremberg, Viena e Praga. Especificamente quanto à Álgebra, destaca-se a figura de Johann Müller (1436 - 1476), cujo tratado *De triangulis omnimodis*, foi publicado postumamente em 1533. Esse tratado, dedicado às trigonometrias plana e esférica, faz uso ainda de uma Álgebra retórica (EVES, 2011, p. 297).

Já outro matemático do século XV, o francês Nicolas Chuquet (1445 - 1488), em sua obra *Triparty en la science des nombres*, escrita em 1484 e só impressa no século XIX, ocupou-se, na primeira parte, “do cálculo com números racionais, [na] segunda com números irracionais e [na] terceira aborda a teoria das equações (...) [sendo que] parte de sua álgebra é sincopada” (EVES, 2011, p. 297-298).

Outra obra importante do século XV foi a *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita*, conhecida por *Sūma*, de Luca Pacioli (*c.* 1445 - 1509). Assim como o *Triparty* de Chuquet, trata-se de um resumo do conhecimento da época e, no que se refere à Álgebra,

> inclui a resolução usual de equações lineares e quadráticas. Embora não tenha a notação exponencial de Chuquet, há uso crescente de sincopação por abreviações. As letras *p* e *m* por essa época eram largamente usadas na Itália para indicar adição e subtração, e Pacioli usou *co*, *ce*, e *ae* para *cosa* (a incógnita), *censo* (o quadrado da incógnita), e *aequalis* [igualdade] respectivamente. Para a quarta potência da incógnita ele naturalmente usou *cece* (para quadrado quadrado). Partilhando de uma impressão de Omar Khayyan, ele julgava que equações cúbicas não podiam ser resolvidas algebricamente. (BOYER, 1974, p. 204).

A importância dessa obra para a Álgebra, segundo Eves (2011, p. 298), é que “Depois da *Sūma*, a álgebra, que por dois séculos fora negligenciada, experimentou um crescimento intenso na Itália, progredindo também na Alemanha, na Inglaterra e na França”. Ainda no século XV, encontra-se o primeiro registro dos símbolos + e – numa obra de Johann Widman (1460 - 1498), publicada em Leipzig em 1489:

> esses símbolos eram usados meramente para indicar excesso e deficiência e não com os significados operacionais de hoje. É bastante provável que o primeiro desses sinais seja uma contração da palavra latina *et*, que era usada frequentemente para indicar adição; e é possível que o segundo desses sinais decorra da abreviação $\overline{m}$ para menos (...). Em 1514, o matemático holandês Vander Hoecke usou + e - como símbolos de operações algébricas, mas é provável que eles já tivessem sido usados antes com o mesmo significado. (EVES, 2011, p. 298).

No século XVI, Robert Recorde (*c.* de 1510 - 1558) tem especial importância no desenvolvimento dos símbolos algébricos. Entre outras obras, em seu texto *The Whetstone of Witte*, publicado em 1557, fez uso pela primeira vez do moderno símbolo de igualdade, justificando “a adoção de um par de segmentos de reta paralelos como símbolo de igualdade alegando que ‘não pode haver duas coisas mais iguais’” (EVES, 2011, p. 298). Também no século XVI, “outro símbolo algébrico moderno, o conhecido radical [adotado talvez porque lembra um *r* (de raiz) minúsculo] foi introduzido em

1525 por Christoff Rudolff em seu livro de Álgebra intitulado *Die Coss*" (EVES, 2011, p. 300). A terceira parte dessa obra, dedicada à Álgebra, trata de equações: "As raízes negativas de uma equação são descartadas, mas se usam os sinais +, - e se representa a incógnita muitas vezes por uma letra" (EVES, 2011, p. 300).

Em Bolonha, universidade que foi uma das mais importantes da Europa no século XVI, houve grande progresso do pensamento algébrico na tentativa de encontrar uma resolução geral para as equações cúbicas. Entre esses matemáticos figuram: o italiano Scipione del Ferro (1465 - 1526), que teria desenvolvido um método para encontrar a solução de qualquer equação cúbica da forma $x^3 + px = q$, mas não publicou suas soluções; Tartaglia (1500 - 1557), que teria redescoberto os métodos de Scipione, em 1535, mostrou os resultados, mas guardou segredo em relação ao método de resolução; e, finalmente, Girolamo Cardano (1501 - 1576) que, em 1545, divulgou na obra *Ars Magna* o método que Tartaglia confiara-lhe em segredo. Além disso, "*Ars magna*, de Cardano, continha outra descoberta brilhante: o método de Ferrari para reduzir a solução da equação biquadrática geral à de uma equação cúbica" (STRUIK, 1992, p. 147). Cardano também levou em conta os números negativos, os quais denominou "fictícios", contudo, não progrediu no "caso irredutível" da equação cúbica, em que há três raízes reais as quais aparecem como somas ou diferenças daquilo que hoje se conhece como "números complexos". Raffael Bombelli (1526-1572), em seu livro *Algebra*, de 1572, por sua vez, em um manuscrito sobre Geometria, desenvolveu uma teoria de números complexos imaginários. Leibniz (1646-1716) e Euler (1707-1783), foram leitores de Bombelli: "Euler cita Bombelli na sua própria *Álgebra*, no capítulo sobre equações biquadráticas. A partir dessa altura, os números complexos perderam parte do seu carácter sobrenatural, apesar de a sua aceitação total datar do século XIX" (STRUIK, 1992, p. 148).

Após esse breve histórico, tratando primordialmente do período medieval, sobre o desenvolvimento da Álgebra, iremos, na próxima subseção, nos ater ao Renascimento, sobretudo nas contribuições dadas por Viète (1540 - 1603), uma vez que segundo Klein (1992), foi a reassimilação da obra de Diofanto por esse matemático francês que, ao realizar um movimento de dessedimentação da Matemática, voltou às origens do pensamento grego e contribuiu para o grande salto da linguagem algébrica a qual, após ele, se tornaria definitivamente simbólica.

### 5.6 Viète e a volta aos gregos: contribuições para o desenvolvimento da Álgebra simbólica - a Logística Especiosa

Entre as contribuições de Viète para o desenvolvimento da Matemática destacaremos aqui, por conta de nosso objetivo, aquela que diz respeito à Álgebra, evidenciando sua evolução e o desenvolvimento de sua linguagem, a partir do diálogo que o matemático francês estabeleceu com os antigos pensadores, notadamente com a cultura grega. Nesse aspecto, é relevante notar o que temos dito sobre o fato de o pensamento algébrico transcender o simbolismo ou a roupagem de símbolos que o reveste, pois mesmo fazendo uso de uma Álgebra sincopada, foi Viète quem “chegou mais perto das ideias modernas [mostrando que a] matemática é uma forma de raciocínio e não uma coleção de truques” (BOYER, 1974, p. 223). Viète não usou uma notação totalmente simbólica em seus estudos. Por exemplo, a potência da incógnita, em vez de $A^3$ ou *AAA* era grafada como *A cubus* e a segunda potência como *A quadratus*, a multiplicação era indicada com a palavra latina *in e* a igualdade assinalada pela abreviação do termo latino *aequalis*. Não obstante isso, Viète introduziu uma convenção simples e fecunda ao usar “uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números supostos conhecidos ou dados” (BOYER, 1974, p. 223).

Sobre o trabalho de Viète, Boyer (1974, p. 223) observa que “não é dado a um só homem fazer toda uma dada transformação; ela deve vir em passos sucessivos”, mas podemos acrescentar a essa observação que alguns homens dão passos mais largos, bem como algumas épocas são mais profícuas no que diz respeito ao progresso da ciência, como foi o caso dos séculos XV e XVI, quando foi retomado o pensamento algébrico dos antigos e, de algum modo, sintetizado, para que ele pudesse ser projetado para a Era Moderna. O tempo da vida de Viète foi “o período em que a técnica computacional atingiu novos níveis e, por fim, começou a ultrapassar as realizações do mundo islâmico” (STRUIK, 1992, p. 151), um processo análogo àquele adotado pelos gregos, os quais primeiramente compreenderam e, posteriormente, aperfeiçoaram os conhecimentos das culturas antigas. Nesse sentido, a época de Viète estabeleceu um contraste com o mundo árabe que teve um importante papel de sintetizar e divulgar, mas não de desenvolver os conhecimentos a que tiveram acesso. Aliás, as observações de Struik (1992) também nos ajudam a pensar as intrincadas, interdependentes e, não necessariamente hierarquizadas, relações entre o pensamento e seus símbolos, quando o historiador comenta a respeito da representação do número $pi$ como um produto infinito, feita por Viète em 1593, ainda que essa representação não tenha sido registrada na notação atual. Se por um lado o "desenvolvimento da técnica foi um resultado do aperfeiçoamento da notação" (STRUIK, 1992, p. 151), por outro

> Os novos resultados revelam claramente que é incorreto dizer que homens como Viète "apenas" desenvolveram a notação. Uma tal afirmação ignoraria completamente a relação profunda entre conteúdo e forma. Novos resultados tornaram-se muitas vezes possíveis devido somente a um novo modo de escrever. A introdução dos numerais indo-árabes é um exemplo; a notação de Leibniz para o cálculo é outro. Uma notação adequada reflete melhor a realidade que uma notação pobre e, como tal, surge com uma vida própria, que, por seu turno, cria uma nova vida. O aperfeiçoamento da notação feito por Viète foi seguido, uma geração mais tarde, pelas aplicações da álgebra à geometria, feitas por Descartes, e pela nossa notação atual. (STRUIK, 1992, p. 151-152).

As relações entre conteúdo e forma, entre pensamento e expressão, estão tão imbricadas no desenvolvimento da Álgebra que, conforme temos visto ao longo do texto desta tese, as ideias algébricas desenvolveram-se paralelamente ao aperfeiçoamento de sua linguagem simbólica. Não obstante o fato de Viète ter desenvolvido algumas ideias matemáticas, é na ciência grega que está a fonte delas, notadamente no que diz respeito à Álgebra, pois é fato incontroverso, segundo Klein (1992) que foi do estudo da *Aritmética* de Diofanto que Viète desenvolveu sua Álgebra simbólica. Um exemplo desse diálogo com as fontes gregas é a introdução de sua obra, *In artem analyticen - Isagoge* (*Introdução à Arte Analítica*), mais referenciada como *Isagoge,* publicada em 1591 (VIÈTE, 1992), livro destinado também à instrução de Catarina de Parthenay (1554-1631)[98].

Nessa introdução a respeito de sua nova Álgebra, esclarece que ela é aquele "ouro incomparável [que] estava escondido"[99] (VIÈTE, 1992, p. 319, tradução nossa) e que fora, por muito tempo, buscado pelos matemáticos ao longo da Idade Média, um ouro que, embora se mostre como supostamente novo na obra que Viète

---

98 Vièta refere-se a ela na introdução pelo epíteto de Melusine. Ela foi casada com René de Rohan (1550–1586), com quem teve cinco filhos, entre eles, Henrique de Rohan (1579-1638), o primogênito, que liderou os huguenotes, protestantes franceses durante as guerras religiosas na França, as quais ocorreram na segunda metade do século XVI. Viète supervisionou a educação dela e permaneceu seu amigo e conselheiro por toda a vida.
99 incomparable gold lay Hidden.

apresenta, já fora descoberto pelos antigos, portanto, era reconhecido por ele como uma arte

> na verdade tão velha, tão estragada e contaminada pelos bárbaros, que [Viète] consider[ou] necessário, para introduzir nela uma forma inteiramente nova, pensar e publicar um novo vocabulário, tendo se livrado de todos os seus termos pseudotécnicos. (VIÈTE, 1992, p. 318, tradução nossa)[100].

Depreende-se, portanto, que Viète desenvolvera sua arte a partir de um retorno às suas origens e com a intenção de aperfeiçoar a linguagem e os métodos dessa arte. Nesse sentido, mesmo que Klein (1992) tenha se proposto, conforme já mencionamos, a realizar uma investigação que permite compreender como surgiram, no mundo-da-vida, os conceitos que fundamentaram as ciências modernas e faça isso, especialmente, no caso da Álgebra, pode-se dizer que a primazia dessa ideia não lhe pertence, uma vez que em seu texto, sustenta que Viète, a seu modo, já era consciente da importância investigativa das origens dos conceitos, pois o matemático francês desejou ser “em todos os aspectos o fiel preservador, redescobridor e continuador de nossos antigos mestres” (KLEIN, 1992, p. 152, tradução nossa)[101]. Em sua volta às origens, por meio de diligente estudo, Viète acrescentou dados de sua autoria aos conhecimentos dos gregos, assim como os helênicos tinham feito, acrescentando aos conhecimentos herdados de culturas mais antigas[102] uma nova forma de compreensão, uma visada ontológica mais pautada pelo "porquê" dos fenômenos, daquilo que se mostra, do que pelo "como", o modo de fazer.

Pode-se dizer que aquela renovação de formas e termos da Álgebra realizada por Viète foi o embrião da Álgebra simbólica, fruto do profundo estudo que fizera da Matemática grega, sobretudo da Álgebra Diofantina, e que sua arte matemática prima pelo rigor das suas descobertas. Segundo sua concepção, "nossa arte é o descobridor mais seguro de todas as coisas matemáticas (...). Aqui as coisas são feitas por regra

---

[100] in truth so old, so spoiled and defiled by the barbarians, that I considered it necessary, in order to introduce an entirely new form into it, to think out and publish a new vocabulary, having gotten rid of all its pseudo-technical.

[101] in every respect the loyal preserver, rediscoverer and continuator of our ancient teachers.

[102] Usamos o adjetivo antigo sob diferentes perspectivas. Neste caso, referimo-nos às culturas mesopotâmica, egípcia, por exemplo, de quem os gregos receberam, direta ou indiretamente, os conhecimentos matemáticos. Em outros pontos deste trabalho, o termo antigo refere-se aos próprios gregos que sucederam aquele pensador ao qual estamos nos referindo. Por exemplo, no caso de Pappus, de quem trataremos mais adiante, “[p]ertencente à tradição de comentadores (“historiadores”) que viveram na antiguidade tardia, (...) tendo vivido em uma época “mais recente”, utiliza constantemente a expressão “os antigos” – e Descartes igualmente – para se referir aos geômetras do período clássico (BATTISTI, 2019, p. 15).

e esforço, e nem as persuasões dos retóricos nem as alegações dos advogados são úteis." (VIÈTE, 1992, p. 319, tradução nossa)[103]. Essas regras e esse esforço podem ser explicitados pelos dois aspectos metodológicos que nortearam a Álgebra de Viète: a análise e a síntese. O matemático francês compreende o processo de análise como "uma certa maneira de buscar a verdade, uma maneira que Platão teria descoberto primeiro" (VIÈTE, 1992, p. 320, tradução nossa)[104].

Klein (1992, p. 259), atribui a Descartes a identificação de que certos traços dessa "verdadeira matemática" a qual se refere Viète teria aparecido em Pappus (*c.* 290 – c. 350)[105] e em Diofanto. No *Isagoge* (1992), contudo, Viète atribui a Theon de Alexandria (335-395) a seguinte definição de análise, que é tomar "a coisa buscada como certa e procede[r] por meio do que se segue a uma verdade que é incontestável" (VIÈTE, 1992, p. 320, tradução nossa)[106]. Viète identificou nos antigos um processo de análise que se divide em dois tipos, zetética e porística, aos quais ele acrescentou um terceiro tipo, que pode ser chamado de análise retórica ou exegética

> de modo que há uma arte zetética pela qual se encontra a equação ou proporção entre a grandeza que se busca e as que se dão, uma arte porística pela qual a partir da equação ou proporção, a verdade do teorema estabelecido é investigada, e uma arte exegética pela qual, a partir da equação estabelecida ou da proporção, é produzida a própria magnitude que está sendo procurada. (VIÈTE, 1992, p.320-321, tradução nossa)[107].

Ressaltamos que quando Viète diz "uma arte porística pela qual a partir da equação ou proporção, a verdade do teorema estabelecido é investigada" ele considera a equação e sua solução como um análogo a um teorema. Este entendimento é corroborado por Klein (1992, p. 166, grifos do autor, tradução nossa, grifos do autor) quando diz que "ao concentrar suas reflexões no procedimento ele

---

[103] our art is the surestfinder of all things mathematical (...) Here things are done by rule and effort, and neither the persuasions of rhetoricians nor the pleadings of lawyers are of use.

[104]In mathematics there is a certain way of seeking the truth, a way which Plato is said first to have discovered.

[105] Cf. Descartes, Regulae, Rule IV, Ad.-Tann., X, 376: "Et quidem huius verae Matheseos vestigia quaedam adhuc apparere mihi videntur in Pappo et Diophanto. . . ." (Indeed, certain traces of this *true mathematics* seem to me still to appear in *Pappus* and in *Diophantus*.) (De fato, certos traços da sua *verdadeira matemática* parecem já ter aparecido em *Pappus* e em *Diofanto*.) (KLEIN, 1992, p. 259, tradução nossa).

[106] taking the thing sought as granted and proceeding by means ofwhat follows to a truth that is uncontested.

[107] so that there is a zetetic art by which is found the equation or proportion between the magnitude that is being sought and those that are given, a poristic art by which from the equation or proportion the truth of the theorem set up is investigated, and an exegetic art by which from the equation set up or the proportion there is produced the magnitude itself which is being sought.

[Viète] não diferencia mais entre 'teoremas' e 'problemas', ou, mais exatamente, porque *ele vê todos os teoremas como problemas*"[108]. Isto quer dizer que para Viète o ato de encontrar a verdade, a solução de uma equação (problema), é efetivamente a demonstração de um teorema.

Sobre o processo analítico, Viète quando diz que toma a coisa buscada como certa, quer dizer com isso que admite como hipótese que o problema pode ser resolvido e, a partir dessa premissa, inicia o desenvolvimento de sua solução, ou seja, a análise. Uma vez encontrada a solução, invertem-se os passos do desenvolvimento da análise a fim de se verificar se essa solução de fato satisfaz às condições do problema. A este segundo momento chamou de síntese e adotou a mesma concepção de Theon, que a define como o ato de "tomar a coisa que é concedida e proceder por meio do que se segue à conclusão e compreensão da coisa procurada" (VIÈTE, 1992, p. 320, tradução nossa)[109].

Se quisermos, por exemplo, resolver a seguinte equação, escrita numa simbologia moderna,

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

adotaremos, em primeiro lugar, a premissa de que ela possui alguma solução, ou seja, que existe um valor de $x$ que satisfaz à equação, isto equivale a "tomar a coisa buscada como certa". Devemos ainda, conforme já mencionamos neste trabalho[110], considerar que a proposição que relaciona uma equação à sua solução é sempre composta pelo conectivo "se e somente se", que expressa em uma única proposição uma afirmação e a sua recíproca. Deste modo, pode-se concluir que:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x - 3).(x - 1) = 0.$$

Essa expressão pode ser lida da seguinte maneira: se $x^2 - 4x + 3 = 0$, então $(x - 3).(x - 1) = 0$. Ora, como estamos lidando com a multiplicação de dois fatores, para que o produto seja zero, necessariamente um deles deve ser zero, assim,

$$x = 3 \; ou \; x = 1$$

---

[108] in concentrating his reflections on procedure he no longer differentiates between "theorems" and "problems," or, more exactly, because *he sees all theorems as problems*.

[109] taking the thing that is granted and proceeding by means of what follows to the conclusion and comprehension of the thing sought.

[110] Embora este aspecto já tenha sido antecipado na tese em outro momento, especificamente na página 86, a partir de outra perspectiva e com uma equação sem solução real, aqui construiremos outro exemplo para mostrar os processos de Viète que ampliaram as possibilidades da linguagem algébrica e que, embora não tenham sido criados por ele, são fundamentais para a compreensão da passagem de uma Álgebra retórica para uma simbólica, esta sim mais sintética e precursora da atual.

são os candidatos à solução do problema. Esta primeira etapa, compreende, conforme já dissemos, a análise. Isto nos leva à seguinte proposição:

$$x^2 - 4x + 3 \; = \; 0 \; \rightarrow x = 3 \; ou \, x = 1,$$

que pode ser lida como: se $x^2 - 4x + 3 \; = \; 0$, então $x = 3 \; ou \, x = 1$ .

O segundo momento, a síntese, corresponde ao caminho da volta, ou seja, à recíproca, que pode ser assim simbolizada:

$$x = 3 \; ou \, x = 1 \; \rightarrow \; x^2 - 4x + 3 \; = \; 0.$$

Expressão cuja leitura é: se $x = 3 \; ou \, x = 1$ , então $x^2 - 4x + 3 \; = \; 0$. Se substituirmos $x$ por 3 ou por 1 na expressão dada, de fato teremos que o resultado dela será zero. Assim, após essa verificação, a síntese estará concluída. Em resumo, a análise é o caminho pelo qual se busca a solução de um problema e a síntese é o caminho percorrido em sentido contrário, a partir da solução ou das soluções encontradas, a fim de verificar se elas satisfazem ao problema em questão. Já a exegese, segundo Viète, é o momento em que se dá a produção daquilo que é procurado, a produção da "própria magnitude", a qual é exibida através de uma igualdade ou proporção estabelecida, que no exemplo em questão diz dos resultados encontrados: $x = 3 \; ou \, x = 1$.

Viète, ao pensar sobre a Álgebra, não estava interessado em estabelecer métodos para a resolução de problemas particulares. Em sua investigação, que volta às origens históricas do pensar helênico sobre essa área da Matemática, descobriu que o valor daquele ouro que fora guardado zelosamente pelos antigos estava em possibilitar não só a resolução de um problema específico, mas de estabelecer uma metodologia para a resolução de todos os problemas de uma dada natureza e verificá-los, ou seja, estava interessado na análise e na síntese. Assim, conforme Klein, a sobriedade do pensamento do matemático francês é

> complementada por uma consciência do imenso poder que essa descoberta dá à humanidade e que ele, antecipando os séculos vindouros, expressa na orgulhosa parole no final de seu *Isagoge*: "*Para não deixar nenhum problema não resolvido*" — "*Nullum non problema solvere*." (KLEIN, 1992, 154, tradução nossa e grifos do autor).[111]

O *Isagoge* além de ser um texto inovador no contexto da Matemática do tempo de Viète é, como vimos, também um diálogo com a cultura grega, além de apontar um

[111] is complemented by a consciousness of the immense power which this discovery gives to mankind and which he, anticipating centuries to come, expresses in the proud parole at the end ofhis Isagoge: "To leave no problem unsolved" - "Nullum non problema solvere".

caminho para o desenvolvimento futuro desta ciência. No que diz respeito à cultura grega, cuja tradição era predominantemente geométrica, as obras de Diofanto e Pappus exerceram, como já mencionado, forte influência na Matemática desenvolvida por Viète. A análise discutida em Pappus (1876), de que trataremos mais adiante, é categorizada em uma arte porística e uma arte zetética, recuperadas e expandidas por Viète, conforme discutimos, no estabelecimento da exegética.

Para compreender melhor a abordadgem de Viète, é conveniente determo-nos na investigação, ainda que breve, dessas categorias tão fundamentais naquela arte destinada a não deixar nenhum problema sem solução de que fala o matemático francês. O domínio de cada uma delas, bem como os limites de suas operações nem sempre são claros[112], contudo, sobre a arte teórica, a zetética[113], e a arte problemática, a porística[114], tomaremos como base a obra de Pappus, que teria sido uma das principais fontes de Viète. No Livro VII da obra *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt (A coleção de Pappus de Alexandria que remanesceu)* (PAPPUS DE ALEXANDRIA, 1876, p. 635-1020), o matemático explicita os processos de análise e síntese:

> A passagem chamada *ἀναλυόμενος* (análise), filho de Hermodorus, para que você possa entender um pouco mais, é uma espécie de material especial preparado para uso daqueles que, tendo sido privados dos elementos comuns, desejam equipar-se com a capacidade de resolver os problemas que se colocam na construção das linhas, e é para isso uma disciplina útil. Este tratado dos três homens que o escreveram, Euclides o escritor da obra *Elementos*, Apolônio Pergaeus e Aristeu o maior, prossegue por análise e síntese. A análise, portanto, é aquela forma e razão pela qual somos conduzidos a partir do que é buscado, tomado como concedido, passando ordenadamente através do que se segue ao que é concedido pela síntese. Pois na análise, supondo o que se busca como um fato, indagamos aquilo de onde ele resulta; e, novamente, o que o precedeu, até que, no caminho da volta, deparemo-nos com algo que já é conhecido ou é considerado entre os primórdios, e caímos no relato de tal coisa. Uma vez que esse processo acontece como se fosse uma solução reversa, chamamos de *ἀνάλυσιν* (análise). Na síntese, por outro lado, tomamos de antemão o que fizemos por último na análise, e os seus precedentes de acordo com a sua natureza, colocando como consequentes aqueles que antes eram

[112] Irineu Bicudo (2009, p. 53), em sua introdução aos *Elementos* de Euclides (EUCLIDES, 2009), citando a obra de Michel Chasles (1793-1880) *Les trois livres des porismes d'Euclide réstablis* [Os três livros de Euclides restaurados] afirma que é uma dificuldade saber, mesmo entre os modernos, com precisão, o que o gênero de proposições chamada porismata significam.

[113] No capítulo V do *Isagoge*, Viète (1992, p. 339-345) discorre "Sobre as leis da zetética" estabelecendo cinco princípios teóricos básicos.

[114] No capítulo VI do *Isagoge*, Viète (1992, p. 345-346) discorre "Sobre a investigação de teoremas por meio da arte porística", ou seja, sobre a resolução dos problemas.

> antecedes e juntando uns ao outros, finalmente concluímos a construção procurada, e que chamamos *σύνθεσιν* (síntese).[115] (PAPPUS, 1876, p. 635, tradução nossa).

Quando Pappus se refere à análise como uma espécie de material especial para resolver “os problemas que se colocam na construção das linhas”, o domínio do conhecimento a que se referia era o geométrico. Viète, por sua vez, amplia esse campo buscando na análise outras possibilidades matemáticas o que o permitiu que ele concebesse sua *Logística especiosa*, de que trataremos mais adiante, como uma ampliação da Logística numerosa no caminho de desenvolvimento da Álgebra simbólica: “Viète visa recuper[ar] [o método de Pappus], melhorá-lo e estendê-lo para outras áreas da matemática, razão pela qual escreve uma *Introdução à Arte Analítica* [*Isagoge*]*” (*BATTISTI, 2019, p. 15). O matemático francês teria identificado, portanto, na metodologia grega, na análise e na síntese, um modo de conhecer, um procedimento para resolver problemas em geral, um princípio para validar ou refutar as soluções construídas, portanto um tesouro matemático. Já quando explicita o verso e o reverso do processo, a análise e a síntese, Pappus destaca duas funções da análise, uma na arte zetética e outra na arte porística:

> Ora, existem dois tipos de análise, uma das quais, uma vez que está envolvido na investigação da verdade, é chamada *θεωρητιχόν* (teórica) ou especulativa, a outra serve ao propósito de encontrar o que se buscava e é chamada *προβληματιχόν* (problemática). Na classe teórica ou especulativa, portanto, primeiro estabelecemos o que está sendo buscado como existente, e então pelo que se segue, passamos pelas consequências como se fossem verdadeiras e existentes por hipótese, procedemos assim até algo concedido, que de fato, se for verdadeiro, o que estamos buscando também será verdadeiro, e a demonstração será o inverso da análise; por outro lado, se caímos em algo que é evidentemente falso, o que buscamos também será falso. Ora, na classe problemática, quando submetemos o que foi proposto como se fosse conhecido, passamos agora a algo

[115] *Locus qui ἀναλυόμενος dicitur, Hermodore fili, ut paucius intellige, est propria quaedam materia in eorum usum parata qui, absolutis communibus elementis, in linearum consiructione facultatem problematum quae proponuntur solvendorum) sibi comparare volunt, estque ad hoc solum atque utilis disciplina. Quae quidem tractata a tribus viris Euclidis Elementorum Scriptores, Apollonio Pergaeo, Aristaeo maiore, procedit per resolutionem et compositionem. Resolutio igitur est ea via ac ratio, qua a quaesito tamquam concesso per ea quae deinceps consequuntur perducimur ad id quod compositione conceditur). Nam in resolutione, id quod quaeritur tamquam factum supponentes, illud unde hoc contingit et rursus, quid illi antecesserit, consideramus, donec ita regredientes in aliquid, quod iam cognitum sit vel in numero principiorum habeatur, incidimus, atque eiusmodi rationem, quoniam veluti retro fit solutio, ἀνάλυσιν vocamus. In compositione autem vicissim illud, quod in resolutione ultimum effecimus, utpote iam factum praemittentes, eaque quae illie praecedunt secundum rei naturam sequentia collocantes et alterum alteri copulantes postremo constructionem quaesiti absolvimus, idque σύνθεσιν appellamus.*

> concedido por meio dos que se seguem, como se fossem verdadeiros, até algo admitido. Se a coisa admitida pode ser feita (o que os matemáticos chamam dado), a proposição também pode ser feita. Novamente, a demonstração corresponderá ao [processo] inverso da análise; por outro lado, se caímos em algo que é evidentemente falso, o problema será impossível.[116] (PAPPUS, 1876, p. 635, tradução nossa).

Considerando-se, como aliás sugere a estrutura dos capítulos do *Isagoge*, a parte teórica como fundamento da porística (capítulo V, a zetética; capítulo VI, a porética, conf. notas 111 e 112), temos que, ao revisitar os conceitos de Pappus, Viète estava interessado no modo helênico de conhecer, caracterizado pela compreensão do por quê das coisas. Esse modo legitima a importância de um processo investigativo que prioriza o entendimento, quer de uma forma geométrica, quer de um número ou, simplesmente, daquilo que pode vir a ser qualquer objeto matemático desvelado pelo modo de proceder algébrico. Esse processo investigativo, por sua vez, embasava-se teoricamente e com o rigor porístico, o que permitia a validação do resultado alcançado.

Já que nesta seção estamos investigando as várias faces do desenvolvimento dos símbolos algébricos, investigação que nos tem conduzido à questão dos números como *Anzahl* e *Zahl*, conceitos que se articulam à Logística especiosa de Viète, cabe destacar o quinto princípio teórico da zetética do matemático francês, que se propõe a estabelecer um “símbolo constante, eterno e muito claro”:

> Para que este trabalho possa ser auxiliado por alguma arte, que as grandezas dadas sejam distinguidas das indeterminadas por um símbolo constante, eterno e muito claro, como, por exemplo, designando a magnitude desconhecida por meio da letra A ou alguma outra vogal E, I, O, U ou Y, e as grandezas dadas por meio das letras B, G e D ou outras consoantes. (VIÈTE, 1992, p. 340, tradução nossa)[117].

---

[116] *Duo autem sunt resolutionis genera, quorum alterum, quoniam in vero inquirendo versatur, θεωρητικόν sive speculativum dicitur, alterum inveniendo proposito inservit ae προβληματικόν vocatur. In speculativo igitur genere primum id quod quaeritur re vera ita se habere statuimus, tum per ea quae deinceps consequuntur, tanquam vera sint et per hypothesim firmata, ad aliquid concessum progredimur, quod quidem si verum sit, verum etiam erit id quod quaerimus, et demonstratio vice versa resolutioni respondebit; contra si in aliquid quod falsum esse constat inciderimus, falsum etiam erit id quod quaerimus. In problematico autem genere, cum id quod propositum est tamquam cognitum subiecimus, iam per ea quae deinceps consequuntur, tamquam vera sint, ad aliquid concessum progredimur; quod concessum si fieri et suppeditari possit (quod mathematici datum appellant), fieri etiam propositum poterit et rursus demonstratio vice versa resolutioni respondebit; contra si in aliquid quod falsum esse constat inciderimus, itidem problema fieri non poterit.*

[117] In order that this work may be assisted by some art, let the given magnitudes be distinguished from the undetermined unknowns by a constant, everlasting and

Essa arte resgatada dos gregos por Viète, cujo propósito antecipado por ele é o de não deixar nenhum problema sem resolução, decorre de sua logística especiosa, conceito que representou um salto teórico qualitativo em relação à Logística numerosa dos antigos e que, por isso, ampliou a concepção de número para um conceito simbólico que irá servir para representar grandezas a serem comparadas entre si, não importa se geométricas ou numéricas: "A contagem numeral (*logistice numerosa*) opera com números; a contagem por espécies (*logistice speciosa*) opera com espécies ou formas de coisas, como, por exemplo, com as letras do alfabeto" (VIÈTE, 1992, p. 328, tradução nossa, grifos nosso)[118]. Para Viète, espécies são símbolos ou caracteres que se referem a números ou quaisquer outras quantidades:

> o conceito de *eidos*, o conceito de "espécie", *sofre uma extensão universalizante enquanto preserva seu vínculo com o reino dos números*. *À luz desse procedimento geral, as espécies*, ou como também diz Viète, as "formas das coisas" (...) representam simplesmente grandezas "gerais". (KELIN, 1992, p. 166, tradução nossa, grifos do autor)[119].

A Logística especiosa foi posta a "serviço da álgebra *'pura'*, entendida como a mais abrangente arte 'analítica' possível, indiferentemente aplicável aos números e às grandezas geométricas" (KLEIN, 1992, p. 165, tradução nossa, grifo do autor)[120]. A compreensão das artes analítica e sintética, conforme nossa leitura, possibilitou a Viète uma ampliação de seus usos metodológicos para além das fronteiras da Geometria. Em outras palavras, o matemático francês compreendeu que essas artes continham em si o embrião de um método geral que embasou, inclusive, sua Logística das espécies que se desenvolveu paralelamente ao movimento de generalização do *Anzahl* para o *Zahl.* Neste sentido, Klein ressalta que "*[à] luz desse procedimento geral, as espécies*, (...) as 'formas das coisas' (*formae rerum* (...)) *representam simplesmente grandezas 'gerais*'" (KLEIN, 1992, p. 166, tradução nossa, grifos do

very clear symbol, as, for intance, by designating the unknown magnitude by means of the letter A or some other vowel E, J, O, U, or Y, and the given magnitudes by means of the letters B, G, and D or the other consonants.

118 The numeral reckoning (logistice numerosa) operates with numbers; the reckoning by species (logistice speciosa) operates with species or forms of things, as, for example, with the letters of the alphabet.

119 the eidos concept, the concept of the "species," *undergoes a universalizing extension while preserving its tie to the realm of numbers. In the light of this general procedure, the species*, or as Vieta also says, the "forms of things" (formae rerum: — Chapter IV, beginning),231 represent "general" magnitudes simply.

120 to the service of "*pure*" algebra, understood as the most comprehensive possible "analytic" art, indifferently applicable to numbers and to geometric magnitudes.

autor)[121]. Assim, considera essenciais para a estrutura do conceito de espécie para Viète:

> (1) a generalização que o conceito de *eidos* sofre nas mãos de Vieta, uma generalização pela qual as espécies se tornam objetos de uma disciplina matemática "geral" que não pode ser identificado nem com a geometria nem com a aritmética, e (2) a conexão direta com a "logistice numerosa", isto é, com o "cálculo", que é, no entanto, mantido por Viète; em seu sentido original, a *logistice numerosa* pressupunha um campo homogêneo de mônadas (...) e era consequentemente dependente de "*arithmoi*" e suas relações. (KLEIN, 1992, p. 172, tradução nossa, grifos do autor)[122].

Esses dois aspectos revelam que a Logística especiosa, posta a serviço da Álgebra pura, ao mesmo tempo que preserva certas características do conceito grego de *arithmos*, mantendo-o como um "'*número de*...' [o faz] *de maneira peculiarmente transformada*" (KLEIN, 1992, p. 174, tradução nossa, grifos do autor)[123], isso porque, enquanto cada "*arithmo* se refere imediatamente às coisas ou às unidades em si cujo número ele representa" (KLEIN, 1992, p. 174, tradução nossa)[124], o sinal de letras introduzido por Viète, conforme já mencionamos, refere-se "*diretamente ao caráter geral de ser um número* que pertence a todos os números possíveis, ou seja, ele se refere imediatamente ao 'número em geral'" (KLEIN, 1992, p. 174, tradução nossa, grifos do autor)[125], forma de referência que ocorrerá igualmente na Álgebra cartesiana. O símbolo, a letra, enquanto se refere diretamente, imediatamente, ao número geral, refere-se apenas de forma mediada "às coisas ou unidades presentes em cada número" (KLEIN, 1992, p. 174, tradução nossa)[126]. Essa característica de número geral, permite que ele "seja o sujeito de operações 'calculáveis'" (KLEIN, 1992, p. 174, tradução nossa)[127], um salto teórico importante que permitiu que o cálculo com as letras, tratadas como um número, pudessem herdar as leis da Aritmética.

---

[121] *In the light of this general procedure, the species*, or as Vieta also says, the "forms of things" (formae rerum: — Chapter IV, beginning), *represent "general" magnitudes simply*.
[122] (1) the generalization which the eidos concept undergoes at Vieta's hands, a generalization through which the species become the objects of a "general" mathematical discipline which can be identified neither with geometry nor with arithmetic, and (2) the direct connection with the "logistice numerosa," i.e., with "calculation," which is nevertheless retained by Vieta; in its original sense the *logistice numerosa* presupposed a homogeneous field of monads (...) and was consequently dependent on "arithmoi" and their relations.
[123] "number of..." in a peculiarly transformed manner.
[124] every arithmos intends immediately the things or the units themselves whose number it happens to be.
[125] directly the general character of being a number which belongs to every possible number, that is to say, it intends "number in general" immediately.
[126] the things or units which are at hand in each number.
[127] permits it to be the subject of "calculational" operations.

Ora, Viète tinha em mente uma arte para resolução de problemas gerais, a qual não prescindiu da Logística numerosa, do uso do *arithmos* como um número de algo, nem das leis que regem as relações entre esses *arithmos*, mas utilizou-os, conforme vimos, de modo transformado. Isso quer dizer que os objetos matemáticos desvelados pela Logística especiosa de Viète estão ancorados no aspecto do *arithmos* como *Anzhal* e se ampliam para o aspecto geral do número como Z*ahl*. Neste sentido, "[a]ssim que o 'número geral' é concebido e representado no meio das espécies como um 'objeto' em si mesmo, ou seja, simbolicamente, nasce o conceito moderno de 'número' (KLEIN, 1992, p. 175, tradução nossa)[128]. Esse conceito moderno é em si "assim como aquilo que ele pretende, *de natureza simbólica* [e, portanto,] *é idêntico ao conceito de espécies de Viète*" (KLEIN, 1992, p. 176, tradução nossa, grifos do autor)[129].

Para Klein, a interpretação aritmética das magnitudes gerais possibilitou o desenvolvimento de uma forma especial de cognição, ou seja, a concepção de uma matemática simbólica: "a interpretação 'aritmética' das 'grandezas gerais' leva a um modo especial - um modo 'algébrico' - de cognição, ou mais precisamente, à concepção de uma matemática *simbólica*" (KLEIN, 1992, p. 184, tradução nossa, grifos do autor)[130]. O modo algébrico de cognição representou uma abordagem científica que buscava "compreen[der] a totalidade do mundo [e que] lentamente se [ampliou] no sistema da física matemática moderna" (KLEIN, 1992, p. 184, tradução nossa)[131]. Embora a completude interna dessa Matemática simbólica não houvesse sido concretizada nos tempos de Viète, uma vez que "o sucesso na fixação do quadro de referência e no estabelecimento da completude interna que ainda falta mesmo na 'Mathesis universalis' de Descartes ainda est[ivesse] por vir" (KLEIN, 1992, p. 184, tradução nossa)[132], e ainda que o desenvolvimento desse sistema viesse a ocorrer posteriormente, o matemático francês já era consciente do poderio da Álgebra, de que ela seria um precursor crucial para o desenvolvimento dos fundamentos matemáticos das teorias físicas futuras.

---

[128] As soon as "general number" is conceived and represented in the medium of species as an "object" in itself, that is, symbolically, the modern concept of "number" is born.
[129] as is that which it intends, symbolic in nature — it is identical with Vieta s concept of species.
[130] the "arithmetical" interpretation of "general magnitudes" leads to a special — an "algebraic" — mode of cognition or, more exactly, to the conception of a symbolic mathematics.
[131] This science, which aims from the first at a comprehension of the totality of the world, slowly broadens into the system of modern mathematical physics
[132] success in fixing the frame of reference and in establishing the internal completeness which is still lacking even in Descartes' "Mathesis universalis" is yet to come.

A abordagem simbólica abriu caminho para novas formas de compreender o mundo:

> Dentro dessa disciplina, as coisas neste mundo já não são compreendidas como entidades contáveis, nem o próprio mundo como uma ordem determinada pelos números; é antes a estrutura do mundo que é apreendida por meio de um cálculo simbólico e compreendida *como um curso "legalmente" ordenado de "eventos"*. A própria natureza da compreensão do homem em relação ao mundo é governada daqui em diante pelo conceito simbólico de "número", um conceito que determina a ideia moderna de ciência em geral. (KLEIN, 1992, p. 184 – 185, tradução nossa, grifos do autor)[133].

A Álgebra, portanto, com sua linguagem própria, lida não só com quantidades abstraídas de coleções concretas, com aqueles *arithmoi* à maneira do pensamento grego, mas também com números gerais, simbólicos, que se apresentam como um mero objeto de cálculo, uma entidade indeterminada. As operações algébricas e seus símbolos prestam-se a desvelar os novos objetos do conhecimento que se mostraram e se mostrarão ao longo do desenvolvimento dessas ciências, por isso, determinam a ideia moderna de ciência em geral, como uma ampliação da Logística das espécies iniciada em Viète. Esse trabalho ampliou-se em Descartes com um conceito análogo ao da Logística especiosa, agora compreendida como *mathesis universalis*, conforme discutiremos na subseção seguinte.

### 5.7 Descartes e a volta aos gregos: contribuições para o desenvolvimento da Álgebra simbólica - a Mathesis Universalis

Tanto Viète quanto Descartes (1596 – 1650) pensaram a Álgebra como uma Ciência Universal: “a ‘*mathesis universalis*’ de Descartes corresponde completamente à ‘zetética’ de Viète, por meio da qual é realizada, com a ajuda da ‘logística especiosa’, a ‘nova’ e ‘pura’ álgebra, interpretada como uma ‘arte analítica’ geral”. (KLEIN, 1992, p. 207, tradução nossa)[134]. Viète e Descartes tiveram, portanto, participação

---

[133] Within this discipline the things in this world are no longer under¬ stood as countable beings, nor the world itself as a taxis determined by the order ofnumbers; it is rather the structure of the world which is grasped by means of a symbolic calculus and understood as a “ lawfully” ordered course of “events” . The very nature of man’s understanding of the world is henceforth governed by the symbolic “number” concept, a concept which determines the modern idea of science in general.

[134] Descartes’ “mathesis universalis” corresponds completely to Vieta’s “zetetic,” by means of which is realized, with the aid of “logistice speciosa,” the “new” and “pure” algebra, interpreted as a general “analytic art”.

fundamental no desenvolvimento da nova e pura Álgebra: o primeiro contribuiu com a Logística especiosa e o segundo com a ideia da *mathesis universalis* que, por sua vez, subjaz a uma Filosofia primeira e se propõe a "uma completa reforma da filosofia em direção a uma ciência baseada em uma fundamentação absoluta" (HUSSERL, 2019, p. 32). Depreende-se dessas considerações que, removidos os sedimentos acumulados historicamente que tinham relegado a Álgebra, muitas vezes, a uma disciplina meramente técnica, ela reaparece nos dois pensadores como um procedimento analítico destinado a desvelar a totalidade do mundo, a não deixar nenhum problema sem solução, como preconizou Viète, só que agora expandindo-se para o terreno dos problemas que não necessariamente envolvessem grandezas matemáticas, não obstante os tratasse com a justeza de uma linguagem nascida no universo das grandezas geométricas e aritméticas: trata-se, em Descartes, de uma Ciência Universal.

A necessidade de reformar a Filosofia se dá, segundo Husserl (2019), pela compreensão de Descartes de que todas as ciências dependem da Ciência Universal, isto é, da Filosofia. Por conta dessa compreensão, o matemático e filósofo francês entendia ser necessária uma "reconstrução radical que [satisfizesse] à ideia da filosofia enquanto unidade universal das ciências na unidade de tal fundamentação absolutamente racional" (HUSSERL, 2019, p. 32). Esse projeto de fundamentação para todas as ciências repercutiu "em Descartes em uma filosofia direcionada para o sujeito" (HUSSERL, 2019, p. 32), que foi expressa também em suas *Regras para a direcção do espírito* (1989). Nelas, a Álgebra e seu simbolismo estão presentes entres aqueles elementos que compõem a verdadeira Ciência.

O pensamento cartesiano parte do princípio de que "entre as disciplinas conhecidas (...), só a Aritmética e a Geometria estavam isentas de todo o defeito de falsidade ou de incerteza" (DESCARTES, 1989, p. 16). O argumento que sustenta esse princípio é que essas disciplinas "são efetivamente as únicas que lidam com um objeto tão puro e simples que não têm de fazer suposição alguma que a experiência torne incerta, e consistem inteiramente em consequências a deduzir racionalmente" (DESCARTES, 1989, p. 17). Assim, a Regra IV do método cartesiano é descrito como aquele de "regras certas e fáceis, que permitem a quem exatamente as observar nunca tomar por verdadeiro algo de falso" (DESCARTES, 1989, p. 24) e que, para tanto, conforme a Regra VI, deve "distinguir as coisas simples das mais complexas e prosseguir ordenadamente" (DESCARTES, 1989, p. 33). Desta forma, é possível não desperdiçar “nenhum esforço da mente, [bem como ao ir] aumentando sempre gradualmente o saber, atingir o conhecimento” (DESCARTES, 1989, p. 24).

O caminho reto em direção à verdade, no “pensamento de Descartes, como ele mesmo aponta nas *Regulae, pressupõe* o fato do cálculo simbólico, ou seja, na forma da ‘álgebra’ contemporânea” (KLEIN, 1992, p. 197, tradução nossa, grifos do autor)[135]. Viète já concebia esse cálculo simbólico, conforme vimos, como uma forma de proceder que não deixaria nenhum problema sem solução e que aparece em Descartes, na Regra III, como um modo matemático de conhecer: “nunca nos tornaremos matemáticos (...) se com o espírito não formos capazes de resolver todo e qualquer problema” (DESCARTES, 1989, p. 19) de natureza matemática. Descartes estava preocupado em “identificar, por meio de considerações ‘metodológicas’, o ‘objeto geral’ dessa *mathesis universalis* - que só pode ser representada e concebida simbolicamente” (KLEIN, 1992, p. 197, tradução nossa)[136]. Esse objeto geral está relacionado com os conceitos mais básicos da Matemática, com a *ordem* e com a *medida*, uma vez que para o matemático francês

> deve haver uma ciência geral que explique tudo o que se pode investigar acerca da ordem e da medida, sem as aplicar a uma matéria especial: esta ciência designa-se, não pelo vocábulo suposto, mas pelo vocábulo já antigo e aceite pelo uso de Matemática universal, porque esta contém tudo o que contribui para que as outras ciências se chamem partes da Matemática. (DESCARTES, 1989, p. 29).

Os primeiros vestígios dessa Matemática Universal, assim como Viète, Descartes também identifica na Matemática grega, “em Pappus e Diofanto” (DESCARTES, p. 28), matemáticos que em seus textos fazem referência à análise e ao seu uso: “os antigos Geômetras utilizaram uma espécie de análise que estendiam à solução de todos os problemas” (DESCARTES, p. 25). Por ser a análise aquele método que a partir de uma proposição deduz a solução de um problema, compreendemos que é nessa fonte grega que o matemático francês encontrou os fundamentos de sua Regra XI, que mapeia o caminho reto em direção à verdade:

> Depois da intuição de algumas proposições simples, se delas tirarmos outra conclusão, convém percorrer as mesmas com o pensamento num movimento contínuo e em nenhum lado interrompido, refletir nas suas relações mútuas, e conceber distintamente várias coisas ao mesmo tempo, tanto quanto se puder; efetivamente, é assim que o

[135] Descartes’ thinking, as he himself points out in the Regulae, presupposes the fact of symbolic calculation, namely in the form ofcontemporary “algebra.”
[136] identifying, by means of “methodological” considerations, the “general” object of this mathesis universalis — which can be represented and conceived only symbolically.

> nosso conhecimento se torna muito mais certo e se aumenta a capacidade do espírito. (DESCARTES, 1989, p. 61).

Em Viète, quando “a equação ou proporção está escondida sob o invólucro do que é dado no problema” (VIÈTE, 1992, p. 339, tradução nossa)[137], e por isso não emerge diretamente das condições dadas, exige do matemático um processo de reflexão sobre os dados para, a partir deles, formular uma equação cuja solução encetará o processo de análise. Em Descartes, por outro lado, esse processo é iniciado a partir da intuição e “sempre que não [for] possível reduzir um conhecimento à intuição” (DESCARTES, 1989, p.41), inicia-se um processo de dedução. Portanto, para o filósofo francês existem dois “atos (...) que nos permitem chegar ao entendimento das coisas (...), a intuição e a dedução” (DESCARTES, 1989, p. 20). A intuição seria um “conceito da mente pura e atenta tão fácil e distinto que nenhuma dúvida nos fica acerca do que compreendemos” (DESCARTES, 1989, p. 20). Como exemplo de conhecimento oriundo da intuição, Descartes diz que ninguém pode duvidar de que “um triângulo é delimitado apenas por três linhas” (DESCARTES, 1989, p. 20), este conhecimento é fruto de um ver claro e sobre ele não há dúvidas. Já o entendimento oriundo da dedução é aquele que “se conclui necessariamente de outras coisas conhecidas com certeza” (DESCARTES, 1989, p. 20).

Assim, a intuição e a dedução seriam, de certa forma, na Filosofia cartesiana, atos complementares, em que a partir dos princípios verdadeiros, outras verdades podem ser deduzidas “por um movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, que intui nitidamente cada coisa em particular” (DESCARTES, 1970, p. 20). Essa dedução já não é mais aquele conhecimento apreendido “num só e mesmo olhar” (DESCARTES, 1970, p. 21), antes se constrói pela conexão entre “o último elo de uma cadeia [que] está ligado ao primeiro” (DESCARTES, 1970, p. 21), conexão lógica que é estabelecida pelo “conjunto dos elos intermédios, de que depende a ligação” (DESCARTES, 1970, p. 21), por meio do exame sucessivo e da consideração que “do primeiro ao último, cada um deles está ligado aos seus vizinhos imediatos” (DESCARTES, 1970, p. 21). Trata-se, portanto, segundo nossa compreensão, de uma concepção ampliada da análise de Viète.

Descartes trata, em sua Regra IV, justamente da análise, aquela que deve existir nas verdadeiras Matemáticas e que “permite fazer para os números o que os

[137] the equation or proportion is hidden under the wrappings of what is given in the problem.

Antigos faziam para as figuras” (DESCARTES, 1989, p. 25). Essa arte, ainda segundo Descartes, teria sido ressuscitada em seu século “com o bárbaro nome de Álgebra” (DESCARTES, 1989, p. 28) e seria uma disciplina que deve

> efetivamente conter os primeiros rudimentos da razão humana e estender-se para fazer brotar verdades a respeito de qualquer assunto; e, para falar livremente, é preferível a todo o outro conhecimento transmitido humanamente, visto que é a fonte de todos os outros: é esta a minha persuasão. (DESCARTES, 1989, p. 26).

A referência à Álgebra como uma arte que pode fazer brotar verdades a respeito de qualquer assunto não deve ser entendida no sentido de que as técnicas com as quais se trabalham nos limites dessa arte é que poderiam fazer brotar essas verdades. Trata-se, antes disso, de uma referência metonímica que diz respeito ao modo de proceder dessa Ciência, ao qual nos referimos quando tratamos dos conceitos de intuição, dedução e análise. Na Regra XIV, encontramos uma síntese de como, comparando-se elementos dados e procurados que comungam da mesma natureza, é obtida, por meio de relações ou proporções que regem esses elementos, a igualdade, uma propriedade daquele que é conhecido que se estende ao que é buscado, desvelando-o:

> É preciso notar que as comparações se dizem simples e manifestas, mas só quando o que se procura e o que é dado participam igualmente de uma certa natureza. Quanto às outras todas, necessitam de preparação, e apenas por este motivo: a natureza comum não se encontra nos dois objetos tal qual, mas segundo determinadas relações ou proporções em que está envolvida. E, na sua maior parte, a indústria humana não consiste noutra coisa senão em transformar estas proporções de maneira a ver claramente a igualdade que existe entre o que se procura e o que já se conhece. (DESCARTES, 1989, p. 92).

Portanto, o modo de relacionar o que se procura com o já conhecido por meio de uma igualdade, um modo de proceder algébrico, é, segundo a visão de Descartes, o caminho preferível para fazer brotar as verdades. Tais verdades seriam, por assim dizer, aquelas deduzidas a partir daquilo que é conhecido até se chegar ao desconhecido. Neste percurso, Descartes, em sua Regra IX, orienta-nos a “dirigir[mos] toda a acuidade do espírito para as coisas menos importantes e mais fáceis e nelas nos determos tempo suficiente até nos habituarmos a ver a verdade por intuição de uma maneira distinta e clara” (DESCARTES, 1989, p. 53). Após esse exame de cada coisa em particular, a orientação expressa na regra XI é a de “tudo percorrer por um movimento muito rápido do pensamento e ver simultaneamente por intuição o maior número possível de objetos" (DESCARTES, 1989, p. 107). Para dar conta desses atos, o filósofo francês recorre a um sistema simbólico, já que:

> Por este meio, não só faremos economia de muitas palavras, mas o que é o principal, apresentaremos os termos da dificuldade sob uma forma tão pura e tão simples que, sem nada se omitir de útil, jamais se encontre neles algo de supérfluo e que ocupe inutilmente a capacidade do espírito, enquanto a nossa mente tiver de abarcar vários objetos ao mesmo tempo. (DESCARTES,1989, p.107).

O sistema simbólico permitiu a Descartes expressar ideias complexas de forma pura e simples. Em tal sistema, sugeriu que as letras *a, b, c* etc., deveriam exprimir as grandezas já conhecidas e as letras *A, B, C* etc., as incógnitas. A possibilidade de um sistema simbólico é atribuída, em Descartes, à imaginação, uma vez que é o movimento contínuo desta que se transporta de um objeto intuído a outro buscando as relações entre eles rapidamente "sem deixar quase nenhum papel à memória (...) [e possibilitando que se veja] simultaneamente o todo por intuição" (DESCARTES, 1989, p.40). Segundo nosso entendimento, as notações simbólicas breves, precisas e inequívocas, a serviço da análise, é que permitem que esse processo chegue à verdade, por assim dizer, matemática. Neste sentido, Klein sustenta que "[e]m relação ao intelecto, a imaginação é definida por sua função de "serviço", que garante a possibilidade do conhecimento simbólico em geral e, em particular, da *mathesis universalis* como uma teoria geral das proporções e das equações" (KLEIN, 1992, p. 208, tradução nossa)[138].

Os estudos apresentados nesta seção foram pertinentes para compreender a interação entre o pensamento algébrico e sua expressão simbólica. Desse modo, foi possível divisar outra face da Álgebra, aquela que a habilita, por meio de sua linguagem, de suas regras e dos objetos por ela desvelados, conforme vimos tanto em Viète como em Descartes a ser uma área da Matemática sem a qual as novas descobertas da Física não poderiam ser expressas de modo tão eficiente quanto são. Além disso, esses dois matemáticos, o primeiro com a sua Logística especiosa e o segundo com a sua *Mathesis Universalis* compreenderam na Álgebra a potencialidade de ser aquela área da Matemática destinada a "não deixar nenhum problema sem solução". Essas reflexões são parte do caminho investigativo em uma tese que se propõe a compreender os modos de ser da Álgebra.

---

[138] In respect to the intellect, the imagination is defined by its "service" function, which insures the possibility of symbolic knowledge in general and, in particular, of the mathesis universalis as a general theory of proportions and equations.

No que diz respeito à simbolização da Álgebra, movimento consolidado em Viète e Descartes, que dialogaram com os filósofos gregos antigos e com Diofanto, intermediados, em certo sentido, por Pappus, teve especial importância a evolução conceitual do número, do *Anzahl* para o *Zahl.* O termo *Anzahl,* conforme vimos, diz respeito a número como a expressão de uma “quantidade" ou "número como quantidade". Na Grécia Antiga, o conceito de *Anzahl,* tradução do termo grego *arithmos,* era representado por números naturais que indicavam a quantidade de objetos ou elementos em um conjunto específico. Esses números eram usados principalmente para fins práticos, como contar coisas no mundo físico, contar quantidades discretas. Numa evolução de seu pensamento matemático, os gregos começaram a se interessar pelas propriedades dos números em si, independentemente de qualquer aplicação concreta, momento em que as mônadas surgiram para representar uma ideia mais abstrata de número, indo além da simples contagem de quantidades físicas, para abarcar suas propriedades teóricas, marcando o início do pensamento algébrico na Grécia Antiga.

*Zahl*, conforme vimos, é, definitivamente, o "número como símbolo" ou "número como quantidade abstrata". Enquanto as mônadas, mesmo desvinculadas de objetos físicos, ainda estavam associadas a uma quantidade neutra, o *Zahl*, por sua vez, surgiu como um conceito puramente simbólico, mais próximo do conceito de espécie, de Viète, e que neste matemático e em Descartes passou a ser definitivamente expresso por letras, um movimento que já fora iniciado em Diofanto. Este diálogo entre os matemáticos pavimentou o caminho para a simbolização da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento matemático mais abstrato e geral. Compreendemos, assim, o que Klein denomina “dessedimentação” da Álgebra como decorrente desse movimento de reelaboração do conceito de número e consequente processo de simbolização da linguagem algébrica.

Na próxima seção, estudaremos o entrelaçamento entre a Lógica e a Matemática formal, a presença dessas áreas do conhecimento na Filosofia fenomenológica, e como se constituem nas fundamentações que possibilitam que a Álgebra expresse as idealidades matemáticas.

# 6. A ÁLGEBRA NA PERSPECTIVA HUSSERLIANA: A TEORIA DAS MULTIPLICIDADES

Apresentadas e discutidas, na seção 4, as considerações de Freudenthal (1973) sobre a Álgebra e seu ensino, sua linguagem, sobre o como e o porquê das relações que ela estabelece entre seus objetos, bem como sua onipresença na fundamentação da Aritmética e, após o estudo apresentado na seção 5, que trata da simbolização da Álgebra, nesta seção traremos nossa compreensão a respeito das propostas apresentadas por Husserl sobre a teoria das multiplicidades, por compreender que essa teoria expande as ideias explicitadas por Freudenthal e, além disso, pelo entendimento de que a teoria de Husserl sustenta-se, em grande medida, na própria simbolização algébrica. Na teoria das multiplicidades, descrita nesta seção, a Álgebra é concebida como uma área da Matemática a qual dá conta de mencionar generalidades, ao definir axiomaticamente seus objetos, que abarcam as idealidades e, portanto, aqueles objetos do pensar que são livres de qualquer posição de fato.

Visando dar conta de expor, de modo tão claro quanto for possível para nós, uma das faces da Álgebra, apresentaremos, na primeira subseção desta seção, “A Constituição lógica das objetividades em geral”, a apofântica e a ontologia, temas presentes na constituição das objetividades lógicas. Na segunda subseção, “Aproximação entre Álgebra e teoria das multiplicidades”, evidenciaremos o entrelaçamento entre a Teoria das Multiplicidades husserliana e a Álgebra para, então, mostrar que essa teoria revela um dos modos de ser da Álgebra, qual seja, aquele que desvela, justamente, as objetividades em geral. Na terceira subseção, das “Fases do desenvolvimento da linguagem algébrica e suas relações com o desenvolvimento da própria Álgebra”, evidenciaremos a ampliação teórica da Álgebra quando incluiu entre os seus objetos as estruturas algébricas, isto é, quando generalizou a noção de operações sobre conjuntos, que são regidas por uma determinada axiomática. Na quarta e última subseção, "Teoria dos *Grupos*: um caso de multiplicidade algébrica”, traremos um estudo da Teoria dos *Grupos*, buscando compreendê-los como uma multiplicidade no sentido husserliano.

## 6.1 A Constituição lógica das objetividades em geral

A filosofia de Edmund Husserl compreende, entre suas questões, aquela que entrelaça, além do próprio pensamento filosófico, o lógico e o matemático. Por entendermos que o conceito de multiplicidade permeia esses três domínios do conhecimento e que, além disso, apresenta estreita conexão com algumas teorias algébricas contemporâneas ao filósofo, conforme argumentaremos, ele será desenvolvido nesta seção a partir da leitura de algumas obras de Husserl, com destaque para os *Investigações lógicas*: *prolegômenos à Lógica Pura* (1900), referenciada neste texto como *Prolegômenos* (2014), e para a obra *Lógica Formal e Lógica Transcendental* (1929), referenciada como *LFLT* (1962). A escolha dessas duas obras, preferencialmente tratadas nesta seção, justifica-se uma vez que o intervalo temporal entre elas marca o amadurecimento do pensar fenomenológico husserliano. Na primeira delas, após ter investigado as fundamentações da Matemática, compreendeu que a Lógica de seu tempo, que deveria ser a encarregada de esclarecer as ciências dedutivas, precisava ela própria ser clarificada. A partir desta constatação, já nos *Prolegômenos* (2014), ampliou seus estudos sobre a Lógica que o levou à formulação da Lógica Transcendental na obra *LFLT* (1962).

No Prefácio escrito em 1900 para os *Prolegômenos* (2014), Husserl tece considerações sobre as ciências e sobre o papel que a Lógica deveria exercer na fundamentação delas, mas afirma que, por não ter sido devidamente clarificada, a Lógica de seu tempo não estava à altura dessa incumbência. A constatação dessa lacuna presente na Lógica fez Husserl sentir-se abandonado por ela justamente quando “dela esperava respostas para as perguntas específicas que lhe tinha para fazer” (HUSSERL, 2014, p. XIV), especificidade que se dava pela natureza de sua investigação sobre a essência universal de uma Matemática qualitativa, “sem quantidade e, na verdade, como uma disciplina dotada de forma e método (…) inatacáveis” (HUSSERL, 2014, p. XIII). A essência universal da Matemática formal para o filósofo é qualitativa, e não quantitativa, na esteira de uma concepção da Álgebra desvinculada da Aritmética, assim como também propusera Peacock (1830), conforme citaremos mais adiante.

Essa investigação levou-o a reflexões sobre a relação entre os aspectos formais da Matemática e da Lógica[139], bem como a tratar de questões acerca da "essência da *forma* do conhecimento, na sua diferença em relação à *matéria* do conhecimento e sobre [a] diferença entre (…) verdades e leis formais (puras), por um lado, e materiais, por outro" (HUSSERL, 2014, p. XVIII, grifos do autor). Em seu tempo, lógicos como John Stuart Mill (1806-1873), citado pelo filósofo, acreditavam que a Lógica era parte da Psicologia. Nesse sentido, Husserl cita um escrito em que Mill refuta Hamilton, afirmando que a Lógica "[d]eve por inteiro os seus fundamentos teoréticos à psicologia e inclui em si tanto desta ciência quanto o necessário para fundamentar as regras da arte" (MILL, s.d., p. 461 *apud* HUSSERL, 2014, p. 39). Por não concordar com essa perspectiva de que os fundamentos teoréticos essenciais da Lógica se encontravam na Psicologia, é que o fenomenólogo alemão entendia que a Lógica deveria ser clarificada. Para Husserl, há um hiato entre o ideal e o real que é ignorado pelos lógicos psicologistas.

> Os lógicos psicologistas ignoram as diferenças fundamentais e essenciais, definitivamente inultrapassáveis entre lei ideal e lei real, entre regulação normativa e regulação causal, entre necessidade lógica e necessidade real, entre fundamento lógico e fundamento real. Nenhuma gradação pensável pode introduzir mediações entre o ideal e o real. (HUSSERL, 2014, p. 52).

Confundir idealidade com realidade, questões do espírito com questões empíricas, conduz ao relativismo da verdade, no sentido em que esta vincular-se-ia a um sujeito. Dado que a verdade é ideal, *a priori*, lógica, ela não pode ser psicológica. É um contrassenso afirmar que o verdadeiro ou o falso é consoante a quem julga, "[o] que é verdadeiro, é absolutamente verdadeiro, é 'em si' verdadeiro; a verdade é idêntica e só uma, sejam homens ou não, sejam anjos ou deuses que a apreendam no juízo" (HUSSERL, 2014, p. 88)[140]. A verdade, desse modo, não relativa, é articulada no âmbito da Lógica, esta purificada do psicologismo, pelas leis da Lógica Pura, é dessa verdade, nesta "unidade ideal, perante a diversidade real de raças, indivíduos e vivências, que falam as leis lógicas, e de que falamos todos, se não estivermos, por assim dizer, relativisticamente confundidos" (HUSSERL, 2014, p. 88). Clarificar essa questão é fundamental para uma teoria crítica, fenomenológica do

---

[139] Mais adiante, explicitaremos o conceito de formal no pensamento Husserliano.

[140] Tomamos aqui o sentido de verdade expresso por Husserl (2014) como algo que "[se] eleva acima de toda temporalidade, i.e., não tem qualquer sentido atribuir-lhe ser temporal, geração ou corrupção" (p. 58). Essa acepção de verdade é inerente às "leis formais puras" (HUSSERL, 2014, p. 5).

conhecimento e, por isso, Husserl trilha seu percurso filosófico-lógico-matemático, buscando uma "clareza segura acerca das questões fundamentais da teoria do conhecimento e da compreensão crítica da lógica como ciência" (HUSSERL, 2014, p. XIX). Husserl identifica essa idealidade da Lógica pura em consonância com as objetividades matemáticas, um domínio de conhecimentos puramente conceitual: as leis puramente lógicas, ou seja, são leis cuja natureza lhes confere a característica de que é "impossível apreendê-las como leis sobre fatos" (HUSSERL, 2014, p. 58). Ele assim se expressa sobre esse tema.

> As nossas leis puramente lógicas pertencem a este domínio [ao domínio do conhecimento puramente conceitual], bem como as leis da *Mathesis* pura. Não têm a sua "origem", ou melhor dito, a sua fundamentação justificadora na indução; assim, não carregam tampouco consigo o conteúdo existencial que adere a todas as probabilidades enquanto tal, mesmo à mais elevada e valiosa. O que elas dizem vale total e completamente; elas mesmas estão, em si, na sua exatidão absoluta, intelectivamente fundadas e não [estão], em seu lugar, certas afirmações de probabilidades com componentes manifestamente vagos. (HUSSERL, 2014, p. 55-56).

Embora se possa falar de objetos reais, de objetividades mundanas, os objetos gerais, aqueles que são dados em generalidade pura, são para as leis da Lógica como "indicações para a validade de certos juízos" (HUSSERL, 2012a, p.84). Isso quer dizer que se atribuo um predicado a um objeto de tal modo que essa proposição constituída pelo sujeito da predicação e pelo próprio predicado seja verdadeira, então o objeto predicado existe e não é, portanto, uma mera fantasia. Sobre isso, Husserl apresenta o seguinte exemplo: "Se eu compreendo que 4 é um número par, que o predicado expresso convém efetivamente ao objeto ideal 4, então este objeto também não pode ser uma mera ficção, uma mera *façon de parler*, na verdade, um nada." (HUSSERL, 2012a, p.105). No sentido lógico ideal, um juízo que constitui um objeto é único, isto é, "[a] significação da proposição não se multiplica com o número de pessoas e de atos" (HUSSERL, 2012a, p. 83). Assim, ao dizer que 4 é um número par, "vejo intelectualmente que aquilo a que viso na frase mencionada (...) *é* idêntico àquilo que é, pense eu ou não, exista eu ou não, e, em geral, haja ou não pessoas pensantes e atos de pensamento" (HUSSERL, 2012a, p. 83, grifo do autor). Em outras palavras, "nos repetidos atos de representar e de julgar, viso ou posso visar identicamente ao mesmo, ao mesmo conceito e, correspondentemente, à mesma proposição" (HUSSERL, 2012a, p. 83). Isso quer dizer que a significação da proposição é única, portanto, independente do sujeito, e o que aquilo que por ela "é expresso é, por toda parte, algo de *idêntico*, é o *mesmo*, no sentido mais estrito da palavra" (HUSSERL, 2012a, p. 83, grifos do autor). O que confere legitimidade a uma existência é, portanto, uma proposição que predica verdadeiramente sobre esse ser, logo "*todo sujeito de predicações verdadeiras possíveis*" (HUSSERL, 2006, p. 37, grifos do autor) é um objeto.

Essas generalidades têm validade no campo da Lógica Pura, da qual decorrem "*todos os conhecimentos e objetividades de conhecimentos possíveis* (...) [segundo os quais] *os indivíduos têm de ser determináveis por conceitos e leis sob 'princípios sintéticos a priori'*" (HUSSERL, 2006, p. 57, grifos do autor). Consoante a esse conceito das generalidades ideais, na obra *LFLT* (1962), por conseguinte, já no estágio avançado de suas investigações sobre a Lógica, Husserl entendeu-a como ciência, uma teoria fundamental com a finalidade de expor generalidades *a priori*, puras, independentes de qualquer posição de fato, que "quer colocar claramente as ideias orientadoras que aparecem obscuramente em todo trabalho de puro interesse teórico." (HUSSERL, 1962, p. 31, tradução nossa)[141]. Entre todas as ciências *a priori,* isto é, que lidam com leis que são cognoscíveis por intelecção[142], "só a lógica é norma universal no sentido mais elevado e com a mais ampla universalidade concebível" (HUSSERL, 1962, p. 33, tradução nossa)[143], é sua função validar os conhecimentos e métodos de qualquer ciência de acordo com as normas formais da Lógica Pura. Por isso ela tem uma dupla função: normativa e prática. Esta última finalidade emerge justamente quando em seu trabalho investigativo o lógico aplica, por normas, os resultados já obtidos. A Lógica aplica a si mesma, auto referencialmente, suas normas para clarificar aquilo que alcançou: "em seu trabalho prático progressivo tem de empregar por normas os resultados já obtidos e, de acordo com a situação, voltar de modo normativo sobre o que tenha formado com evidência ingênua" (HUSSERL, 1962, p. 34, tradução nossa)[144]. Podemos dizer que ela é, nesse sentido,

[141] *quiere poner en claro plenamente las ideas directrices que oscuramente aparecen en toda obra de un interés teórico puro.*
[142] Segundo Husserl, "nenhuma lei da natureza é cognoscível *a priori*, ou fundamentável ela mesma por intelecção" (2014, p. 48). Neste mesmo trecho, Husserl acrescenta uma nota de rodapé ao seu texto em que define: "*a priori*, i.e., cognoscível por intelecção" (p. 48).
[143] *sólo la lógica es norma universal en el sentido más elevado y con la más amplia universalidad concebible.*
[144] *en su labor práctica progresiva tiene que emplear por normas los resultados ya obtenidos y, dado el caso, volver de modo normativo sobre lo que haja formado con evidencia ingenua.*

autopoiética[145], porque “dá a si mesma suas normas de dilucidação transcendental” (HUSSERL, 1962, p. 278, tradução nossa)[146].

A investigação Matemática estendida para além do domínio quantitativo levou o fenomenólogo, assim, a uma instância formal do conhecimento matemático em que notou a insuficiência da Lógica Clássica para clarificá-la. Dito de outro modo, levou-o à compreensão de uma Matemática livre de qualquer posição de fato e a uma Lógica Pura da qual faz parte o conceito de multiplicidades inerente à Matemática. A Álgebra, conforme compreendemos, seria uma das áreas da Matemática que, entre seus modos de aparição, mostra-se por meio das multiplicidades. Isso porque as multiplicidades regem uma forma e não uma especificidade de objetos, de multiplicades, assim como a Álgebra faz quando, por exemplo, ao ajuizar a respeito de suas estruturas, ato que corresponde a uma instância apofântica pura, não diz de um conjunto de elementos específicos, mas da operação ou operações definidas axiomaticamente para quaisquer conjuntos cujos elementos se submetem a elas, em suma, os juízos algébricos dizem respeito a uma determinada estrutura, a uma forma, o que corresponde, por sua vez, a uma instância ontológica formal.

Na esteira dessas observações discutiremos esse modo de ser da Álgebra enquanto multiplicidades, motivados pelo fato de Husserl ter investigado as relações entre as disciplinas matemáticas modernas, também chamadas de analíticas, e a Lógica, conforme se propôs a fazer: “fixaremos nossa atenção nas questões obscuras que tratam primeiro da relação desta matemática ‘analítica’ com a lógica formal tradicional e logo da relação entre as ideias de ontologia formal e apofântica formal” (HUSSERL, 1962, p. 48, tradução nossa)[147].

Para Husserl é incipiente a Lógica cuja temática é dirigida apenas às configurações teóricas objetivas, ou seja, àquelas resultantes de formações judicativas, de “deduções, demonstrações, teorias conclusas implicadas nela, e com suas correspondentes modalidades e suas distinções normativas de verdade e

[145] O termo autopoiético foi cunhado por Maturana e Varela (2010) quando o conceberam para denominar a capacidade dos seres vivos de reproduzirem continuamente a si próprios, termo que ultrapassou o domínio dos seres vivos e passou a ser aplicado a qualquer sistema que se autorreproduz.
[146] *da a sí misma sus normas de dilucidación trascendental.*
[147] *fijaremos nuestra atención en las cuestiones oscuras que tratan primero de la relación de esta matemática ‘analítica’ con la lógica formal tradicional y luego de la relación entre las ideas de ontología formal y apofántica formal.*

falsidade" (HUSSERL, 1962, p. 42, tradução nossa)[148]. É uma lógica incipiente porque não trata de examinar uma subjetividade intencional para a qual essas objetividades se apresentam. Neste sentido, a Lógica fixou-se, em grande medida, na questão da análise das proposições e não necessariamente na formação dessas proposições por meio dos atos intencionais do sujeito[149], não um sujeito psicofísico, mas um sujeito ideal.

Para esclarecer como os juízos são enraizados em atos, podemos tomar o exemplo dado por Husserl, quando nos diz que a proposição "$a - b + b = a$" (HUSSERL, 1962, p. 45) pode ser compreendida como um produto racional, base para novas proposições, mas também pode ser compreendida como uma sequência de atos, a saber: subtraia $b$ de $a$ e some a esse resultado $b$ para se obter $a$. A compreensão da intencionalidade constituinte desses atos implica o entendimento de que "[c]ontar é produzir números; subtrair é produzir diferenças; multiplicar, produzir produtos (…) do mesmo modo, inferir é produzir conclusões a partir de juízos" (HUSSERL, 1962, p. 45, tradução nossa)[150], entendimento que nos remete a uma aproximação entre os cálculos aritméticos e lógico-proposicionais. Em cada um desses resultados dos atos está o que se pode entender, seja por meio de uma operação lógico-aritmética ou puramente lógica, mas é necessário considerar que para além deles, há uma subjetividade intencional que os produz e que "permanece ainda por examinar (…) na qual se constituem, como unidades sintéticas, os produtos transcorridos e em transcurso, uma subjetividade que ainda não se dá com essa mera volta ao 'eu penso'" (HUSSERL, 1962, p. 46, tradução nossa)[151]. Essa seria uma das funções da Lógica Pura, tal como descrita por Husserl: a análise fenomenológica da formação dos juízos, uma

---

[148] *deducciones, demonstraciones, teorías conclusas implicados en ellos, y con sus correspondientes modalidades y sus distinciones normativas de verdad y falsedad.*

[149] A intencionalidade na Fenomenologia entrelaça-se à consciência, uma vez que "a intencionalidade é a consciência de algo e a evidência não é senão a intencionalidade da doação das próprias coisas" (MOURA, 1989, p. 36). Essas "coisas", por sua vez, no campo da Álgebra, são idealidades sobre as quais se tecem juízos enraizados em atos do sujeito, conforme descreveremos no parágrafo seguinte. Por isso, "a intencionalidade (...) se assemelha a um meio universal que (...) abriga em si todos os vividos" (HUSSERL, 2006, p. 193). A intencionalidade é, portanto, na Fenomenologia, um conceito entrelaçado ao de consciência. Por isso, remetemos o leitor, mais uma vez, às partes deste trabalho em que falamos sobre consciência, páginas 33 e seguintes.

[150] *Contar es producir números; sustraer es producir restas; multiplicar, producir productos (…); asimismo, inferir es producir conclusiones a partir de juicios.*

[151] *queda aún por examinar una subjetividad intencional en la cual se constituyen, como unidades sintéticas, los productos transcurridos y en transcurso, una subjetividad que aún no se franquea con esa mera vuelta hacia el "yo pienso".*

> investigação fenomenológica que procede segundo a orientação da exposição noemática do sentido; esta investigação deve desvelar noeticamente a constituição “subjetiva”; a partir dela, deve colocar questões últimas sobre o sentido e determinar criticamente seu “alcance”. (HUSSERL, 1962, p. 303, tradução nossa)[152].

O desenvolvimento do pensar husserliano acerca da Lógica consiste, portanto, em compreender o caráter essencial da Lógica tradicional, seu sentido, “sua ambiguidade como disciplina teórica e [de caráter] normativo-prático” (HUSSERL, 1962, p. 47, tradução nossa)[153] que corresponde também a uma dupla temática, a qual se desdobra em uma ontologia formal, “uma temática das significações ideais (das formações categoriais [e] uma temática das ações mentais e de sua regulação normativa” (HUSSERL, 1962, p. 47, tradução nossa)[154], uma Apofântica Pura.

O filósofo, ao longo de sua obra, a exemplo do que ocorre no texto *Crise* (1936) [2012], conforme discutido na seção 2 deste trabalho, “A Fenomenologia no e do contexto da crise das ciências europeias”, criticou o Positivismo, entre outros motivos, por ter abandonado a Lógica enquanto teoria das ciências. Ao refletir sobre as investigações científicas de seu tempo, observou que as ciências priorizavam o método em detrimento do objeto de investigação, atitude própria do pensamento contemporâneo a ele e, em grande medida, ao nosso[155]. Desse modo concluiu que todo método tende a se perder quando unido à tecnicização, o que pode levar a ciência da natureza a sofrer, “assim, uma múltiplice transformação e encobrimento de sentido” (HUSSERL, 2012, p. 38).

O excesso de tecnicismo, o método que substituiu a natureza mesma, fez a ciência perder-se em uma empiria,  o que a levou ao encobrimento dos sentidos da

---

[152] *insvetigación fenomenológica que procede según la guía de la exposición noemática del sentido; esta investigación debe descubrir noeticamente la constituición ‘subjetiva’ a partir de ella, debe plantear cuestiones últimas sobre el sentido e determinar críticamente su ‘alcance’.*
[153] *su ambigüedad como disciplina teórica y normativa-práctica.*
[154] *una temática de las significaciones ideales (de las formaciones categoriales) [e] una temática de las acciones mentales y de su regulación normativa.*
[155] A crítica ao Positivismo, cientificismo e às tendências do tempo de Husserl estão presentes em seus pensamentos, mas não devemos reduzi-los a essa crítica específica. O momento de crise das ciências europeias foi importante na construção da Fenomenologia husserliana, porém como aponta Ales Bello (1986, p. 204-205) "a Fenomenologia se situa no momento de crise da cultura europeia e, se pretende “salvá-la”, este trabalho não pode consistir apenas, como defendeu Husserl, na eliminação do cientificismo, dos resíduos do positivismo ou do historicismo; se fosse assim, já teria perdido seu valor crítico” (Tradução nossa).
“*Fenomenologia si colloca nel momento di crisi della cultura europea e se sustiene di desiderare di ‘salvarla’, in realtà quest’opera non può consistere solo, come Husserl susteneva, nell’eliminazione dello scientismo, dei resudui del positivismo o dello storicismo;  si fosse meramente così essa avrebbe perduto ormai la sua valenza critica*”

natureza e do próprio conhecimento, perda de sentido que foi ocasionada pelo abandono, notadamente no Positivismo, do ideal platônico de ciência fundamentada na Lógica que, por sua vez fora originalmente "concebida como uma esfera que investiga[va] os requisitos essenciais do saber 'autêntico' e da ciência 'autêntica'" (HUSSERL, 1962, p. 5, tradução nossa)[156], ou seja, uma ciência sabedora do seu método e que aspirava "conscientemente a legitimidade normativa geral e que, conscientemente [justificava] seu método e sua teoria" (HUSSERL, 1962, p. 5, tradução nossa)[157]. Constata-se, nesta citação e em toda obra do filósofo, a ênfase que Husserl dá ao termo "conscientemente", advérbio de modo, que explicita a preocupação de sua Teoria Crítica do Conhecimento, a qual converge para a clarificação dos atos intencionais, ou seja, da consciência[158].

Dessas constatações resultou o movimento husserliano de investigar a Lógica, de clarificar, fenomenologicamente, seu sentido e de desvelar os aspectos fundamentais de uma teoria das ciências da qual faz parte a teoria das multiplicidades. A essência dessa Lógica estaria em ser "uma teoria das *formações cognoscitivas e judicativas* do campo ideal objetivo" (HUSSERL, 1962, p. 47, grifos do autor e tradução nossa)[159].

Segundo Husserl, foi a visualização e respectiva elaboração das ideias concernentes à problemática transcendental que permitiu distinguir o mundo, quer o efetivamente existente, quer o possível, da subjetividade transcendental, uma vez que esta precede o sentido do mundo e "constitui seu sentido ontológico e por conseguinte comporta toda a realidade do mundo como ideia constituída atual e potencialmente nela" (HUSSERL, 1962, p. 278, tradução nossa)[160]. A esfera da subjetividade transcendental, por sua vez, é franqueada pela redução transcendental, tal como discutida na seção 1 deste trabalho, "Fenomenologia: uma visão do conhecimento inspirada na Matemática". A Lógica transcendental é aquela cujas normas e investigações transcendentais dilucidam a Lógica mundana, a Lógica objetiva,

---

[156] *concebida como una esfera que investiga[va] los requisitos esenciales del saber 'auténtico' y de la ciencia 'auténtica'.*

[157] *conscientemente a legitimidad normativa general y que conscientemente justifique su método y su teoría.*

[158] O conceito de consciência foi tratado neste trabalho, mais especificamente, nas páginas 33 e seguintes.

[159] *una teoría de las formaciones cognoscitivas y judicativas del campo ideal objetivo.*

Sobre o sentido de objetividade ideal, remetemos o leitor às páginas176, 181 e 202 deste trabalho.

[160] *constituye su sentido ontológico y por consiguiente comporta toda la realidad del mundo como idea constituida actual y potencialmente en ella.*

reduzindo “todos os princípios da lógica objetiva, enquanto teoria, a seu sentido original, a seu legítimo sentido fenomenológico transcendental e lhe confere assim autêntico caráter científico” (HUSSERL, 1962, p. 281, tradução nossa)[161].

Como justificativa para essa investigação, o fenomenólogo aponta que as ciências, ao se especializarem e se tornarem independentes da Lógica, simultaneamente, tornaram-se ingênuas, ingenuidade de nível superior àquela do homem cotidiano, mas ainda assim ingenuidade, por se tratar de ausência de reflexão. Desta forma, o desenvolvimento irrefletido de seus métodos significou alijar a Lógica Pura da ciência, a mesma Lógica que outrora fora tomada como “porta-estandarte do método e [que] tinha a pretensão de ser uma teoria pura dos princípios do conhecimento e das ciências possíveis” (HUSSERL, 1962, p. 6, tradução nossa)[162]. Resgatar a Lógica Pura é, por conseguinte, uma tarefa que clarifica os métodos em lugar de tomá-los como substitutos daquilo que é investigado. Tal atitude é inerente à busca de um conhecimento autêntico do ponto de vista fenomenológico, fundamentado na objetividade ideal, na generalidade e, portanto, não decorrente da experiência direta, a qual “fornece apenas singularidades” (HUSSERL, 2006, p. 63). Se por um lado a Lógica Pura independe das singularidades, estas são, por outro lado, regidas por aquela, uma vez que a aplicação dos métodos lógicos às efetividades fáticas baseia-se em que essas efetividades abrigam em si possibilidades puras, isto é, tal aplicação sujeita-se “às leis inerentes à essência da *objetividade em geral”* (HUSSSERL, 2006, p. 44, grifos do autor). Dito de outro modo “[n]ão há *nenhuma ciência de fatos, plenamente desenvolvida como ciência,* que possa ser pura de conhecimentos eidéticos e, com isso, *independente das ciências eidéticas, quer formais, quer materiais*.” (HUSSERL, 2006, p. 44, grifos do autor)[163].

Essa generalidade foi intentada pela ciência por meio da Lógica em seus primeiros momentos, quando esta

> seguia assim encarregada da grande função de investigar, com generalidade essencial, os possíveis caminhos em direção aos princípios últimos e de procurar uma norma e uma guia para a ciência efetiva, explicitando a essência de uma ciência autêntica em geral

---

[161] *todos los principios de la lógica objetiva, en cuanto teoría, a su sentido original, a su legítimo sentido fenomenológico transcendental y le confiere así auténtico carácter científico.*
[162] *portaestandarte del método y [que] tenía la pretensión de ser una teoría pura de los principios del conocimiento y de las ciencias possibles.*
[163] Acerca dessa relação entre ciências de fato e de essência, recomenda-se uma leitura dos parágrafos 7 e 8 da obra *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica* (HUSSSERL, 2006, p. 42- 44).

> (quer dizer, de sua possibilidade pura). (HUSSERL,1962, p. 8, tradução nossa)[164].

Entretanto, ao priorizar "uma espécie de operação meramente técnica, cuja ingenuidade contrasta ao extremo com outra operação: a própria regulamentação radical a partir dos princípios" (HUSSERL, 1962, p. 8, tradução nossa)[165], a ciência deixou de lado a radicalidade possibilitada por aquela função da Lógica que a encarregaria de ser a norma de uma ciência autêntica (HUSSERL, 1962, p. 11), de ser uma teoria das teorias ou uma teoria das multiplicidades.

Como uma ciência autêntica, uma ciência das ciências, a Lógica é constituída por duas esferas correlatas e indissociáveis, a que estabelece os objetos formais com os quais lida, uma ontologia formal; e a que constitui as leis pelas quais esses objetos podem ser relacionados ou não, uma apofântica formal. O adjetivo formal, segundo Husserl, consiste na qualidade de que "*a razão mesma*, particularmente a razão teórica, *é um conceito formal*" (HUSSERL, 1962, p. 31, grifos do autor e tradução nossa)[166], ou seja, "*a razão 'pura' não só paira sobre tudo que é empiricamente fático, bem como também sobre todas as esferas hilético-materiais*" (HUSSERL, 1962, p. 32, grifos do autor e tradução nossa)[167]. As esferas hilético-materiais[168], contudo, têm sua importância, uma vez que as formas fundamentais, ontológicas *a priori*, desvelam-se justamente em suas aparições, em suas manifestações sensíveis, vale dizer, a formalização decorre da intuição e validamos essas formas por meio da análise de suas relações, a apofântica. Para Husserl, o "recurso à clareza intuitiva (evidência, isto é, intuição) (...) exprime (...) o recuo àquilo que há de último em todo conhecimento, exatamente [do modo] como se fala de evidência nos axiomas lógicos e aritméticos mais primitivos" (HUSSERL, 2006, p. 180). Assim, a razão judicativa pura

---

[164] *seguia así encargada de la gran función de investigar, con generalidad esencial, los posibles caminos hacia los principios últimos y de procurar una norma y una guía a la ciencia efectiva, explicitando la esencia de una ciencia auténtica en general (es decir, de su posibilidad pura).*

[165] *una especie de operación meramente técnica, cuya ingenuidad contrasta al extremo con otra operación: la propia normación radical a partir de principios.*

[166] *la razón misma, particularmente la razón teórica, es un concepto formal*

[167] *La razón "pura" no solo está por encima de todo empíricamente factico, sino también por encima de todas las esferas esenciales hylético-materiales.*

[168] O termo hilético refere-se ao mero dado da sensação: "*tudo o que é hilético* entra como componente *real* no vivido concreto, ao passo que o que se 'se exibe', 'se perfila' nele, como múltiplo, entra no *noema*." (HUSSERL, 2006, p. 225, grifos do autor). O *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa* registra o adjetivo "hilico" como "pertencente à matéria, corpóreo, material", de raiz etimológica do grego: "*hulikós* no sentido de 'material, corporal; carnal, donde impuro'" (HOUAISS; VILLAR, 2001.p. 1532). Para um aprofundamento do conceito de *hylé*, remetemos o leitor aos parágrafos 85, 86 e 97 de Husserl (2006).

tem um pressuposto: “uma referência constante e essencialmente necessária a algum componente hilético, como fundamento aperceptivo das experiências possíveis que necessariamente supõe o julgar” (HUSSERL, 1962, 32, tradução nossa)[169]. Logo, os dados hiléticos desvelam o formal:

> Assim pois, se determinarmos o conceito de “forma fundamental” pelos componentes essencialmente necessários de uma subjetividade racional em geral, o conceito de “hile” (exemplificado por qualquer “dado sensível”) resulta num conceito formal e não em seu contrário: um conceito contingente. (HUSSERL, 1962, p. 32, tradução nossa)[170].

A razão judicativa pura, que é circunscrita pela apofântica, corresponde à “esfera dos enunciados afirmativos” (HUSSERL, 1962, p. 51, tradução nossa)[171], portanto tem “por conceito supremo que determina sua esfera o conceito de *juízo*” (HUSSERL, 1962, p. 65, grifo do autor e tradução nossa)[172] e seu tema é o juízo mesmo. Vale enfatizar que a analítica pura não versa sobre juízos circunstanciais, mas sobre “possibilidades *a priori*, tem a ver com possibilidades às quais se subordinam, em um sentido fácil de compreender, todos os juízos atuais correspondentes” (HUSSERL, 1962, p. 65, tradução nossa)[173]. Disso decorre que “o lógico da analítica *pura* tem *por esfera a essência genérica*: juízo distinto; com sua extensão, que abarca os juízos possíveis” (HUSSERL, 1962, p. 65, grifos do autor e tradução nossa)[174].

Por sua vez, a ontologia formal, cujas verdades “*a priori* enunciam o que é válido, com generalidade, para os *objetos em geral*” (HUSSERL, 1962, p. 124, grifos do autor e tradução nossa)[175], circunscreve a esfera das objetividades que surgem por formalização, segundo suas formas puras, objetividades em que “permanecem com generalidade indeterminada os ‘núcleos’ materiais” (HUSSERL, 1962, 123, tradução nossa)[176] . A característica de que seus enunciados são apriorísticos, de que

---

[169] *una referencia constante e esencialmente necesaria a algún componente hylético, como fundamento aperceptivo de las experiencias posibles que necesariamente supone el juzgar.*
[170] *Así pues, si determinamos el concepto de “forma fundamental” por los componentes esencialmente necesarios de una subjetividad racional en general, el concepto de “hyle” (ejemplificado por cualquier "dato sensible") resulta un concepto formal y no su contrario: un concepto contingente.*
[171] *esfera de los enunciados afirmativos.*
[172] *por concepto supremo que determina su esfera, el concepto de juicio*
[173] *posibilidades a priori, tiene a ver con posibilidades a las que se subordinan, en un sentido fácil de comprender, todos los juicios actuales correspondientes.*
[174] *el lógico de la analítica pura tiene por esfera la esencia genérica: juicio distinto; con su extensión, que abarca los juicios posibles.*
[175] *a priori enuncian lo que es válido, con generalidad formal, para los objetos en general.*
[176] *quedan con generalidad indeterminada los ‘núcleos’ materiales.*

independem de qualquer realidade, não exclui a possibilidade de que eles tenham a propriedade de serem potencialmente intuíveis por uma subjetividade, uma vez que esses núcleos materiais que se vestem dessa generalidade indeterminada são revelados por meio "das intuições da experiência e constituem no seio do juízo os caracteres concretos essencialmente próprios dos objetos e das esferas de objetos" (HUSSERL, 1962, p. 123, tradução nossa)[177]. Assim, a formalização entrelaça-se à intuição do mesmo modo que as esferas apofânticas e ontológicas da Lógica, tal como ocorre "para o *geômetra*, que não investiga efetividades, nem estados-de-efetividade, mas 'possibilidades ideais' e estados-de-essência, (...) [para ele é] *a apreensão intuitiva de essência o ato fundante último*" (HUSSERL, 2006, p. 42-43, grifos do autor). Dito de outro modo, o tema da Lógica enquanto teoria formal das ciências é constituído pelas objetividades categoriais em geral segundo suas formas puras, por assim dizer, matematicamente formalizadas, as quais provêm das intuições e enunciam-se pelo juízo, ou seja, a ontologia formal "enuncia *em que formas são, ou podem ser, em geral* os objetos; em conformidade com os juízos" (HUSSERL, 1962, p. 124, grifos do autor e tradução nossa)[178].

Não obstante, nem todo julgar resulta em conhecimento, uma vez que o interesse pelo conhecimento no sentido mais estrito é constituído pelo conjunto de "interesses na 'verificação' segura, [e] necessidades de convencer-se '*pelas coisas mesmas*' 'tal como *efetivamente* são'" (HUSSERL, 1962, p. 126, grifos do autor e tradução nossa)[179]. Desse modo, embora o julgar consista em "dar a algo validez de ser" (HUSSERL, 1962, p. 125, tradução nossa)[180], tal validez pode ser provisória, uma vez que "no ulterior processo de judicação, essa validez de ser não seja mantida por quem julga" (HUSSERL, 1962, p. 125, tradução nossa)[181]. O conhecimento é, portanto, resultado de um julgar duradouro, isto é, da manutenção da objetividade constituída nesse julgar em julgamentos ulteriores, pois a atitude crítica da qual decorre o conhecimento é aquela que, sob a forma fenomenológica da evidência, na qual as coisas se dão elas mesmas, faz coincidirem a objetividade mencionada enquanto tal e a efetivamente existente. O julgar do sujeito cotidiano difere, portanto,

---

[177] *de las intuiciones de la experiencia y constituyen en el seno del juicio los caracteres concretos esencialmente propios de los objetos y de las esferas de objetos.*
[178] *enuncia en qué formas son, o pueden ser, en general los objectos; conforme a lo juicios.*
[179] *intereses en la 'verificación' segura, [e] necesidades de convencerse 'por las cosas mismas' 'tal como efectivamente son'.*
[180] *darle a algo validez de ser.*
[181] *en el ulterior proceso de judicación, esa validez de ser no sea mantenida por quien juzga.*

do julgar do cientista: o primeiro, em sua ingenuidade, não se ocupa da ulterior validação do seu julgar, enquanto o cientista, aquele que tem intenções cognoscitivas faz o contrário. Para ele, uma primeira característica do conhecer é

> Não conceder validez de resultado científico a nenhum juízo, salvo àqueles que tenham comprovado sua "*correção*", sua "verdade", por *adequação às coisas mesmas*, e que possam ser reestabelecidas originalmente em qualquer momento [de acordo] com essa correção, graças a uma nova realização da adequação. (HUSSERL, 1962, p. 128, grifos do autor e tradução nossa)[182].

Logo, a característica do conhecer científico que o distingue do conhecer do homem comum é que, para aquele, as verdades "se convertem em aquisições do conhecimento que se conservarão"[183] (HUSSERL, 1962, p. 129), porque refletidas e validadas intersubjetivamente, ou seja, pela comunidade cientifica, "estas [verdades] podem de novo fazerem-se evidentes a qualquer momento: desse modo, tornam-se acessíveis para *qualquer* sujeito, enquanto sujeito pensante racional; e já eram acessíveis antes de seu 'descobrimento'" (HUSSERL, 1962, p. 129, grifos do autor e tradução nossa)[184]. O enunciado científico, além de ser duradouro, porque não cai com a temporalidade, é *a priori*, porque preexiste e é obtido com a intelecção, tem a característica de ser potencialmente acessível a qualquer sujeito cognoscente. O cientista, em seu trabalho, tem, em consequência, um interesse cognoscitivo.

Esse interesse cognoscitivo é inerente à Lógica, cujos objetos são tomados de um modo geral e formal e que, além disso, tem uma dupla temática: subjetiva, uma vez que se ocupa das "formas possíveis das ações que produzem e conhecem as formações de conhecimento" (HUSSERL, 1962, p. 113, tradução nossa)[185], ou seja, as noeses (os atos); e objetiva, uma vez que se ocupa das formações mesmas, aquelas que são correlatos das noeses, os noemas[186], os modos como o real é percebido enquanto tal, os sentidos da percepção do real. No que diz respeito à Matemática Formal, o lógico notará que "é inerente ao (...) próprio sentido *lógico* [da

---

[182] *No conceder validez de resultado científico a ningún juicio, salvo a aquellos que hayan comprobado su 'correción', su 'verdad', por adecuación a las cosas mismas, y que puedan ser restablecidas originalmente en cualquier momento con esa corrección, gracias a una nueva realización de la adequación.*

[183] *se convierten en adquisiciones del conocimiento que se conservarán en adelante.*

[184] *éstas pueden de nuevo hacerse evidentes en cualquier momento: de este modo resultan accesibles para cualquier sujeto, en cuanto sujeto pensante racional; y ya eran accesibles antes de su 'descubrimiento'.*

[185] *formas posibles de las acciones que producen y conocen las formaciones de conocimiento;*

[186] A respeito das relações noético-noemáticas remetemos o leitor à página 45 deste trabalho.

Matemática] uma extensão de sua função cognoscitiva que se funda na intenção de conhecer" (HUSSERL, 1962, p. 114, grifo do autor e tradução nossa)[187]. Isto quer dizer que a eventual concepção desta Matemática como um jogo simbólico, com finalidade em si mesma, é equivocada. O matemático que lida apenas com a técnica pode permanecer "indiferente à circunstância de que todas as (...) [formações matemáticas] tenham o sentido de formações chamadas a aparecer em quaisquer *juízos com valor de conhecimento*" (HUSSERL, 1962, p. 113, grifo do autor e tradução nossa)[188], já o "lógico formal tem de se ocupar de tudo isto" (HUSSERL, 1962, p. 114, tradução nossa)[189]. É trabalho do lógico matemático, de quem vê a Matemática como um conhecimento autêntico, compreender que "as formações matemáticas funcionam como elementos de determinação dos objetos físicos" (HUSSERL, 1962, p. 113, grifo do autor e tradução nossa)[190].

A partir dessa concepção da Matemática orientada para uma atitude cognoscitiva, compreende-se que "não se agrupa nem se conta por jogo, nem por estar interessado nele ou por qualquer motivo que seja, mas por interesse no conhecimento de uma esfera de objetos" (HUSSERL, 1962, p. 113, tradução nossa)[191]. O ato de agrupar ou de contar tem a finalidade de "c*onhecer e determinar predicativamente* (apofanticamente) os elementos e unidades que formam parte da esfera de objetos em questão" (HUSSERL, 1962, p. 113, grifos de autor e tradução nossa)[192]. Justamente por isso a Matemática estrutura-se na Lógica e situa-se na "esfera apofântica do juízo, entre cujos componentes se encontram todas as formações matemáticas" (HUSSERL, 1962, p. 114, tradução nossa)[193]. Na esfera aponfântica dos juízos, da razão e da Lógica estão todas as formações matemáticas o que significa, por assim dizer, o entrelaçamento entre Filosofia, Lógica e Matemática, a dimensão de uma autêntica *Mathesis Universalis*:

---

[187] *es inherente a su proprio sentido lógico una extensión de su función cognoscitiva que se funda en la intención de conocer.*
[188] *indiferente a la circunstancia de que todas as (…) tengan el sentido de formaciones llamadas a aparecer en cualquiera juicios con valor de conocimento.*
[189] *el lógico formal si tiene que ocuparse de todo esto.*
[190] *las formaciones matemáticas fungen como elementos de determinación de los objetos físicos.*
[191] *no se colige ni se cuenta por juego, ni por estar interesados en ello por el motivo que fuera, sino por interés en el conocimento de una esfera de objetos.*
[192] *conocer y determinar predicativamente (apofánticamente) los elementos y unidades que forman parte de la esfera de objetos en cuestión.*
[193] *esfera apofántica del juicio, entre cuyos componentes se cuentan empero todas las formaciones matemáticas.*

> A isso se liga *o ideal prático da ciência eidética exata*, que a matemática moderna foi propriamente a primeira a ensinar a realizar: conferir a cada ciência eidética o mais alto nível de racionalidade pela redução de todos os passos mediados de pensamento a meras subsunções aos axiomas do domínio eidético respectivo, coligidos de maneira sistemática e definitiva, aos quais vêm se juntar, se já não se trata de antemão da lógica "formal" ou "pura" (no sentido *mais amplo* da *mathesis universalis)*, todos os axiomas desta última. (HUSSERL, 2006, p. 43, grifos do autor).

As disciplinas matemático-formais, a exemplo da Álgebra, têm por conceitos fundamentais "certas formas derivadas de '*algo em geral*'" HUSSERL, 1962, p. 80, grifos do autor e tradução nossa)[194]. Disso resulta que a Matemática pode ser considerada, ainda,

> uma *ontologia* (teoria *a priori* dos objetos), ainda que *formal*, referida aos modos puros de algo em geral. Com ela obteríamos também a ideia diretriz para determinar as esferas particulares dessa ontologia, dessa matemática das objetividades em geral, mediante um exame *a priori* de sua estrutura. (HUSSERL, 1962, p. 80, grifos do autor e tradução nossa)[195].

Dessa Matemática nasce a "ideia universal de ciência: a de uma Matemática formal em um *sentido muito amplo*; sua esfera universal permanece firmemente circunscrita pela extensão do conceito formal de '*objeto em geral*'" (HUSSERL, 1962, p. 80, grifos do autor e tradução nossa)[196]. No desenvolvimento dessa Matemática formal, destaca-se a Álgebra, uma vez que "[o] autêntico descobrimento do formal leva-se a cabo, pela primeira vez, no começo da Época Moderna, graças à fundamentação da Álgebra por Viète [1540 - 1603]" (HUSSERL, 1962, p. 83, tradução nossa)[197]. A Matemática, mais especificamente a Álgebra moderna, lida com a generalização lógico-matemática, tal como enunciado por Husserl, aquela que leva às formas puras, ideais, por meio da "substituição dos núcleos plenos por núcleos vazios, das matérias determinadas por algo indeterminado (matérias em geral), dos objetos determinados por 'objetos em geral', das essências determinadas por 'essências em geral'" (HUSSERL, 2006, p. 344).

---

[194] *ciertas formas derivadas de 'algo en general'.*

[195] *una ontología (teoría a priori de los objetos), aunque formal, referida a los modos puros de algo en general. Con ella obtendríamos también la idea directriz para determinar las esferas particulares de esta ontología, de esta matemática de las objetividades en general, mediante un examen a priori de su estructura.*

[196] *idea universal de ciencia: la de una matemática formal en un sentido muy amplio; su esfera universal queda firmemente circunscrita por la extensión del concepto formal supremo 'objecto en general'.*

[197] *el auténtico descubrimiento de lo formal si lleva al cabo, por vez primera, al comienzo de la Época Moderna, gracias a la fundamentación del álgebra por Vieta.*

A Lógica apofântica, a dos enunciados afirmativos, das proposições é, portanto, formal quando “algebrizada”, quando não trata de objetos específicos, mas de objetividades em geral. Por exemplo, no juízo “todo homem é mortal, Sócrates é homem, logo Sócrates é mortal”, as referências objetivas, “homem”, “Sócrates” e “mortal”, podem ser substituídas por objetos em geral, permanecendo válida a estrutura desse juízo, o que o torna geral, sem qualquer menção a objetos particulares, da forma: “todo *a* é *b, c* é *a,* logo *c* é *b*”*.* Assim, se substituirmos qualquer núcleo material do juízo por um elemento qualquer, por uma generalidade, em qualquer mudança de referência objetiva ou de diferentes esferas de objetos, os demais elementos do juízo permanecem como elementos da forma e se conservam iguais. Apenas “a introdução da Álgebra permitiu, entre os modernos, progressos em direção a uma lógica formal pura” (HUSSERL, 1962, p. 52, tradução nossa)[198]. Há que se destacar, neste aspecto, uma característica fundamental da Álgebra, a de ser uma área da Matemática que não apenas estabelece leis que generalizam resultados e permitem o estabelecimento de termos gerais de uma sequência, mas que cria generalidades ao possibilitar, em um juízo, a substituição de qualquer núcleo material por um algo qualquer, isto quer dizer que suas leis em lugar de criar objetos específicos, criam objetos formais, ou seja, criam multiplicidades "cuja soma total de conhecimentos (como, por exemplo, na geometria) está contida, em necessidade dedutiva pura, na generalidade de alguns poucos axiomas” (HUSSERL, 2006, p. 43).

Em suas investigações sobre a Lógica Pura, ao questionar-se sobre as condições de possibilidade de uma ciência em geral, Husserl reconhece que “o objetivo essencial do conhecimento científico só pode ser alcançado pela teoria no sentido rigoroso das ciências nomológicas” (HUSSERL, 2014, p. 177), as ciências dedutivas, o que o leva a pensar sobre “*as condições de possibilidade de uma teoria em geral”* (HUSSERL, 2014, p. 177, grifos do autor), sobre as condições de conhecimento teorético em geral – logo, condições subjetivas - as quais categoriza como reais e ideias. As reais correspondem às condições psicológicas, ao psicologismo, e são causais. As condições ideias, aquelas que interessam ao filósofo, são, por sua vez, subdivididas em: a) noéticas, uma vez que “é *a priori* evidente que [os] sujeitos pensantes têm, *e.g.*, em geral de ser capazes de executar todas as espécies de atos nos quais se realiza o conhecimento teorético” (HUSSERL, 2014, p.

---

[198] *la introducción del álgebra permitió, en los modernos, progresos hacia una lógica formal pura.*

178), bem como essas condições “se fundam na ideia do conhecimento enquanto tal e *a priori,* sem qualquer relação com a particularidade empírica do conhecimento humano” (HUSSERL, 2014, p. 178); b) puramente lógicas, uma vez que embora seja evidente que as verdades, as leis, fundamentos e princípios possam ser inteligidos porque os sujeitos cognoscentes podem realizar atos, eles são o que são, quer os intelijamos ou não, isto é, são condições fundadas puramente no “‘conteúdo’ do conhecimento” (HUSSERL, 2014, p. 178), quer existam sujeitos pensantes ou não, o que corresponde à refutação do psicologismo lógico, conforme já mencionamos em parágrafos anteriores.

Essas leis, quando recebem formulações evidentes “por transposição de relações ideais (expressas por proposições puramente genéricas) para casos particulares empíricos, resultam afirmações apriorísticas sobre possibilidades reais” (HUSSERL, 2014, p. 179), ou seja, são aquelas condições de possibilidade da teoria em geral. Assim “[a] possibilidade ou essencialidade da teoria em geral é naturalmente assegurada pelo conhecimento intelectivo de uma qualquer teoria determinada” (HUSSERL, 2014, p. 180), o que nos remete à ideia de que a possibilidade ou essencialidade da teoria em geral é puramente lógica, pois “[u]ma teoria enquanto tal consiste em verdades e a forma de sua interligação é dedutiva” (HUSSERL, 2014, p. 177). Desse modo, é igualmente lógica uma teoria das teorias ou teoria das multiplicidades, referenciada por Husserl ao longo de toda sua obra, teoria que é essencialmente matemática e possibilita a formulação teórica a respeito dos objetos gerais, do algo em geral, isto é, uma multiplicidade no sentido husserliano não versa sobre um objeto específico, mas sobre objetos ideais que se constituem axiomaticamente.

Neste sentido, a Álgebra, em suas teorias, tais como a Teoria dos *Grupos* ou os *Espaços Vetoriais*, por exemplo, permite a compreensão da “estrutura íntima de um sistema de fatos e [permite também] pôr em evidência o isomorfismo de relações aparentemente muito diversas” (COSTA, 1971, p. 301) entre objetos ideias. Essa possibilidade de estabelecer relações entre objetos aparentemente pertencentes a domínios desconexos, mas que se constituem como uma multiplicidade, ampliou o alcance da própria Álgebra e das possibilidades criativas da Matemática, no sentido de iluminar novos objetos ideais e as relações entre eles, e constitui, segundo Livio (2005, p. 199), “a ‘suprema arte da abstração matemática’”. Na próxima subseção, trataremos mais especificamente da Teoria das Multiplicidades e suas relações com a Álgebra.

## 6.2 Aproximação entre Álgebra e Teoria das Multiplicidades

O termo *multiplicidades* é uma tradução da palavra alemã *Mannigfaltigkeitslehre* que remete a algumas teorias matemáticas desenvolvidas entre os séculos XIX e XX. No parágrafo 70 de sua obra *Investigações Lógicas: Prologômenos à Lógica Pura* (2014, p. 185-188), Husserl cita alguns matemáticos que o inspiraram no desenvolvimento de sua própria teoria das multiplicidades, tais como: Hermann Günther Grassmann (1809 -1877), que desenvolveu a teoria algébrica da extensão linear; William Rowan Hamilton (1805 – 1965) que, dentre outros estudos, desenvolveu a Álgebra não comutativa dos Quatérnions; Marius Sophus Lie (1842 – 1899), famoso pelo desenvolvimento da Álgebra de Lie; George Cantor (1845 – 1918), entre cujos trabalhos destaca-se a teoria dos conjuntos, tema sobre o qual publicou, em 1877, no *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* o artigo *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (Uma contribuição para a teoria das multiplicidades). Originalmente adotado por Cantor, o termo multiplicidade, pode ter sido inspirado nos trabalhos de Bernhard Riemann (1826 –1866):

> Mencionar Riemann em conexão com a história dos conjuntos ainda é bastante incomum, mas há indicações de que ele desempenhou um papel importante nas primeiras fases de desenvolvimento da noção de conjunto. De 1878 a 1890, seu período mais criativo, Cantor se referiu à teoria dos conjuntos como *Mannigfaltigkeitslehre*, a "teoria das variedades", empregando a mesma palavra que Riemann havia cunhado em sua palestra de 1854. Notavelmente, o artigo de 1878[199] em que Cantor emprega pela primeira vez a expressão aborda um problema que está diretamente relacionado ao *Habilitationsvortrag (trabalho de habilitação)* de Riemann, a caracterização da dimensão. Dedekind entendeu que a terminologia de Cantor estava relacionada ao trabalho de seu amigo Riemann. (FERREIRÓS, 2007, p.39, tradução nossa)[200].

[199] O artigo referido por Ferreirós, na verdade, é de 1877, conforme citamos no parágrafo anterior, e pode ser encontrado no endereço: http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/resolveppn/?PPN=GDZPPN002156806, acessado em 20 jan. 2022.

[200] *In this chapter we trace back the first influential appearance of a set-theoretical viewpoint to the work of Riemann. Of course, by speaking of "a set-theoretical viewpoint" I do not mean to suggest that Riemann reached technical results that we would classify today as belonging to set theory - only that he introduced set language substantially in his treatment of mathematical theories and regarded sets as a foundation for mathematics. This comes out in a public lecture given in 1854, on the occasion of his Habilitation as a professor at Grttingen, when he proposed a general notion of manifold - the famous*

O próprio Riemann, influência para Cantor, é também citado por Husserl no parágrafo 70 dos *Prologômenos à Lógica Pura*. Em sua geometria, desenvolveu o conceito de "variedade de Riemann", em que generalizou, para espaços *n*-dimensionais, as noções métricas, por exemplo, de comprimento de curvas, de área de superfícies e de ângulos entre duas curvas. O termo *Mannigfaltigkeitslehre*, por ele empregado, aparece na tradução de suas teorias para o português, como variedade ou como multiplicidade. Para um estudo mais aprofundado acerca da origem matemática desses termos e dos trabalhos de cada um desses matemáticos, remetemos o leitor a Vargas (2019).

Assim, no contexto dos séculos XIX e XX, em que algebristas e geômetras generalizaram, por assim dizer, estas áreas da Matemática, Peacock, em seu *Treatise on Algebra*, obra em que tenta estruturar a Álgebra à maneira da Geometria, ou seja, como uma disciplina lógico-dedutiva, definiu-a como "*a ciência do raciocínio geral* [expresso] *pela linguagem simbólica*". (PEACOCK, 1830, p. 1, grifos do autor e tradução nossa)[201]. Além disso, o matemático faz ressalvas sobre qualquer tentativa de defini-la de forma simples, bem como sobre a redução dela a uma Aritmética Universal, o que restringiria o seu objeto enquanto ciência:

> É impossível, no entanto, por qualquer definição simples, expressar plenamente seus objetos e aplicações [da Álgebra], que só podem ser claramente compreendidos por uma pessoa familiarizada com a ciência: ela foi denominada Aritmética Universal; mas esta definição é defeituosa, na medida em que designa para o objeto geral da ciência o que só pode ser considerado como uma de suas aplicações. (PEACOCK, 1830, p. 1, tradução nossa.)[202].

Destas considerações entendemos, portanto, que a ideia husserliana de multiplicidade emerge também da compreensão, contemporânea ao filósofo, da

---

*'On the Hypotheses upon which Geometry is Founded,' published posthumously by Dedekind in 1868. We shall refer to it as Riemann's Habilitationsvortrag. Mentioning Riemann in connection with the history of sets is still quite uncommon, but there are indications that he played an important role in the early phases of development of the notion of set. From 1878 to 1890, his most creative period, Cantor referred to set theory as Mannigfaltigkeitslehre, the 'theory of manifolds,' employing the same word that Riemann had coined in his lecture of 1854. Notably, the 1878 paper in which Cantor first employs the word addresses a problem that is directly related to Riemann's Habilitationsvortrag, the characterization of dimension. And Dedekind understood Cantor's terminology to be related to the work of his close friend Riemann.*

[201] *the science of general reasoning by symbolical language*

[202] *It is impossible however, by any simple definition, to express fully its objects and applications, wich can only be clearly comprhended by a person acquainted with the science: it has been termed Universal Arithmetic; but this definition is defective, inasmuch as it assigns for the general object of the science, what can only be considered as one of its applications. [PEACOCK, l830, p. 1]*

Álgebra como uma ciência que se desprende da Aritmética, que a transcende em certo sentido. Desse modo, pode ser compreendida como uma ciência que inspira o fenomenólogo e matemático alemão a buscar nos seus fundamentos uma ciência das ciências, uma teoria das teorias ou uma teoria das multiplicidades fundada num "pensar algébrico supremo" (HUSSERL, 2012, p. 35), decorrente de um processo de "total 'formalização' universal (...) [e de] ampliação da doutrina algébrica dos números e das grandezas, até uma *'análise'*, *'doutrina das multiplicidades*'" (HUSSERL, 2012, p. 35, grifos do autor). O referido pensar algébrico supremo é entendido como

> uma "*mathesis universalis"* (...) nada mais é do que uma lógica formal realizada em todos os seus aspectos (...) uma ciência das *figuras de sentido do "algo em geral"* construível num puro pensar, em generalidade pura-formal e, sobre esta base, ciência das "*multiplicidades".* (HUSSERL, 2012, p. 35, grifos do autor).

A síntese dessas ideias, das interconexões entre Filosofia, Lógica e Matemática é encontrada na doutrina das multiplicidades, metaforicamente tratada por Husserl como a "flor mais alta da matemática moderna" (HUSSERL, 2014, p. 185). O termo multiplicidade é empregado, ainda, na obra husserliana, além do sentido matemático, com distintos significados, por exemplo, múltiplos, diversos entre outros. Contudo, interessa-nos o sentido filosófico-matemático do termo, tal como definido na obra *Ideias (*2006) como "*multiplicidade 'definida' ou multiplicidade 'matemática, no sentido forte da palavra'*" (HUSSERL, 2006, p. 157, grifos do autor). Esta multiplicidade caracteriza-se por:

> um *número finito de conceitos e proposições*, a serem extraídos respectivamente da essência de cada domínio, [que] *determina completa e unicamente o conjunto de todas as configurações possíveis do domínio no modo da necessidade analítica pura*, de maneira, portanto, que *por princípio nada mais resta em aberto* nele. (...) tal multiplicidade tem a propriedade distintiva de ser "*definível de maneira matematicamente exaustiva*". A "definição" tem a ver com o sistema dos conceitos axiomáticos e axiomas, e o "matematicamente exaustivo", com o fato de as afirmações definidoras implicarem o máximo prejulgamento concebível em relação à multiplicidade – nada mais permanece indeterminado. (HUSSERL, 2006, p. 157, grifos do autor).

A multiplicidade definida é munida de um processo lógico do qual se destaca a finitude dos conceitos e proposições de onde se depreendem todas as possíveis leis inerentes a esses sistemas. O conceito de multiplicidade definida associa-se ao de ciências dedutivas, cujas leis são consequências dos axiomas e, a partir deles, todas as possibilidades de verdades são derivadas. Para ilustrar esse processo, Husserl serve-se frequentemente da Geometria: sistema que transcende a primeira axiomatização euclidiana do espaço tridimensional, o qual se torna um caso específico de multiplicidade, e comporta "'multiplicidades' *n*-dimensionais" (HUSSERL, 1962, p. 97), como a que citamos nesta seção (a exemplo dos espaços Riemannianos), geradas a partir da fecundidade, por assim dizer, das formas axiomáticas e de suas combinações lógico-matemáticas. Disto decorre que "os axiomas geométricos explicam, ou apreendem como leis fundamentais a totalidade dos fatos espaciais; por intermédio destas leis toda a verdade geral acerca do espaço (...) sofre uma redução evidente aos seus fundamentos explicativos últimos" (HUSSERL, 2014, p. 153).

Uma Multiplicidade compreende, portanto, um domínio de conhecimento possível, cujos objetos são determinados unicamente por "*certos* enlaces, que estão submetidos a *certas* leis fundamentais" (HUSSERL, 2014, p. 186). São, portanto, os axiomas e os possíveis enlaces que constituem os objetos os quais "[q]uanto à sua matéria, (...) permanecem inteiramente indeterminados" (HUSSERL, 2014, p. 186).

Apenas as formas das leis e os enlaces, próprios de um domínio ou esfera de conhecimento, determinam a teoria ou a forma de teoria que rege esse domínio, os objetos pertencentes a essa esfera permanecem inteiramente indeterminados. Tal indeterminação não quer dizer impossibilidade de determinação, quer dizer apenas que os objetos estão exaustivamente existentes como potência de ser já nos axiomas, não sendo necessário um trabalho de catalogá-los, tal como, por exemplo, é parte do método das ciências biológicas. A Geometria, conforme citamos, em seu fazer teórico, procede de outro modo, não cataloga as figuras, uma vez que todas elas decorrem dos axiomas, portanto estão neles como possibilidades, ainda que indeterminadas e são objetos ideias porque sobre eles pode-se atribuir predicados verdadeiros, conforme já explicamos na subseção anterior. Assim também a Álgebra e a forma de pensar a ela inerente, conforme mencionado por Husserl e citado nos parágrafos anteriores deste trabalho, tem essa natureza e possibilita que "na teoria da multiplicidade, o sinal +, por exemplo, não é o sinal de adição aritmética, mas uma conexão em geral, para a qual são válidas leis da forma '$a + b = b + a$' etc" (HUSSERL, 1962, p. 94, tradução nossa)[203]. Do mesmo modo, os objetos mentais de uma tal teoria "tornam possíveis estas 'operações' e outras que se possa demonstrar que são

[203] *[e]n la teoría de la multiplicidad, el signo +, por ejemplo, no es el signo de la adición aritmética, sino una conexión en general, para la que son válidas leyes de la forma 'a + b = b + a', etcétera.*

compatíveis com elas" (HUSSERL, 1962, p. 94-95, tradução nossa)[204]. Para aprofundar essa característica da Álgebra de tratar, em suas teorias, de objetos gerais ou, em termos husserlianos, do algo em geral, objetos definidos apenas por sua axiomática, característica própria das multiplicidades, traçaremos um breve percurso evolutivo da Álgebra rumo à formulação de objetos ideais.

Os conhecimentos desenvolvidos pela Matemática em suas grandes áreas como as Geometrias, a Aritmética e a Álgebra são expressos por meio de linguagens que desvelam os modos de operar e de pensar desses ramos dessa ciência eidética. No entanto, entre todas as áreas da Matemática, a que parece ter desenvolvido mais especificamente o que poderia ser chamado de uma linguagem própria e que, em certo sentido, contribui para a expressão das outras áreas da Matemática é a Álgebra. Assim, faremos considerações iniciais a respeito do pensamento e da linguagem algébrica num percurso investigativo que nos permitirá compreender a Álgebra como uma multiplicidade.

## 6.3 Fases do desenvolvimento da linguagem algébrica e suas relações com o desenvolvimento da própria Álgebra

Ao falarmos de uma linguagem, quer algébrica ou não, é preciso esclarecer que não se deve confundir expressão com aquilo que é expressado, mas que é por meio da expressão que o mencionado é exposto, uma vez que há um entrelaçamento entre pensamento e linguagem que permite investigá-lo por meio de sua expressão, os "pensamentos expressados" (HUSSERL, 1962, p. 22, tradução nossa)[205]. Compreendemos, a partir das considerações do fenomenólogo, que o pensamento não se restringe à sua forma de expressão, uma vez que "o homem não 'expressa' verdadeiramente na linguagem toda a sua vida anímica, nem a pode expressar" (HUSSERL, 1962, p. 25, tradução nossa)[206]. A expressão estabelece, portanto, uma possibilidade de compreender os "pensamentos pensados no pensar (...) [isto porque, como] formações do espírito, admitem uma corporalização física; Neste caso, mediante os signos sensíveis da linguagem; adquirem uma existência espacial

[204] *tornan posibles estas 'operaciones' y otras que pueda demostrarse que son compatibles con ellas,*
[205] *pensamientos expresados.*
[206] *El hombre no 'expresa' verdaderamente en el lenguaje toda su vida anímica, ni puede expresarla.*

secundária (a que corresponde à expressão oral ou escrita).” (HUSSERL, 1962, p. 163, tradução nossa)[207]. Vale dizer, a linguagem algébrica, como toda linguagem, exprime algo para além dela ou através dela, portanto refletir criticamente sobre o pensar algébrico implica ir além do signo, ir àquilo que é significado e é sob esta perspectiva que a trataremos nesta subseção.

Nessa reflexão filosófica sobre o pensar, o entrelaçamento entre pensamento e linguagem não significa, conforme enfatizamos, que ambos são equivalentes. Levando em consideração essa distinção, na obra *LFLT* (1962), Husserl investiga as origens da Lógica buscando que sentidos e significados traz o termo *logos*, buscando o que se mostra através dele. Nesse movimento, identifica dois grupos de significados. No primeiro grupo, *logos* é entendido como a expressão, a palavra; o conteúdo da expressão; e o próprio ato espiritual de expressar. No segundo grupo, aquele em que entra em jogo o interesse científico, intervém no significado “a ideia de uma *norma racional* (...) *logos* quer dizer: ora a mesma *razão* enquanto faculdade, ora o pensar racional”[208] (HUSSERL, 1962, p. 21, grifos do autor).

O objetivo do filósofo alemão é compreender a abrangência do que se denomina atos racionais. Porém, antes de considerar especificamente essa racionalidade, toma por tema o “pensamento *anterior* a qualquer distinção entre racional e irracional” (HUSSERL, 1962, p. 22, grifo do autor)[209], distinção esta relativa ao segundo grupo de significações do *logos*. Esse pensar em sentido mais amplo não se aparta totalmente, contudo, do primeiro grupo de significações da palavra *logos*, uma vez que “o pensar humano normalmente formula-se verbalmente, e todas as atividades da razão estão ligadas quase por inteiro à locução” (HUSSERL, 1962, p. 22)[210]. Soma-se a essas considerações o fato de que a atividade crítica e a intersubjetividade têm como resultados expressões, de modo que não lidamos com “meros atos de pensar e com meros pensamentos, mas com expressões, com pensamentos expressados” (HUSSERL, 1962, p. 22)[211]. Desse modo, há que se

---

[207] *pensamientos pensados em el pensar (...) [eso es porque como] formaciones del espíritu, admiten una corporalización física; en este caso mediante los signos sensibles del lenguaje adquieren a sí una existencia espacial secundaria (la que corresponde a la expressión oral o escrita).*

[208] *a idea de una norma racional (…) logos quere decir: ora la misma razón encuanto facultad, ora el pensar racional.*

[209] *pensamiento anterior a cualquier distinción entre racional e irracional.*

[210] *el pensar humano por lo normal se formula verbalmente, y todas las actividades de la razón están ligadas casi por entero a la locución.*

[211] *meros actos de pensar y con meros pensamientos, sino con expresiones, con pensamientos expresados.*

considerar as rubricas falar, pensar e pensamento e as correspondentes “faculdades de locução, de pensar em conjunto com a locução e a de referir-se com o pensar a um pensamento” (HUSSERL, 1962, p. 22)[212].

Quanto à análise da faculdade de locução, Husserl considera que a palavra tem sua dimensão acústica, sensível, e sua dimensão ideal: “*a linguagem tem a condição objetiva própria das objetividades do chamado mundo espiritual ou mundo cultural, e não de mera natureza física*” (HUSSERL, 1962, p. 23, grifos do autor)[213]. O caráter lógico da linguagem leva em conta esta dimensão ideal dela: “a palavra mesma, a oração gramatical mesma [que] é uma unidade ideal que não se multiplica em suas mil reproduções” (HUSSERL, 1962, p. 24)[214] e, vale lembrar, conforme argumentamos no início desta seção, que são os predicados verdadeiros atribuídos a um objeto que lhe confere validade de ser e esses predicados são eles mesmos expressados pela linguagem. Neste sentido, só em forma de reprodução, que significa uma individualização, a palavra, que é uma unidade ideal, converte-se em algo real no aqui e no agora. Ela própria, contudo, contínua a ter seu caráter ideal, a ser o polo de convergência, é um dos modos de a intersubjetividade se sustentar na realidade mundana ou sociocultural. Analogamente, as expressões algébricas, as fórmulas algébricas e a axiomática que define as teorias algébricas são unidades ideais que não ganham novas significações cada vez que são reproduzidas, mas apontam para aquilo que através delas se menciona, constituindo aponfanticamente, porque formuladas por meio de juízos, o que se pode chamar, por assim dizer, de ontologias algébricas.

Na análise da linguagem como expressão do pensar, Husserl considera que embora se costume dizer que “na linguagem o homem expressa sua vida anímica” (HUSSERL, 1962, p. 25)[215], não se pode afirmar isso a menos que se tome o termo “expressar” sem a devida clarificação. Quando o sujeito enuncia algo, “a intenção prática de quem fala não está dirigida, em última instância, às meras palavras, mas ‘através das palavras’ à sua significação” (HUSSERL, 1962, p. 25)[216]. As palavras são

---

[212] *la facultad de locución, la de pensar de consuno con la locución y la de referirse con el pensar a un pensamiento.*

[213] *el lenguaje tiene la condición objetiva propia de las objetividades del llamado mundo espiritual o mundo cultural, y no de la mera naturaleza física.*

[214] *La palabra misma, la oración gramatical misma es una unidad ideal que no se multiplica en sus mil reproducciones.*

[215] *En el lenguaje expresa el hombre su vida anímica.*

[216] *La intención práctica del quien abla no está dirigida, en último término, a las meras palabras, sino “al través de las palabras” a su significación.*

elos para as significações, para o mencionado, ou seja, "à *unidade da locução* corresponde uma *unidade da menção*" (HUSSERL, 1962, p. 25, grifos do autor)[217], aquela unidade ideal. Assim "ao falar, efetuamos continuamente um ato de menção interior que se funde com as palavras e de certo modo as anima" (HUSSERL, 1962, p. 25)[218], dá sentido a elas. Essas mesmas considerações referentes às palavras podem ser estendidas à linguagem algébrica, uma vez que suas expressões constituem elos entre o mencionar e o mencionado, ou seja, a unidade da menção. Disso decorre que o entendimento da Álgebra como um mero jogo simbólico efetuado sob regras específicas a reduz a uma técnica, não permitindo que o sujeito do conhecimento vá além dos símbolos, nem que sejam abertas possibilidades de compreensão dos objetos algébricos em sua generalidade. Dessas considerações resulta um conceito primeiro e amplo de pensar, que é o de ser aquele ato "que abarque todas as vivências anímicas de que consiste o mencionar (...) e nesse *mencionar* se constitui para o sujeito que fala (...) a *menção*, a *significação*, o sentido que se expressa na locução" (HUSSERL, 1962, p. 26, grifos do autor e tradução nossa)[219] . Para Husserl, "[a]s significações formam (...) uma classe de *conceitos no* sentido de 'objetos gerais'" (HUSSERL, 2012a, p. 84, grifos do autor). Tendo em vista esses conceitos,

> *pensar* designa qualquer vivência que, ao falar, forme parte da função capital da expressão (precisamente a função de expressar *algo*); quer dizer, qualquer vivência em que se constitua conscientemente o sentido que deva expressar-se; e quando o sentido se expressa, *pensar* designa a significação da expressão, particularmente da locução respectiva. Isso se chama "pensar", quer seja julgar, ou desejar, querer, perguntar, supor. (HUSSERL, 1962, p. 26, grifos do autor e tradução nossa)[220].

Assim uma fórmula expressa algebricamente não é uma mera fórmula ou uma expressão apenas, mas carrega em si um conceito latente a ser compreendido pelo sujeito cognoscente, uma significação e, portanto, um objeto. Existe, logo, uma busca

---

[217] *a la unidad de la locución corresponde una unidad de la mención.*

[218] *Al hablar, efectuamos continuamente un acto de mención interior que se fusiona con las palabras y en cierto modo las anima.*

[219] *que abarque todas las vivencias anímicas de que consiste el mencionar; justamente en ese mencionar se constituye para el sujeto que habla (...) la mención, la significación, el sentido que se expresa en la locución.*

[220] *pensar designa cualquier vivencia que, al hablar, forme parte de la función capital de la expresión (precisamente la función de expresar algo); es decir, cualquier vivencia en la que se constituya conscientemente el sentido que deba expresarse; y cuando el sentido se expresa, pensar designa la significación de la expresión, particularmente de la locución respectiva. Esto se le llama "pensar", así sea juzgar, o desear, querer, preguntar, suponer.*

de correspondência, não uma equivalência entre linguagem e pensamento, que se dá na intencionalidade. A palavra expressada não é o pensamento, mas carrega em si o significado, a menção, as formações mentais como uma unidade de sentido que resultam do pensamento, este “entendido concretamente como intencionalidade (...) em cuja ‘síntese’ se constituem as formações mentais” (HUSSERL, 1962, p. 38, tradução nossa)[221].

O desenvolvimento histórico da Álgebra, de sua linguagem e de seu ensino, permite-nos compreender as teorias algébricas modernas como multiplicidades no sentido husserliano. Essa compreensão pode se dar por meio de um breve panorama histórico, tanto do desenvolvimento quanto das perspectivas de ensino dessa área da Matemática. Fiorentin, Miorim e Miguel (1993, p. 79-90) fazem uma análise comparativa entre as concepções de educação algébrica que se manifestaram ao longo da história do ensino da Matemática, correlacionando-as às mudanças de concepções de Álgebra, bem como de sua linguagem, o que sugere que o desenvolvimento da própria Álgebra é correlato ao desenvolvimento de sua linguagem, ou seja, a expressão e o expresso conformam-se para dar conta dessa dimensão da Álgebra de ser uma multiplicidade, que expressa suas significações, seus objetos ideais, conforme argumentaremos.

Nesse processo de desenvolvimento da Álgebra e de sua linguagem, são identificáveis duas concepções de cunho diacrônico, em que uma não substituiu a outra, antes a segunda passou a coexistir com a primeira. São elas a Álgebra Clássica ou Elementar e a Álgebra Moderna ou Abstrata. Aquela situa o objeto de investigação deste campo da Matemática em um “domínio exclusivo do estudo das equações e das operações clássicas sobre quantidades generalizadas, discretas ou contínuas” (FIORENTIN; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 78). Esta, a Abstrata, por sua vez, está centrada no “estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos, não necessariamente interpretáveis em termos quantitativos, isto é, sobre estruturas matemáticas tais como grupos, anéis, corpos etc.” (FIORENTIN; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 78), conforme também mencionado por Peacock (1830). Compreendemos que estas estruturas matemáticas se constituem como multiplicidades algébricas.

Uma segunda perspectiva do desenvolvimento da Álgebra deu-se a partir do ponto de vista cultural e ou geográfico: “é possível falar de uma ‘álgebra egípcia’, de

---

[221] *entendida concretamente como intencionalidad (...) en cuya 'síntesis' se constituyen las formaciones mentales.*

uma ‘álgebra babilônica’, de uma ‘álgebra grega pré-diofantina’, de uma ‘álgebra diof□ntin□’ (...)” (FIORENTIN; MIORIM; MIGUEL, 1993 p. 79). Os egípcios dispunh□m de técnicas para resolução de equações do primeiro grau e algumas equações particulares do segundo grau (MILES, 2020, p. 5), enquanto os babilônicos manipulavam quaisquer equações do segundo grau com as ferramentas metodológicas de que dispunham. Já os gregos, resolviam esses problemas de modo geométrico. Todos esses métodos não dispunham de notações próprias “nem fórmulas gerais” (MILES, 2020, p. 5). Diophanto (IV d.C) avançou no estudo das equações indeterminadas, aquelas que comportam infinitas soluções. Além disso, inaugurou a Álgebra sincopada, a que ocorreu na transição entre a Álgebra retórica e a simbólica, conforme explicaremos a seguir.

Uma terceira perspectiva, a que mais de perto nos interessa neste estudo, é aquela que correlaciona diretamente três momentos do desenvolvimento da Álgebra à forma de expressão desse conhecimento. O primeiro desses momentos correspondeu à fase retórica ou verbal, em que as operações sobre números e equações eram descritas em linguagem corrente, caracterizada por uma ausência do simbolismo especificamente algébrico. Esta teria sido a Álgebra dos egípcios, dos babilônios e dos gregos pré-diofantinos. O segundo momento foi quando surgiu a Álgebra sincopada: Diophanto usou pela primeira vez uma letra para representar uma incógnita de uma equação. O terceiro momento corresponde à fase simbólica quando a Álgebra finalmente rompeu com o sistema retórico e as suas ideias passaram a ser expressas exclusivamente por meio de outros símbolos que não as palavras da linguagem comum. Compreendemos, em conformidade com Milies (2020, p. 5), que há

> dois fatores que contribuíram fundamentalmente para o desenvolvimento da álgebra: de um lado, a tendência a aperfeiçoar as notações, de modo a permitir tornar o trabalho com as operações (as equações) cada vez mais simples, rápido e o mais geral possível e, por outro lado, a necessidade de introduzir novos conjuntos de números, com o consequente esforço para compreender sua natureza e sua adequada formalização.

Esse desenvolvimento da linguagem, da forma de expressão, possibilitou a abertura intersubjetiva à compreensão das novas menções algébricas antes desconhecidas, isto é, a expressão estabeleceu modos de mencionar os pensamentos por meio da corporalização física adquirida pelos signos sensíveis da linguagem, conforme já destacamos (HUSSERL, 1962, p. 163).

Estamos tratando nesta subseção da linguagem algébrica como expressão, vale dizer, como o que expõe significações, o que comporta os significados cujas constituições dão-se por meio dos atos da consciência a partir do percebido, do compreendido que é, por assim dizer, enformado[222]. Pois bem, esse poder de enformar é o que permite que o pensar seja intersubjetivado. Nesta reflexão, compreendemos uma especificidade da linguagem algébrica: o que ela intersubjetiva não é um mero produto do processo de que participou, como faz, muitas vezes, a linguagem do cotidiano[223] ao intersubjetivar significados, informações enunciadas pelas expressões. Compreendemos que, no caso específico da linguagem algébrica, ela expressa sim esses sentidos, entre eles as multiplicidades, conforme veremos na seção (subseção?) seguinte, mas expressa também o caminho constituinte desse sentido e, como via de mão dupla, conforme tratamos nesta pesquisa, comporta também a possibilidade de o sujeito traçar o percurso da volta à coisa percebida. Dito de outro modo, podemos compreender as expressões algébricas como um meio de vislumbrarmos o objeto, simultaneamente, construído e em construção, bem como tomar parte ativa no ato de construção. Estas reflexões, mais uma vez, remetem-nos às considerações que fizemos neste trabalho sobre o excessivo teor tecnicista que pode ser propiciado por certas concepções da BNCC sobre o pensar algébrico e a associação dele ao pensamento computacional, em certos pontos compreendido no documento pelo seu viés essencialmente algorítmico.

Retomando Milies, todas as dimensões do processo de desenvolvimento algébrico apontadas pelo autor, que poderíamos sintetizar em operação, ampliação e generalização, estão interrelacionadas à expressão das significações desse pensar. Nosso foco de estudo buscará evidenciar a terceira dimensão, aquela em que os objetos da Álgebra se constituem como ontologias formais reguladas por axiomatizações ao modo de uma multiplicidade no sentido husserliano, como objetos ideais[224]. Esses objetos ideais como os *grupos* e os *espaços vetoriais* constituem

---

[222] Recorremos ao neologismo para não confundir com o formalizado que também é um aspecto da linguagem algébrica.
[223] Aqui nos referimos à linguagem comum, não nos referimos à linguagem poética, que tem natureza própria.
[224] Sobre o sentido de objetividade ideal, remetemos o leitor às páginas 176, 181 e 202 deste trabalho.

exemplos das significações algébricas desveladas pela sua linguagem. Em seguida, trataremos desses objetos.

## 6.4. Teoria dos Grupos: um caso de multiplicidade algébrica

Nesta subseção, examinaremos a Teoria dos *Grupos* e justificaremos nossa compreensão desses objetos do pensar como um exemplo de multiplicidade. Para além de um entendimento de como os *grupos* são concebidos pela Álgebra, nossa atenção voltar-se-á para um estudo que busca a compreensão de como o sujeito do conhecimento se dá conta desses objetos em um movimento originado na objetividade dessas formações lógicas puras, constituídas pela ontologia e pela apofântica, e que culmina nos modos de consciência dessas formações. Tratar-se-á, portanto, de alcançar uma clareza, "uma visão intelectiva sobre os modos de conhecimento que entram em jogo com a consumação e as aplicações idealmente possíveis destas proposições" (HUSSERL, 2012a, p. 1), que no caso presente, são as proposições que elucidam a noção de *grupo* e que, como veremos, entre suas aplicações idealmente possíveis, está a unificação da Geometria, conforme compreendida por Felix Klein (1893). Para tanto, partiremos da análise da definição de *grupos*, extraída de Gonçalves (2009, p. 119), já apresentada na seção 4 deste trabalho, "A Álgebra como uma tarefa educacional", e recuperada aqui para facilitar a leitura.

*Definição (3)*: Seja *G* um conjunto não vazio onde está definida uma operação entre pares de *G*, denotada por,

$$*: G \times G \to G$$
$$(x,\ y) \to x * y.$$

Dizemos que o par $(G,*)$ é um *grupo* se são válidas as seguintes propriedades:

$$G_1.\ \ a * (b * c) = (a * b) * c,\ \ \forall\, a,\ b,\ c \in G$$
$$G_2.\ \ \exists\ e\ G \text{ tal que } a * e = e * a,\ \ \forall\, a \in G$$
$$G_3.\ \forall\, a \in G,\ \exists\, b \in G \text{ tal que } a * b = b * a = e.$$

A propriedade $G_1$ é a associatividade da operação $*$. O elemento $e$ em $G_2$ é o único elemento neutro da operação $*$. Já o elemento $b$ em $G_3$ é o inverso de $a$ relativo a essa operação.

Assim definido, o objeto do pensar aqui denominado *grupo* é concebido como uma "generalidade indeterminada" (HUSSERL, 1962, p. 98, tradução nossa)[225] e compreende "a *ideia da forma de uma esfera infinita de objetos* que tem a *unidade de uma definição teórica*" (HUSSERL, 1962, p. 99, grifos do autor e tradução nossa)[226], isto é, o *grupo* constitui aquela multiplicidade definida ou multiplicidade matemática no sentido forte da palavra, tal como em Husserl (2006, p. 157), conforme citado neste trabalho, uma vez que a partir de um número finito de proposições, define-se de maneira matematicamente exaustiva, ou seja, no sentido de que todos os modos de aparecer desses objetos estão dados já nos axiomas que definem um *grupo*. Não é, portanto, um conjunto específico ou uma operação particular que participam da definição de *grupo*, mas qualquer conjunto munido de uma operação qualquer que satisfaça as propriedades anteriormente enunciadas.

Essa é uma potencialidade da Álgebra, de uma "Matemática formal do nível mais alto de multiplicidade" (HUSSERL, 1962, p. 102, tradução nossa)[227] que tem suas raízes nos níveis inferiores da Lógica, a apofântica e a ontologia, conforme explicamos nesta seção. Essa Matemática "nunca pode prescindir das categorias lógicas específicas (categorias de significado e categorias objetivas) nem dos verdadeiros axiomas que se referem a elas" (HUSSERL, 1962, p. 102, tradução nossa)[228]. Na *Definição (3)* de *grupo*, conforme enunciada, quando é dito que o "par $(G, *)$ é um *grupo* se são válidas as seguintes propriedades", ao mesmo tempo em que são anunciadas as propriedades, ou seja, em que há uma predicação, um juízo sobre o par $(G, *)$, constitui-se o objeto *grupo*, entrelaçando-se assim as esferas apofânticas e ontológicas da Lógica na constituição dessa multiplicidade algébrica.

A importância desse fazer da Álgebra, que não trata apenas de uma Matemática quantitativa, mas para além dela, compreende também uma Matemática qualitativa, em que os objetos são indeterminados quanto a sua matéria e são definidos "exclusivamente pela *forma* das conexões que lhes são atribuídas" (HUSSERL, 1962, p. 94, grifos do autor e tradução nossa)[229], reside em possibilitar a ampliação de seu alcance teórico, uma vez que "desenvolvida efetivamente na teoria

[225] *generalidad indeterminada.*
[226] *la idea de la forma de una esfera infinita de objetos que tiene la unidad de una definición teórica*
[227] *matemática formal del nivel superior de multiplicidad.*
[228] *nunca puede prescindir de las categorías lógicas específicas (categorías significativas y categorías objetivas) ni de los verdaderos axiomas que a ellas se refieren.*
[229] *exclusivamente por la forma de las conexiones a ellos adscritas.*

da multiplicidade a teoria formal correspondente, está providenciado todo o trabalho teórico dedutivo necessário para construir todas as teorias efetivas da mesma forma." (HUSSERL, 1962, p. 95, tradução nossa)[230]. A exemplo da Teoria dos *Grupos*, uma vez identificado que um par composto de um conjunto e uma operação compõe um *grupo*, já se sabe, previamente, por meio do entendimento das propriedades que o definem, o modo de operar com os elementos do respectivo conjunto. Budden (1972) ao relatar sobre uma pergunta formulada na Conferência Anual da *British Mathematical Association*, em 1966, na Universidade Keele, na Inglaterra, a respeito da importância do aprendizado sobre a Teoria dos *Grupos*, sintetizou as respostas dadas pelos especialistas:

> (1) porque grupos surgem por toda parte na matemática, nas mais diversas e inesperadas situações. Uma grande variedade de situações (não apenas matemáticas) pode ser descrita e problemas resolvidos por métodos teóricos de grupo.
> (2) Uma vez que um sistema é reconhecido por apresentar estrutura de grupo, então quaisquer regras que tenham sido estabelecidas para grupos (...) podem ser aplicadas a esse sistema. (BUDDEN, 1972, p. 89, tradução nossa)[231].

A segunda resposta pode ser vista como manifestação clara de uma das características da multiplicidade, aquela que constitui vínculos legais para teorias não explicitamente relacionadas, e que nos permite, conforme citação anterior de Husserl (1962, p. 94), a partir da identificação de uma teoria formal como uma multiplicidade, concluir que todo o trabalho teórico dedutivo dessa teoria estará desenvolvido. Na esteira dessa argumentação, ao tratar também de *grupos*, Costa (1971, p. 293) diz:

> No desenvolvimento moderno da matemática, a teoria dos grupos assumiu uma importância comparável à da teoria dos conjuntos. A noção de grupo (...) tornou-se fundamental em teoria dos números, em álgebra superior, em geometria, constituindo um vínculo entre domínios aparentemente muito distantes uns dos outros.

Esse vínculo entre domínios significa que a noção de *grupos* compreende diferentes objetos matemáticos, que seus objetos são generalidades determináveis pela forma axiomática da Teoria dos *Grupos*. Essa forma axiomática é constituída por

---

[230] *una vez desarrollada efectivamente en la teoría de la multiplicidad la correspondiente teoría formal, está despachado todo el trabajo teórico deductivo necesario para construir todas las teorías efectivas de la misma forma.*

[231] *(I) because groups crop up everywhere in mathematics, in the most diverse and unexpected situations. A wide variety of (not only mathematicalt) situations can be described, and problems solved, by group-theoretical methods.*

*(2) Once a system is recognised to exhibit group structure, then any rules that have been established for groups (e.g. the cancellation law - see below) can be applied to that system.*

compreensões que decorrem das relações noético-noemáticas, dos atos intencionais dos sujeitos cognoscentes, cujos correlatos são os sentidos, os quais, por sua vez, são ideais: “[t]odo noema tem um ‘conteúdo’, isto é, seu ‘sentido’, e se refere, por meio dele, a ‘seu’ *objeto”* (HUSSERL, 2006, p. 287, grifo do autor), dito de outro modo, “*em todo noema* se delimita manifestamente *um conteúdo* preciso” (HUSSERL, 2006, p. 290, grifos do autor), um “‘objeto efetivo’ (…) [que é] a designação para certos nexos racionais considerados de maneira eidética” (HUSSERL, 2006, p. 321). A intuição no pensar matemático, que leva à compreensão e formulação das leis axiomáticas, tal como as estabelecidas para a Teoria dos *Grupos*, é investigada pela Fenomenologia, uma vez que por ela podemos compreender “a construção do julgar e do juízo, o modo como a estrutura do noema é determinante para o conhecimento, como a ‘proposição’ aí desempenha seu papel particular e também a diversa possibilidade de seu ‘preenchimento’ em termos de conhecimento” (HUSSERL, 2006, p. 326). A constituição fenomenológica dos juízos foi tratada na seção 1 deste trabalho, “Fenomenologia: uma visão do conhecimento inspirada na Matemática”.

Os axiomas que definem um *grupo* não delimitam, portanto, um objeto específico, mas uma forma de objetos que satisfazem esses axiomas, permitindo que sejam evidenciadas relações entre objetos aparentemente desconexos, conforme podem ser compreendidos pelos exemplos a seguir. Alertamos o leitor que esses exemplos serão apresentados sem a pretensão de substituírem os textos matemáticos que abordam este tema com o rigor característico dessa ciência, a exemplo de Costa (1971), Budden (1972), Gonçalves (2009), Lang (2008) e outros em que nos fundamentamos na compreensão da Álgebra como uma multiplicidade husserliana, uma abordagem filosófica dessa área da Matemática.

*Exemplo (3)* – Consideremos o Conjunto unitário $G = \{1\}$ e a operação $*$ tomada como a multiplicação usual. Assim constituído, o par $(G,*)$ é um *grupo*, uma vez que satisfaz as propriedades da *Definição (3)*.

*Exemplo (4)* – Consideremos um caso que expressa a relação entre a Teoria dos *Grupos* e as simetrias. Existem duas transformações de simetria da face humana, uma delas é a identidade, que denotaremos por *I* e não produz nenhuma alteração; a segunda é a reflexão em torno de um plano vertical, uma simetria bilateral aproximada, que denotaremos por *r.* Deste modo, podemos considerar o conjunto $S = \{I,\ r\}$ e a operação $*$ que chamaremos de “seguido de”. Essa operação é definida tal como exemplificado a seguir: $I * r$ significa que será aplicada primeiro a reflexão e depois a identidade, isto é, a ordem da operação determina que o primeiro símbolo à direita será a primeira transformação a ser aplicada e a outra, expressa pelo símbolo à esquerda, será a segunda transformação. Assim constituído, o par $(S, \ *)$ é um *grupo*, uma vez que satisfaz as propriedades da *Definição (3)*. Na tabela 3 a seguir apresentaremos os resultados das operações entre as transformações. Este exemplo pode ser estudado em Livio (2011).

| $*$ | $I$ | $r$ |
|---|---|---|
| $I$ | $I$ | $r$ |
| $r$ | $r$ | $I$ |

Tabela 3. Tabela de operações do *Grupo* de simetrias da face humana

A partir da Tabela 3, podemos verificar que todas as propriedades da *Definição (3)* são satisfeitas. Vejamos:

- A operação $*$ é tal que $S * S \to S$, isto é, pela tabela pode-se verificar que a combinação de duas transformações de simetria quaisquer pela operação "seguido de" é também uma transformação de simetria. Assim o conjunto $S$ é fechado para a operação $*$;
- Se aplicarmos três operações seguidas, por exemplo, $I * r * I$, não importará onde os parênteses forem alocados, quer seja nas duas primeiras ou nas duas últimas transformações, $(I * r) * I \ = \ I * (r * I)$, produzirão o mesmo resultado satisfazendo, assim, a associatividade;
- A identidade $I$ é uma transformação de simetria que não acarreta alteração alguma, logo $I * r = r * I = r$ e $I * I = I$. Assim, a operação $I$ é o elemento neutro;
- A tabela mostra que $r * r = I$ e que $I * I = I$, assim cada uma das transformações é a inversa dela própria, portanto cada transformação tem a sua inversa.

Os *Exemplos (3)* e *(4)*, escolhidos entre as incontáveis possibilidades de pares constituídos por conjunto e operação que se mostram à intuição na forma axiomatizada, tal como a instituída pela Teoria dos *Grupos* (*Definição (3)*), mostram que essa teoria corresponde à noção de multiplicidades a que se refere Husserl, porque sob sua axiomática revelam-se justamente as múltiplas possibilidades em sua objetividade formal. O *Exemplo (3)* corresponde a um conjunto numérico unitário e a uma operação bem conhecida da Aritmética, que é a multiplicação usual; já o *Exemplo (4)* considera um conjunto cujos elementos são simetrias e uma operação que em nada se assemelha a uma operação aritmética comum. Temos, portanto, o caso das multiplicidades de um mesmo objeto que se manifesta quantitativamente, no primeiro caso, e qualitativamente, no segundo, regido pela mesma Teoria.

Além disso, uma outra característica da multiplicidade concernente a essa teoria algébrica, permitiu que fosse evidenciado o isomorfismo de domínios aparentemente sem nenhuma conexão. Examinemos os exemplos a seguir:

*Exemplo (5)* **–** Seja $C = \{-1, 1\}$ e a operação $*$ tomada como a multiplicação usual. Assim constituído, o par $(C, *)$ é um *grupo*. A tabela de resultados da operação de multiplicação para este *grupo* é a 4:

| $*$ | 1 | -1 |
|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 |
| -1 | -1 | 1 |

Tabela 4. Tabela de operações do *Grupo* formado pelo par $(\boldsymbol{C},*)$ do *Exemplo (5)*

Se compararmos as Tabelas 3 e 4, verificaremos que suas estruturas são idênticas, basta substituir o número 1 por $I$ e –1 por $r$ , o que evidencia o isomorfismo entre esses dois *grupos*.

As substituições de variáveis em uma transformação algébrica também podem ser estudadas do ponto de vista da Teoria dos *Grupos*. Consideremos, como exemplo, inicialmente, dois sistemas de $n$ variáveis descritos a seguir[232]:

$$x_1, x_{2,} \dots, x_n; \text{ e } y_1, y_{2,} \dots, y_n .$$

Consideremos, ainda, que as variáveis do segundo sistema são expressas em função das variáveis do primeiro sistema por um conjunto $S$ de $n$ fórmulas. Neste caso, temos que o segundo sistema é um rearrando do primeiro. Quando formos levados a passar das variáveis do primeiro sistema para as do segundo diremos que realizamos uma *transformação* ou uma *substituição* definida pelas fórmulas $S$. Quando passamos das variáveis do segundo sistema para as do primeiro, teremos *a substituição inversa*.

Consideremos agora $(T)$ uma substituição das variáveis do segundo sistema por outras constituindo um terceiro sistema. Dizemos que a substituição mediante a qual se passa das primeiras variáveis a estas últimas é o produto representado

[232] Para mais detalhes sobre esta exposição, consultar Costa (1971, p. 293-301).

simbolicamente por $(ST)$. Isto posto, quando $S$ e $T$ são idênticas, tem-se que $S * T = S^2$, além disso, na esteira da analogia com a multiplicação usual, pode-se definir uma potência de $S$ , $S^n$, com $n \in Z$ , de tal modo que $S^{-1}$ corresponda à substituição inversa. “Quando todas as potências e todos os produtos das substituições assim definidas fazem (...) parte do (...) [mesmo] conjunto, este constitui um *grupo de substituições*.” (COSTA, 1971, p. 298). A operação que representa as substituições, “obedece a algumas das leis da multiplicação (...), [m]as a analogia é incompleta, pois o produto de duas substituições não é em geral comutativo” (COSTA, 1971, p. 298). Sendo assim, caracterizaremos a substituição $(ST)$ como sendo o produto entre as substituições $S$ e $T$.

A percepção de que as transformações compõem um *grupo*, o *grupo* de transformações, exerceu um papel importante no desenvolvimento das teorias geométricas que ocorreram no século XIX. Dentre os matemáticos que se dedicaram a esse tema, Felix Klein (1849-1925) notou que a Geometria, que é unitária em sua substância, estava desenvolvendo-se, no entanto, em uma série de disciplinas quase separadas, ou seja, a Geometria “no rápido desenvolvimento que teve nos últimos tempos, fragmentou-se muito em uma série de disciplinas quase separadas, que continuam a se formar de modo bastante independente uma da outra”[233] (KLEIN, 1893, p. 216, tradução nossa). Klein compreendeu que a unidade dessas disciplinas se fundamentava, justamente, na noção de *grupos*. Nesse sentido, o matemático alemão afirmou que:

> A combinação de qualquer número de transformações do espaço é sempre equivalente a uma única transformação. Se, agora, um determinado sistema de transformações tem a propriedade de que qualquer transformação obtida pela combinação de quaisquer transformações do sistema [ainda pertencer] (...) a esse sistema, ele será chamado de grupo de transformações[234]. (KLEIN, 1893, p. 217, tradução nossa).

---

[233] *...geometry, which is after all one in substance, has been only too much broken up in the course of its recent rapid development into a series of almost distinct theories, which are advancing in comparative independence of each Other (KLEIN, 1893, p. 216).*

[234] *The combination of any number of transformations of space is always equivalent to a single transformation. If now a given system of transformations has the property that any transformation obtained by combining any transformations of the system belongs to that system, it shall be called a group of transformations.*

Um exemplo de *grupo* de transformações, que compõe um possível movimento no espaço, é o *grupo* das *translações.* Este exemplo será desenvolvido a seguir para uma translação no plano:

*Exemplo (6)* **–** Consideremos a substituição que leva um ponto $P(x, y)$ ao ponto $P'(x', y')$, em que as coordenadas $(x', y')$ são dadas por:

$$x' = x + a \text{ e } y' = y + b.$$

Assim definido, temos um caso pertencente ao *grupo* dos *deslocamentos*, o *grupo* das *translações*, que preserva a forma da figura, as distâncias entre seus pontos e seus ângulos. Especificamente, vamos considerar os vértices de um quadrado dados pelos pontos $P_1(1{,}1)$, $P_2(3{,}1)$, $P_3(3{,}3)$ e $P_4(1{,}3)$. Se considerarmos $a = 2$ e $b = 3$ , a transformação que leva um ponto $P$ ao ponto $P'$, definida neste exemplo, quando aplicada aos vértices originais gera os seguintes vértices do quadrado deslocado: $P_1'(3{,}4)$, $P_2'(5{,}4)$, $P_3'(5{,}6)$ e $P_4'(3{,}6)$. A ilustração das configurações inicial e final é apresentada na Figura 3.

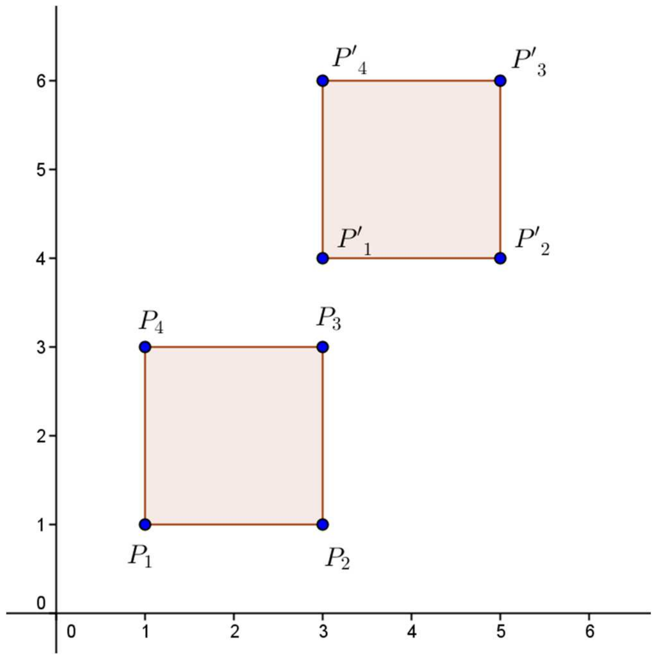



Figura 3. Ilustração da translação definida no *Exemplo (6)*

Essa transformação particular, que deixa invariante a forma da figura, a que corresponde ao “grupo dos deslocamentos, (...) define a *geometria* métrica, onde intervém a noção de medida” (COSTA, 1971, p. 301, grifos do autor). Poderíamos, ainda, pensar na Geometria Afim, a qual “substitui um segmento retilíneo por outro segmento retilíneo, mas em geral que altera o seu comprimento” (COSTA, 1971, p.

301) ou ainda na Geometria Projetiva que "só surgiu quando se habituou a considerar a figura original como essencialmente idêntica a todas as que dela poderiam ser derivadas projetivamente, e a expressar as propriedades que são transferidas durante a projeção"[235] (KLEIN, 1893, p. 221), essas propriedades transferidas são as invariantes do *grupo* de transformações a elas correspondentes, como por exemplo, a proporção entre os segmentos. Desse modo, podemos afirmar com Costa (1971, p. 301) que "o desenvolvimento de uma geometria parcial se reduz ao estudo puramente algébrico dos invariantes de um *grupo* de transformações". A unidade encontrada, portanto, por Klein entre as diversas geometrias de sua época foi dada pela Teoria dos *Grupos*, que é uma teoria essencialmente algébrica. Essas disciplinas que, conforme Kein (1893, p. 216), eram "quase separadas", foram articuladas pelas multiplicidades inerentes à Teoria dos *Grupos*, que abriga em sua axiomática, todas as possibilidades de aparição dessas geometrias. Essas multiplicidades geram a verdadeira objetividade, aquele objeto único, compreendido em seu sentido mais amplo, que se "'constitui' em certos nexos de consciência envolvendo uma unidade que pode ser evidenciada, uma vez que implicam por essência a consciência de um *X* idêntico" (HUSSERL, 2006, p. 301, grifos do autor).

Nessa objetividade manifesta-se uma forma de ser da Álgebra, compreendida aqui pela sua linguagem. Trata-se de um modo de ser que se dá segundo uma multiplicidade husserliana, pois em suas teorias, os objetos não são determinados, mas determináveis pela forma de conexões para eles descritas, pela sua axiomática. Essas formas de conexões, por sua vez, dão-se pela explicação e apreensão conceitual dessa objetividade, constituída por um conjunto fechado de predicados os quais determinam, aprioristicamente, todas as possibilidades para aquele domínio específico de conhecimento. Em síntese, referimo-nos a uma forma axiomática que determina o conteúdo do núcleo de um noema, um "*puro X por abstração de todos os predicados* (...) [um] objeto *único* [a] que subordinamos diversos modos de consciência, atos ou noemas de atos" (HUSSERL, 2006, p. 291, grifos do autor).

Se, por um lado, as proposições determinam um objeto, por outro, "nós subordinamos a um objeto multiplicidades de 'proposições', isto é, de vividos de certo

[235] *But projective geometry only arose as it became customary to regard the original figure as essentially identical with all those deducible from it by projection, and to enunciate the properties transferred in the process of projection.*

conteúdo noemático, (...) de tal modo que sínteses de identificação se tornam *a priori* possíveis graças a ele, sínteses em virtude das quais o objeto pode e deve estar ali como o mesmo" (HUSSERL, 2006, p. 300). Essas proposições, no caso da Teoria dos *Grupos*, são suas propriedades ou sua axiomática, que se constituiu ou que foi intuída nas investigações de diversos matemáticos, como Évariste Galois (1811-1832), Arthur Cayley (1821-1895) e de outros que se dedicaram ao tema e que compreenderam o modo de ser desse objeto, sua generalidade eidética, sua possibilidade de existência, uma vez que "[a] *todo objeto* '*verdadeiramente existente*' corresponde por princípio (no *a priori* da generalidade eidética incondicionada) a ideia de uma consciência possível, na qual o próprio objeto é apreensível *originariamente* e, além disso, em *perfeita adequação"* (HUSSERL, 2006, p. 316, grifos do autor).

A característica principal de uma multiplicidade matemática, quer seja ela referente à Teoria dos *Grupos* ou a outra estrutura algébrica, é a formalização, uma formação conceitual exata "que de modo algum depende de nosso livre arbítrio e de nossa arte lógica, mas pressupõe, no tocante aos conceitos axiomáticos pretendidos, que precisam ser atestáveis em intuição imediata, *exatidão na própria essência apreendida"* (HUSSERL, 2006, p. 159, grifos do autor). Esta é a objetividade em seu sentido amplo, de que fala Husserl. No caso da Geometria, suas múltiplas aparições que se apresentavam fragmentadas, por meio da Teoria dos *Grupos*, puderam

> ser analisadas e descritas em sua peculiaridade *eidética*, e a *operação que estabelece por leis a correlação entre a coisa determinada que aparece, como unidade, e as diversidades infinitas determinadas das aparições* pode ser vista em toda a sua evidência e despida de todos os seus enigmas. (HUSSERL, 2006, p. 335, grifos do autor).

O pensar algébrico enformado pela linguagem algébrica, notadamente a da Álgebra moderna, desvela, por assim dizer, a ideia mais geral de uma doutrina das multiplicidades que, segundo Husserl (2014, p. 186)

> é a de uma teoria que configura de maneira determinada os tipos essenciais de teorias (e domínios) possíveis, e pesquisa as suas relações legais mútuas. Todas as teorias efetivas são, então, especializações ou singularizações das formas das teorias a elas correspondentes, assim como todos os domínios de conhecimento teoreticamente elaborados são multiplicidades *singulares* (grifo do autor).

Essa aproximação entre a Teoria das Multiplicidades e a Álgebra permite-nos compreender que essa área da Matemática busca constituir não objetos específicos, mas aquelas objetividades ideais que "[n]ão são [objetos] determinados nem diretamente, como singularidades individuais ou específicas, nem indiretamente, pelas suas espécies ou gêneros materiais, mas exclusivamente pela *forma* dos enlaces a eles atribuídos" (HUSSERL, 2014, p. 186, grifo do autor). Esse modo de proceder é próprio da Álgebra moderna que, em suas estruturas, compreende justamente essas generalidades[236].

Nesta seção, ao iniciarmos com a questão da Lógica, a apofântica e a ontologia, compreendemos que os objetos de uma dada ciência eidética são constituídos não pela observação e experimentação, ou seja, pela empiria, mas pela Lógica pura, uma ciência teorética. Esta propicia a constituição das multiplicidades por meio das formas axiomáticas, as quais trazem à existência e dão validade àquilo que *a priori* existe e pode ser intuído e que, por sua vez, significa o que é definido logicamente, em seus mínimos pormenores, àquela maneira da Lógica Pura em que se articulam as ontologias formais e a apofântica na constituição das leis, proposições e relações entre os objetos formais, assim como é também o modo de ser da Álgebra moderna na constituição de suas objetividades.

[236] Para uma investigação mais detalhada sobre as estruturas algébricas, remetemos o leitor ao trabalho de Kluth (2005).

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais, revisitaremos os principais pontos da investigação que fizemos orientados pela pergunta que norteou o presente texto, para expor as ideias e os argumentos que articulamos sobre três pontos principais: nossa compreensão tanto da Álgebra tradicional quanto da moderna, em suas ideias nucleares e como elas se manifestam no fazer matemático, olhado tanto no âmbito da Matemática, entendida como ciência constituída e produzida na civilização do mundo ocidental, como no fazer humano; nossas compreensões do ensino e da aprendizagem da Álgebra no ensino fundamental; nossas compreensões do ensino e da aprendizagem da Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática e de bacharéis em Matemática.

Esta pesquisa foi norteada pela interrogação: *Como a Álgebra se desvela em seus modos de ser*? Este estudo foi conduzido pelos modos de proceder da Filosofia da Educação Matemática e, como esclarecemos nas justificativas, foi conduzida segundo a visão fenomenológica sobre realidade e conhecimento, por ser aquela que nos pareceu mais apropriada para uma análise em que se pode divisar o nosso objeto à medida que ele se mostra filosoficamente, historicamente, culturalmente e, inclusive, sob a perspectiva da dicotomia entre a mera técnica e a técnica como produto de reflexão acerca de como se apresentam os objetos do conhecimento no mundo-da-vida. Estas duas dimensões a respeito da técnica foram compreendidas tanto pelas reflexões husserlianas sobre a crise das ciências europeias quanto pelas reflexões dele sobre a necessidade de uma volta às origens das elaborações dos conceitos para fundamentar os processos de conhecimento.

Sendo assim, estas considerações finais também são reflexo, na forma e no conteúdo, da nossa busca de uma atitude que procura dar conta de diversas formas em que se desvelou a Álgebra em seus modos de ser. Por isso, optamos por construir estas considerações finais em dois momentos. Primeiramente, apresentamos uma retomada sequencial, diacrônica, das seções buscando sintetizar as ideias de cada uma delas, ou seja, faremos uma revisitação a cada unidade do trabalho enfatizando, cronologicamente, o caminho trilhado e, em segundo lugar, buscamos explorar algumas das interconexões entre essas unidades e, na medida do possível, oferecer aos nossos leitores reflexões que possam ampliá-las já que, parafraseando Michel de

Mointaigne, a palavra é metade de quem escreve, metade de quem lê e a resposta de um problema de pesquisa é sempre um campo aberto a novas investigações.

Desse modo, a seção 1, “Fenomenologia: uma visão do conhecimento inspirada na Matemática”, permitiu-nos fazer reflexões preliminares que fundamentaram toda a pesquisa. A opção pelo viés fenomenológico decorreu do entendimento de que a Fenomenologia propõe uma abordagem filosófica que se concentra, entre outras coisas, nas possibilidades da efetuação do conhecimento, afastando-se dos modos de conhecer das ciências naturais. Consoante com nosso tema, foi fundamental destacar o vínculo de Husserl com a Matemática, uma vez que nela o filósofo encontrou o terreno para compreender criticamente o conhecimento. No caso desta pesquisa, em que buscamos compreender os modos de ser da Álgebra, o pendor husserliano para as questões matemáticas constituiu um fator que estreitou os laços entre o método escolhido e o objeto de nossa investigação.

Um dos conceitos que apresentamos, e que buscamos compreender para guiar nossa investigação, foi o da redução fenomenológica, ou seja, o princípio da ausência de pressupostos. Assim, nosso trabalho procurou não fazer afirmações sobre a existência empírica do objeto de estudo, concentrando-se, tanto quanto possível, em compreender a Álgebra como um fenômeno do conhecimento. A descrição fenomenológica busca entender o fenômeno tal como ele se dá na aparição perceptiva, sem pressuposições ou preconceitos. Compreendê-la permitiu-nos abordar a Álgebra em seus diferentes modos de se mostrar. Na seção, foi possível refletir sobre o entrelaçamento entre a Fenomenologia e a Matemática, que permeia a trajetória husserliana. Essa atitude fenomenológica mostrou-se uma via de análise e reflexão, abrindo novas perspectivas para o nosso entendimento sobre os modos de ser da Álgebra, objeto de nossa pesquisa.

A seção 2, “A Fenomenologia no e do contexto da crise das ciências europeias”, teve como função compreender como Edmund Husserl abordou a Álgebra em seus escritos filosóficos, especialmente em seu trabalho "A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental". Nessa obra, ele analisou a evolução das ciências modernas e explorou a relação entre a Matemática, incluindo a Álgebra, e a Filosofia. Uma das principais preocupações do fenomenólogo era o impacto da "tecnicização" na forma como as ciências eram compreendidas e praticadas. Ele argumentou que, na modernidade, as ciências naturais estavam cada vez mais se afastando de suas origens intuitivas, tornando-se excessivamente centradas em símbolos e cálculos abstratos. Isso levou a uma "perda de sentido" e afastou as ciências do mundo-da-vida quotidiana, no qual as experiências se originam. A Álgebra, objeto desta investigação, foi mencionada por Husserl como um sistema simbólico que possibilitou esse processo de tecnicização. Neste sentido, fez ressalvas ao uso não crítico dos símbolos algébricos e alertou que a abordagem exclusivamente algorítmica dos processos algébricos pode levar ao esquecimento dos significados originais dos conceitos matemáticos de que se está lançando mão, ressalvas que justificam a importância de manter uma conexão entre esses conceitos e suas origens na intuição e na experiência humana com a finalidade de compreendê-los criticamente. Dito de outro modo, a ferramenta deve ser a extensão das capacidades humanas e não um modo de inibi-las ou substituí-las. Estas considerações fazem parte de uma das formas de compreender as relações entre a Álgebra e suas especificidades no mundo moderno, já que ela esteve presente tanto nas origens do pensamento científico, ainda que não com esse nome, quanto no desenvolvimento desse pensamento, assumindo um papel central no pensamento matemático, notadamente com a finalidade de expressar, conforme destacamos em nossa pesquisa e explicitamos nestas considerações, as multiplicidades e os objetos matemáticos por excelência, que são os *números*.

Considerando-se esses aspectos, nossa pesquisa encaminhou-nos a refletir sobre um dos modos de ver a Álgebra, que é sua presença no contexto educacional. Expusemos o perigo de uma abordagem puramente simbólica e algorítmica dessa área da Matemática no ensino que, segundo mostramos, está presente nas propostas da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essa análise foi delineada na seção 3. Nela, verificamos que a BNCC, tal como está, prioriza, justamente, uma visão tecnicista e operatória da Álgebra, preocupando-se excessivamente em veicular um discurso que estimula a resolução de problemas práticos por meio de equações e inequações, atitude que pode torná-la uma mera técnica calculatória sem que o aprendiz seja conduzido a refletir sobre o significado dos conceitos matemáticos que subjazem às técnicas. Concluímos também que a associação dos modos de ver a Álgebra ao pensamento computacional por meio da ênfase na identificação de padrões para estabelecer generalizações, propriedades, tão presentes no discurso da BNCC, podem estimular um viés algorítmico passível de restringir a complexidade do pensar algébrico e sua compreensão em múltiplas dimensões; de restringir a compreensão do significado original dos conceitos da Álgebra para além de seus símbolos; de restringir o entendimento dos porquês de sua existência. Em suma, a BNCC não vai além da expressão, ou seja, da roupagem de símbolos, não indicando para além dela, o que está sendo expresso. Ao longo da história, uma atitude contrária a essa evidenciada no discurso das Bases Nacionais, foi a que possibilitou aos matemáticos realizar o processo de simbolização da álgebra e de constituição e produção da própria matemática. Estas reflexões fazem parte de nosso entendimento de como se poderia trabalhar a Álgebra no ensino fundamental. Obviamente, não pensamos em fórmulas, materiais didáticos ou estratégias pontuais para o dia a dia em sala de aula, nem seria o caso dada a orientação filosófico-fenomenológica desta investigação. Além disso, nenhum processo de ensino é permeável a fórmulas rígidas uma vez que a sociedade, assim como os modos de conhecer, são fluidos e dinâmicos. Compreendemos que as linhas gerais do trabalho de ensino e aprendizagem foram traçadas nesta seção e podem ser sintetizadas na realização de um ensino mais reflexivo e menos tecnicista, do qual apresentamos alguns exemplos na seção seguinte.

Conscientes da generalidade da expressão “ensino mais reflexivo e menos tecnicista”, demo-nos conta de ela solicitar explicitação. Assim na seção 4, “A Álgebra como uma tarefa educacional”, estudamos um dos matemáticos próximos do nosso tempo, Freudenthal, tomado como um exemplo de visão crítica acerca do ensino da disciplina, uma vez que ele dialoga com o ensino de Matemática de seu tempo, década de 1970. Ele defendeu que é essencial compreender os elementos que compõem uma fórmula algébrica e sua correlação com a situação em que ela é aplicada criticamente e, para tanto, defendeu que o ensino deveria ir além das abordagens técnicas e valorizar a compreensão da Álgebra em seus aspectos que transcendem a operacionalização. Alguns exemplos de como isso poderia ser feito, sempre lembrando de que não se trata de um manual, mas de perspectivas abertas para os modos de compreender a Álgebra, são apresentados pelo autor ao longo de sua obra. Entre esses modos, ele criticou o mau uso da forma como se compreende a função do *sinal de igualdade* em algumas expressões matemáticas, que podem levar a interpretações equivocadas. A análise bastante detalhada que ele fez das funções desse sinal foi interpretada no contexto de nossa pesquisa como uma prática reflexiva a respeito de um ponto específico da linguagem algébrica, qual seja o uso de um dos sinais, e que pode ser ampliado para outros aspectos desse sistema simbólico. Complementa essa atitude a ênfase que ele deu à importância de despertar nos estudantes a percepção do uso das letras na linguagem algébrica como modo de representar objetos matemáticos, e não como comando para realizar operações, ou seja, as letras estão para aquilo que representam, mas não são aquilo que representam, tampouco aquilo que representam pode ser elidido pela automatização dos processos algorítmos. Além disso, Freudenthal destacou a importância da Álgebra na fundamentação da noção de operação sobre números e sobre outros objetos matemáticos, o que possibilita a generalização de conceitos e a ampliação do universo desses objetos. A Álgebra foi vista por ele como uma área da Matemática que fornece sustentação teórica para conceitos aplicados em outras áreas e como uma ferramenta importante para compreender as operações matemáticas. Todos esses cuidados apontados pelo autor têm como finalidade possibilitar ao educando a compreensão tanto quanto possível fluente da linguagem algébrica, fluência que ele comparou com aquela que é importante para a leitura de textos em língua materna. Ressalta-se aqui a compreensão da leitura, tanto da língua materna como da linguagem algébrica, como uma habilidade que transcende a decodificação de códigos e sinais para tornar-se veículo de nossas ideias que podem ser, desse modo, comunicadas no sentido original do termo, tornadas comum a todos, e que, com isso, são capazes não só de reproduzir, mas também e principalmente de constituir e produzir conhecimentos. Em síntese, encontramos, em Freudenthal, o esboço de um método profícuo para o ensino de Álgebra que se aplicaria também ao desenvolvimento de estratégias para a formação de professores. Desse modo, poderia também ser uma base orientadora para a realização de planos de ensino dessa disciplina para cursos de Licenciatura em Matemática. Assim, os futuros professores poderiam se tornar conscientes a respeito da importância de se compreender os porquês dos símbolos e suas interrelações, mais do que decorar as funções específicas desses símbolos e as regras de operação a que devem se submeter.

Dado que as letras são símbolos, na linguagem algébrica, de objetos matemáticos, dado que a Fenomenologia husserliana se nutriu de uma especial atenção aos números, objetos matemáticos por excelência, na seção 5, “Caminhos para uma dessedimentação da Álgebra: do *Anzahl* para o *Zahl*, um conceito simbólico”, investigamos o desenvolvimento da linguagem algébrica, da sua face retórica à simbólica, entremeando as perspectivas histórica e filosófica para compreender como a Álgebra tornou-se capaz de, desvinculando-se da Geometria e da Aritmética, lidar com objetos matemáticos em geral e mesmo conceber esses objetos por meio, justamente, das especificidades de sua linguagem. Nesse percurso, compreendemos que o objeto matemático primordial a que nos referimos, o número, passou por significativos estágios de concepção. De simples elemento que enumerava ou contava coisas concretas, *Anzahl*, tornou-se um objeto simbólico, *Zahl*. Especial importância neste caminho percorrido pela Álgebra é atribuída ao pensamento grego, cujas especulações foram solo fértil para que Diofanto, já mais próximo da nossa Era do que dos primórdios do pensamento grego, concebesse a ideia de representar uma incógnita por uma letra, um símbolo, aquele "ς", passível de se moldar àquilo que é solicitado pelo problema, iniciando o processo de simbolização. Processo esse retomado por Viète, no século XVI, e também por Descartes, no século XVII. A simbolização decorreu de um movimento de reflexão sobre o "porquê" e não apenas sobre o "como", do mesmo modo que fizeram os gregos quando herdaram conhecimentos matemáticos de culturas mais antigas, bem como da mesma forma que matemáticos com senso crítico, como Freudenthal, nos convidam a refletir, da mesma forma que a visão fenomenológica nos invita a olhar os objetos do conhecimento. Viète, provavelmente movido por um propósito semelhante a esse, aprimorou a notação algébrica, esclarecendo as intrincadas relações entre o conteúdo matemático e a forma de expressá-lo. Sua obra, *Isagoge*, expressou essa inovação possibilitada pelo diálogo que travou especialmente com as obras de Diofanto e Pappus. A análise e síntese, conceitos discutidos por Pappus, foram essenciais para o desenvolvimento da Álgebra simbólica, cujo objetivo era não deixar nenhum problema matemático sem solução, e que foi estruturada, em grande medida, a partir de sua logística especiosa. Assim como Viète, Descartes, também influenciado por matemáticos gregos como Pappus e Diofanto, em suas *Regras* ressalta a importância da Álgebra como um caminho para a construção das verdades matemáticas e científicas. Nesse caminho, a abordagem simbólica e os métodos analíticos revelaram-se essenciais para o desenvolvimento da Matemática e da ciência moderna. Os estudos desta seção evidenciaram o que já havíamos tratado nas seções anteriores sobre a importância de uma compreensão da Álgebra que não seja essencialmente tecnicista, quando falamos da BNCC, ou de uma visão crítica de como os símbolos interagem nas expressões, como mostramos em Freudenthal. Acreditamos, então, que nossa pesquisa articula mais estreitamente, por meio do que chamamos dessedimentação, as perspectivas da Álgebra clássica e da moderna e ressalta a relação de continuidade, de interdependência entre ambas, e não de ruptura, bem como ressalta a tarefa empreendida por grandes matemáticos de olhar para além da expressão, aquilo que é expresso. Além disso, estes estudos apontaram para horizontes de compreensões possíveis para ampliar nossos conhecimentos sobre as potencialidades da linguagem algébrica e suas relações com as multiplicidades, o que se concretizou na seção seguinte.

Finalmente, na seção 6, "A Álgebra na perspectiva Husserliana: a teoria das multiplicidades", buscamos compreender a teoria das multiplicidades de Husserl, tema presente, substancialmente, nos *Prolegômenos* e na *Lógica Formal e Lógica Transcendental* e que foi desenvolvido pelo filósofo no contexto de suas investigações lógicas, como uma teoria das teorias, aquela que dá conta de expressar as ontologias formais em suas relações apofânticas. Em seguida, fizemos uma aproximação entre essa teoria das multiplicidades e a Álgebra, uma vez que a Álgebra moderna, em suas teorias axiomáticas, desvela objetos gerais, idealidades, tal como as multiplicidades. Esses objetos emergiram para o mundo do conhecimento graças àquele percurso histórico, constituído pela teia dialógica entre os pensadores que estudamos e outros. Essa teia se mostrou na análise do processo de dessedimentação dos conceitos algébricos que expusemos na seção 5, processo que abriu caminho para que o número tivesse a face de *Anzahl* complementada e ampliada pela face de *Zahl*. Sendo assim, número pode ser compreendido, para além de seu caráter instrumental, em seus aspectos de representante de idealidades. Evidenciamos isso por meio de um estudo da Teoria dos *Grupos*, objetos desvelados e expressos pela Álgebra e por ela definidos como livres de qualquer posição de fato. Completou-se, com esta seção, o ciclo que se iniciou destacando os entrelaçamentos entre conceitos fenomenológicos e matemáticos, permeados pelas ideias husserlianas. Ciclo esse que se expandiu para a reflexão sobre os rumos da Ciência na sociedade contemporânea e nas atividade de ensino e aprendizagem e que se delineou por meio de uma tentativa de volta às origens dos conceitos do número, das desconstruções e reconstruções desses conceitos, bem como do diálogo com as ideias dos pensadores que divisaram formas de representação desses objetos matemáticos, os quais se mostraram potencialmente capazes de desvelar multiplicidades. Nesta seção, se explicitam, mais uma vez, como na anterior, a compreensão da Álgebra e de sua linguagem que, mais do que *generalizadora*, pode ser qualificada como *ampliadora* dos objetos matemáticos e também como uma forma de pensar essencialmente lógica, segundo uma lógica formal, porque apofântica, reveladora de novas ontologias, como sugere o subtítulo da obra de Husserl que nos guiou nestes estudos.

Umberto Eco (1932-2016), em *Seis passeios pelos bosques da ficção* (1994), justifica o título das conferências sobre textos ficcionais reunidas na obra em questão como sendo a apropriação de uma metáfora, cunhada por Jorge Luís Borges (1899 – 1986), aplicável a qualquer texto narrativo: leitura está para passeio assim como bosque está para a narrativa. Eco argumenta que, diferente de um jardim, que oferece caminhos pré-definidos, em um bosque o caminhante, tanto quanto o leitor de uma narrativa, devem optar o tempo todo por qual caminho seguir. O caminhante faz isso quando encontra uma bifurcação no bosque e resolve viver sua própria experiência e não aquela traçada pelo arquiteto. O leitor, quando encontra uma conclusão da frase e tenta prever, por assim dizer, o que virá depois, sendo que a continuação da história poderá atender ou quebrar as suas expectativas, conduzindo-o a novos caminhos, a novas bifurcações que não necessariamente foram previstas ou traçadas pelo escritor do texto. Ainda que um texto acadêmico deva ter, analogicamente, mais a feição de um jardim planejado pela razão do que a de um bosque cunhado pelos caprichos da natureza, a ideia de que os temas tratados nesta pesquisa não necessariamente articulam-se do modo como sugerimos na primeira parte destas considerações finais nos parece adequada. Isso porque estamos tratando e resgatando modos de ver o objeto da investigação, a Álgebra, e destacando que esses modos não se esgotam como não se esgotam as potencialidades da linguagem algébrica. Assim, neste segundo momento destas considerações, daremos atenção às trilhas que se conectaram em nossas reflexões de modo sincrônico e vieram à tona nas vivências, tanto da leitura quanto da prática no ensino da Matemática.

Entre esses pontos, compreendemos a estreita conexão entre o caminho percorrido pelo desenvolvimento da linguagem algébrica e a teoria das multiplicidades, cujo aspecto que destacamos é a capacidade de trabalhar com objetos que são pré-definidos axiomaticamente, os quais não têm, à primeira vista, conexão alguma entre si além do fato de se abrigarem, para a garantia de sua existência como tal, sob essa axiomática, que é estabelecida e posta em evidência pela Álgebra moderna ou abstrata.

Esta trilha nos leva à discussão sobre um dos modos de ser da linguagem algébrica como essencialmente objetiva e sobre o tipo de objetividade inerente a ela.

O termo *objetividade*, neste sentido, é compreendido como realidade exterior ou dessemelhante ao sujeito que manifesta a realidade cognitiva dela. Essa objetividade dá-se segundo os conceitos da multiplicidade husserliana: os objetos, ainda que não estejam presentes, são determináveis por conexões de propriedades pré-estabelecidas para eles. Estas conexões, por sua vez, dão-se ao pensamento pela apreensão e explicação conceitual dessa objetividade, pelo conjunto de predicados que, *a priori*, especificam o núcleo de um noema, de um objeto único em sua definição, um "X", que genericamente nomeia, abriga outros de sua espécie. A Álgebra seria, desta perspectiva, a unidade que dá sentido às diversidades. Por sua vez, uma estrutura algébrica pode ser entendida como uma axiomática que abriga em si diferentes objetos matemáticos. Daí o aspecto benéfico inerente a ela, que é o de ampliar os pensamentos aritmético e geométrico herdados dos antigos, ampliar as possibilidades da Matemática, enfim, conferindo a estes pensamentos uma liberdade em relação a qualquer efetividade intuível no campo da aritmética ou por meio de uma formalização algébrica das figuras geométricas. Este benefício concorre com um eventual aspecto funesto, caso a linguagem algébrica seja exclusiva ou excessivamente considerada em seu aspecto técnico, desvinculada de suas origens no mundo-da-vida. Um possível meio de amenizar este problema seria uma educação matemática que integrasse à resolução de problemas práticos reflexões sobre as origens, tanto históricas como filosóficas, dos conceitos e dos símbolos, uma educação que integrasse os modos racionais e seguros de percorrer o jardim aos modos às vezes aleatórios e sinuosos de se percorrer o bosque, já que as perspectivas históricas e filosófica, conforme vimos em nossa pesquisa, nem sempre são lineares.

A volta às origens de que falamos oferece ainda outro sentido, tão ou mais importante que o do olhar para os primórdios das ciências. Trata-se aqui do regresso permitido pela ciência do raciocínio. Ele se mostra quando consideramos o método da Álgebra e seu aspecto lógico. Sendo um método cuja base é a Lógica, é necessário considerar que o sujeito do conhecimento se afasta do sentido original pelos encadeamentos das operações intelectuais, contudo, justamente porque são lógicos esses elos, em momento nenhum se rompem e, portanto, todo processo carrega em si o caminho da volta às proposições que primeiramente foram evidenciadas. Dado que esse método tem a capacidade de expandir, como observamos anteriormente pelo seu poder de desvelar novos objetos matemáticos, significativamente o campo de visão dos métodos tradicionais das ciências dos fatos, ele fará isso caso o sentido preceda a aplicação do método para que ele não se esvazie. Contudo, dado seu caráter essencialmente lógico, conservará, caso o sujeito tenha interesse em revisitar, o sentido original em conexão com o que foi desvelado. Já que recuperamos a analogia do bosque, aqui podemos recuperar a da árvore: as folhas, os novos objetos desvelados, sempre estarão conectadas à semente, ao sentido primeiro.

Nossa pesquisa permitiu que compreendêssemos a Álgebra como a intersecção entre a Lógica e a Matemática desempenhando a tarefa de logicizar a Matemática e matematizar a Lógica. Mais adiante, seguindo a trilha da Lógica e suas bifurcações, consideramos ainda a relação que a Álgebra estabelece entre a ontologia e a apofântica. A Lógica matemática desvela objetividades validando julgamentos por meio de sua objetividade ideal, ou seja, busca idealidades objetivas, que são as formações matemáticas, os objetos em geral sem nenhuma determinação concreta. Essas teorias destacam as relações formais constituindo uma *ontologia formal*, uma doutrina *a priori* do objeto a qual se diferencia da *apofântica formal*, a ciência *a priori* formal do juízo predicativo. Dado que a ontologia formal aponta para o objeto e a apofântica para o juízo, temos que a Matemática formal pende mais para a ontologia e a Lógica mais para a apofântica. Um dos modos de ser da Álgebra seria, a partir destas considerações, o de estabelecer a conexão entre esses dois campos que se complementam na construção do conhecimento.

Um bom exemplo do que dissemos anteriormente pode ser encontrado na constatação de que a Geometria euclidiana nasceu tridimensional, a partir das intuições sensíveis que apresentam ao sujeito a realidade tridimensional. Essa Geometria é, contudo, um caso particular de uma multiplicidade geométrica que comporta *n-dimensões* não percebidas pelos sentidos do sujeito do conhecimento que pode formalizar, dar forma a essas n-dimensões, por meio dos processos matemáticos, notadamente algébricos. Nesta trilha, encontramos uma compreensão da Álgebra como um instrumento de ampliação das intuições, ainda que não sensorialmente percebidas e trazidas ao conhecimento pelo pensamento algébrico. Na mesma linha de reflexão, Husserl concebe que a Álgebra libertou a Aritmética de toda realidade intuível.

Em nossas investigações, encontramos um esforço de algebristas e geômetras para generalizarem estas áreas da Matemática em dado momento histórico, séculos XIX e XX. Esse esforço incluiu a perspectiva da Álgebra entendida como a “ciência do raciocínio geral", no dizer de Peacock, que resistia a compreendê-la apenas como uma Aritmética Universal. Essa ciência do raciocínio geral faz-se presente pela linguagem simbólica. Podemos compreender que uma linguagem, quer algébrica, quer de outra ciência, quer a do dia a dia, enforma ou constitui um vir à luz da forma, do pensamento característico da atividade. Contudo, essa linguagem expressa o pensamento e não o núcleo desse pensamento. No que diz respeito à linguagem algébrica, a superficialidade dos elementos simbólicos que a constroem não é superada sem que o sujeito do conhecimento se volte para o mencionado por meio desses símbolos e para a própria natureza da Álgebra. Esse olhar que atravessa a menção e busca o mencionado constitui uma das dimensões da atitude fenomenológica. A palavra ou as expressões simbólicas constituem elos entre a unidade da menção e o mencionar, entre o ser que é dito e o dizer. O que está para além dos símbolos é, na linguagem cotidiana, o sentido e, na linguagem algébrica, os objetos em sua idealidade, em sua generalidade. Diferente da linguagem do cotidiano e até de outras ciências, a linguagem algébrica permite ao sujeito a volta segura ao mencionado, despido de sua roupagem de símbolos, porque lógica, conforme constamos anteriormente. Um dos modos de se realizar isso é o fato de a Álgebra estender o conceito de operação dos números para os objetos formais com os quais lida. Neste sentido, o pensamento algébrico pode ser considerado um pensamento essencialmente fenomenológico.

Muitas trilhas restam ainda a serem abertas pelo leitor em nossa investigação, cujo registro foi construído à maneira de um jardim, porque assim pede o gênero acadêmico *tese*, mas com potencial de bosque, porque assim sugere nosso tema. Queremos destacar, contudo, um ponto que nos chamou a atenção no início da pesquisa, quando explorávamos as bases da Fenomenologia para realizar este trabalho. Àquele ponto, deparamo-nos com Husserl estabelecendo uma analogia entre o conhecimento e uma árvore, cujo tronco seria a Filosofia, ciência primeira, e os galhos as ciências que dela brotaram. Nesse sentido, a Filosofia, um tanto relegada a um segundo plano no Ocidente, notadamente à época em que Husserl viveu, foi retomada por ele, em suas reflexões, com o status de fundamento do conhecimento autêntico, já que as ciências dos fatos se tornaram, por assim dizer, privilegiadas em relação às outras e distanciaram-se da Filosofia, como ainda hoje podemos constatar. Em decorrência disso, as ciências eidéticas nem sempre receberam a atenção merecida no mundo tecnicista, o que gerou certo desequilíbrio na busca do conhecimento. A Matemática, entendida como uma ciência eidética e purificada do psicologismo é, segundo nossa compreensão, a base para a Fenomenologia que resgata a função da Filosofia para se chegar a um conhecimento livre de qualquer posição de fato. Não por acaso, Husserl foi matemático e viu na Lógica, também despida de psicologismo, a qual chamou transcendental, tanto o método para o desenvolvimento do pensar quanto a essência desse tipo de pensar. Evidenciamos, assim, em nossa tese, como a Álgebra constitui, com sua peculiar linguagem, instrumento central para se chegar a esse conhecimento autêntico. Claro está, portanto, que se não há um manual para o modo como se deve desenvolver o ensino de Matemática na escola, há, por outro lado, atitudes que não se deve estimular: a excessiva instrumentalização dos processos algébricos com a finalidade de simplesmente resolver problemas práticos do dia a dia, que se reduz à prática de decorar símbolos e regras; e a manutenção do hiato que se constituiu em nossa sociedade excessivamente tecnicista entre a Filosofia e a Matemática.

## REFERÊNCIAS


ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ALES BELLO, Angela. **Husserl e le scienze**. Roma: La Goliardica editrice universitaria di Roma, 1986.

ALVES, Pedro M. S. Apresentação da tradução portuguesa *In*: HUSSERL, Edmund. **A Crise das Ciências europeias e a fenomenologia transcendental**. Rio de Janeiro: GEN, 2012.

ARISTOTELES. **Metafísica**. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BATTISTI, César A. A Geometria: uma apresentação. *In*: **Modernos & Contemporâneos** - Revista de Filosofia do IFCH da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, v. 3, n. 7., jul./dez., 2019.

BICUDO, Maria. The origin of number and the origin of geometry: issues raised and conceptions assumed by Edmund Husserl. **Qualitative Research Journal.** São Paulo, v. 8, n. 18, p. 387 – 418, out, 2020.

BICUDO, Maria. A. V; COSTA, António P. C. Introdução. *In*: BICUDO, Maria. A. V; COSTA, António P. C (Org.). **Leituras em pesquisa qualitativa**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019, p. 13-23.

BICUDO, Maria A.V. Sobre História e historicidade em Edmund Husserl. In: **Cadernos da EMARF**, Fenomenologia e Direito, Rio de Janeiro, v.9, n.1, p.1-174 abr./set.2016.

BICUDO, Irineu. Introdução. *In*: EUCLIDES. **Os Elementos.** São Paulo: editora UNESP, 2009, p. 15-94.

BORTOLETE, Juliano C. **Empacotamento de círculos usando otimização não linear.** Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2016.

BORTOLETE, Juliano C. **A relação transitiva entre sociedade, tecnologia e Matemática:** aportes à formação profissional em um curso superior de informática. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2011.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; Ed. da Universidade de São Paulo, 174.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2017. 470 p. Disponível em:<

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf > Acesso em: 01 fev. 2020.

BUDDEN, F. J. **The fascination of Groups**. Cambridge: Cambridge University Press, 1972.

BÚRIGO, Elisabete Z. O movimento da matemática moderna no Brasil: encontro de certezas e ambiguidades. **Revista Diálogo Educacional**, vol. 6, núm. 18, maio-agosto, pp. 35-47. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2006.

CAJORI, Florian. **A History of Mathematical Notations**. New York: Dover Publicatinons, 1993.

CHAUÍ. Marilena. **Convite à Filosofia**. São Paulo: Ática, 2002.

CHAUÍ, Marilena. Vida e Obra. In: HUSSERL, Edmund. **Investigações lógicas** sexta Investigação (Elementos de uma elucidação fenomenológica do conhecimento). São Paulo: Nova Cultural Ltda, 2000, p 5-12. (Col. Os Pensadores)

COSTA, AMOROSO M. **As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo,1971.

D'AMBROSIO, UBIRATAN. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. **Estudos avançados**, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, Dec. 2018.

DESCARTES, RENÉ. **Regras para a direcção do espírito**. Lisboa: edições 70, 1989.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. reform. São Paulo: Atual, 2003. 6. reimpressão de 2011.

ECO, Umberto. **Seis passeios pelos bosques da ficção**. São Paulo: Companhia das Letras, 1994.

EVES, Howards. **Introdução à história da matemática**. tradução Hygino H. Domingues. 5a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRÓS, José. **Labyrinth of thought:** A History of set theory and its role in modern mathematics. Basel; Boston; Berlin: Birkh&user Verlag AG, 2007.

FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. *In*: ***Pro-posições***, Campinas, vol. 4 [1], n° 10, março 1993, p. 78-91.

FREUDENTHAL, Hans. **Didactical phenomenology of mathematical structures**. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers, 2002.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an Educational Task**. Dorbrecht: D. Reidel, 1973, p. 287 - 331.

GALILEI, G. **Il saggiatore**. Milão, Feltrinelli, 1997. Disponível em < https://sites.icmc.usp.br/andcarva/il_saggiatore.pdf>. Acessado em 28 de novembro de 2020.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra.** Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

HERSH, Reuben. The "Origin" of Geometry. **The College Mathematics Journal.** v. 33, no. 3, p. 207 – 2011, maio. 2002.

HOPKINS, B. C. Husserl and Jacob Klein. *In*: Centrone, S. **Essays on Husserl's Logic and Philosophy of Mathematics**. Synthese Library, vol 384. Dordrecht: Springer, 2017.

HOUAISS, Antonio; VILLAR, Mauro de Salles. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

HUSSERL, Edmund. **Meditações cartesianas**: uma introdução à fenomenológica. São Paulo: edipro, 2019.

HUSSERL, Edmund. **Investigações Lógicas**: Prolegômenos à Lógica Pura. Rio de Janeiro: Gen, 2014.

HUSSERL, Edmund. **A crise das ciências europeias e a fenomenologia transcendental**: uma introdução à Filosofia fenomenológica. Rio de Janeiro: Gen, 2012.

HUSSERL, Edmund. **Investigações Lógicas**: investigações para a fenomenologia e a teoria do conhecimento. Rio de Janeiro: Gen, 2012a.

HUSSERL, Edmund. **Europa**: crise e renovação. Rio de Janeiro: Gen, 2012b

HUSSERL, Edmund. **Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica:** Introdução geral à fenomenologia pura. Aparecida, SP: Ideias & Letras, 2006.

HUSSERL, Edmund. **A Ideia da Fenomenologia.** Rio de Janeiro: Edições 70, 1989.

HUSSERL, Edmund. **Phänomenologische Psychologie**. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1968.

HUSSERL, Edmund. **Lógica formal y lógica transcendental**. México: UNAM, Centro de Estudios Filosóficos, 1962.

HUSSERL, Edmund. **Philosophie der arithmetik:** psychologische und logische untersuchungen: Halle-Saale, Erster Band, 1891.

JACOBSON, N. **Basic Algebra**. Mineola, N.Y: Dover Publications, 2009.

KLEIN, Felix. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. [A Comparative review of recent researches in geometry] Erlangen, 1872. Trad. M.W.

Haskell. *In*: Bulletin of the American Mathematical Society, New York, v. 2, n° 10, 1893, p. 215-250. (Disponível em: https://projecteuclid.org/journals/bulletin-of-the-new-york-mathematical-society/volume-2/issue-10. Acessado em: 6 mar. 2022).

KLEIN, Jacob. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.** New York: Dover Publications, 1992.

KLUTH, Verilda Speridião. **Estruturas da Álgebra:** Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2005.

LANG, Serge. **Álgebra para graduação.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2008.

LIMA, Elon L. **Análise Real**: funções de uma variável. v.1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

LIMA, Elon L. **Curso de análise.** v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2010b.

LIVIO, Mario. **A equação que ninguém conseguia resolver.** Rio de Janeiro: Record, 2011.

MATURANA, Humberto R; VARELA, Francisco J. **A árvore do conhecimento:** as bases biológicas da compreensão humana. São Paulo: Palas Athena, 2010.

MILIES, César P. **Breve história da Álgebra abstrata**, 2020. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acesso em: 17 de março de 2021.

MONDINI, Fabiane. **A presença da Álgebra na legislação escolar brasileira. 2013**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Rio Claro, 2013.

MONTEIRO, L. H. J. **Elemento de Álgebra**. Rio de Janeiro: LTC. 1978.

MOURA, Carlos Alberto Ribeiro de. Prefácio. *In*: HUSSERL, Edmund. **Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica:** Introdução geral à fenomenologia pura. Aparecida, SP: Ideias & Letras, 2006.

MOURA, Carlos Alberto Ribeiro de. **Crítica da Razão na Fenomenologia**. São Paulo: EDUSP, 1989.

NASCENTES, Antenor. **Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Livraria Acadêmica; Livraria Francisco Alves; Livraria São José; Livros de Portugal, 1955.

NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. **Estruturas Algébricas**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2013.

NOLASCO, Fábio Mascarenhas. Técnica teórica e renascimento (crítico) da filosofia: alguns aspectos das Meditações Cartesianas de Edmund Husserl. *In*: Husserl, Edmund. **Meditações cartesianas**: uma introdução à fenomenologia. São Paulo: edipro, 2019, p 13-28.

OLIVEIRA, Maria. C. A. de. Professores de matemática ao tempo do Movimento da Matemática Moderna: perspectivas de pesquisa. **Revista Diálogo Educacional**, v. 6, n. 18, maio-agosto, pp. 79-89, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2006.

PAPPUS DE ALEXANDRIA. **Pappi Alexandrini mathematicae collectiones.** Berolini: Weidmann, 1876-1878. <Disponível em: https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=coo.31924087937144&view=1up&seq=12> Acesso em 13 jul. 2023.

PLATÃO. **A República**. São Paulo: Rideel, 2005.

PEACOK, George. **A Treatise on Albegra**. London: Cambridge, 1830.

PESSOA, Fernando. "O Guardador de Rebanhos". *In*: **Poemas de Alberto Caeiro**. Fernando Pessoa. Lisboa: Ática, 1993.

PESSOA, Fernando. **Textos filosóficos**. Lisboa: Ática, 1968.

SANTOS, E. TOMÉ, L. O discurso ausente de democracia na Base Nacional Comum Curricular do Ensino Fundamental. *In*: **Jornal de Políticas Educacionais.** V.14, n. 25, 2020, p. 1-19, 26 de maio de 2020.

SARTRE, Jean-Paul. *O Ser e o nada*: ensaio de ontologia fenomenológica. Petrópolis: Vozes, 1997.

STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**. Trad. João Cosme dos Santos Guerreiro. 2ª ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

VARGAS, Carlos Eduardo de Carvalho. A concepção husserliana de *Mathesis Universalis* a partir da noção de *Mannigfaltigkeitslehre. In:* **Ariosto***: International Journal of Phenomenology, Hermeneutics and Metaphysics.* Toledo - Paraná, n˚4, v. 1, 2019, p. 119-139. Disponível em: https://e-revista.unioeste.br/index.php/aoristo/article/view/23254. Acesso em 10 jan. 2022.

VIÈTA, François. *In artem analyticen Isagoge. In*: KLEIN, Jacob. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.** New York: Dover Publications, 1992, p. 315-354.

ZILES, Urbano. Fenomenologia e teoria do conhecimento em Husserl. **Rev. abordagem gestalt.**, Goiânia, v. 13, n. 2, p. 216-221, dez. 2007.