



# Os Espelhos e o Ensino de Geometria<sup>1</sup>

Rosemeire de Fátima Batistela<sup>2</sup>

Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Claudemir Murari

## Resumo

O objetivo desta pesquisa foi construir um kit de instrumentos feitos com espelhos planos. Para atingir esse propósito uma pesquisa bibliográfica foi desenvolvida a respeito de instrumentos similares existentes para o ensino de geometria. A descrição de tais objetos é apresentada. Os dados obtidos na descrição realizada foram analisados com recursos da fenomenologia. Através de interpretações efetuadas foram articulados temas convergentes desses instrumentos, expressos na pesquisa como: “o que é”, “como é feito” e “para que é utilizado”. As convergências constituíram-se o núcleo da construção do kit apresentado nessa pesquisa. A criação e construção do kit foram minuciosamente explicitadas. Este kit é um instrumento inovador e importante para o ensino de geometria e permite, através da visualização e da construção de *bases*, a exploração de conceitos e propriedades geométricas abordando temas como: polígonos, poliedros de Platão e de Arquimedes, padrões simétricos, tesselações do plano e do espaço, construções geométricas, simetria, reflexão, translação, rotação, ângulos, entre outros.

**Palavras-chave:** kit de espelhos; ensino de geometria; recursos fenomenológicos.

## Abstract

The purpose of this research was to construct a kit of instruments made out of plane mirrors. To reach this purpose, a bibliographic search was developed about already existing similar instruments to teach geometry. A description of such tools is presented. The data found in the description was analyzed from a phenomenological perspective. Through the interpretation of these instruments convergent themes were found: “what is”, “how is constructed” and “for what is used”. These convergences constituted the core for the construction of this new kit presented in this dissertation. The creation and construction of is presented in details. This kit is an important and new instrument and allows the work of geometrics concepts and properties through of visualization and the construction of basis, to explore geometric concepts and properties and the studying of themes, such that: polygons, Arquimedes and Plato’s polyhedron, symmetric patterns, spherical an plane tessellations, geometric constructions, symmetry, reflexion, translation, rotation, and others.

**Key words:** kit of mirrors; teaching of geometry; phenomenological resources.

<sup>1</sup> Publicado originalmente em: BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V.; MURARI, C. Os Espelhos e o Ensino de Geometria. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS (SIPEQ), 3, 2006, São Bernardo do Campo. *Anais... São Bernardo do Campo: Universidade Metodista de São Paulo, 2006*. Este artigo é oriundo da pesquisa de mestrado em Educação Matemática desenvolvida na UNESP de Rio Claro sob orientação do Prof. Dr. Claudemir Murari e co-orientação da Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo intitulada “Um Kit de Espelhos Planos para o Ensino de Geometria” defendida em 06/04/2005.

<sup>2</sup> Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro. À época da escrita do artigo, professora do Departamento de Matemática da Faculdade Jorge Amado, Salvador-BA. Atualmente, professora do Centro Universitário Jorge Amado (UNIJORGE) e professora do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), campus I. E-mail: rosebatistela@hotmail.com

## **Introdução**

O trabalho aqui apresentado é parte de uma pesquisa desenvolvida no curso de Mestrado em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista, campus de Rio Claro. Por meio de um estudo bibliográfico a respeito dos instrumentos existentes feitos com espelho e utilizados em aulas de geometria, e do movimento de análise que utilizou procedimentos de pesquisa fenomenológica, foi construído um kit de espelhos para o ensino de geometria. Apoiados em autores como Kingston (1957); Alspaugh (1970); Jacobs (1974); Daffer & Clemens (1977); Lott & Dayoub (1977); Woodward (1977); Walter (1981); Robertson (1986); Ball & Coxeter (1987); Barbosa (1993); Murari (1999); Martins (2003); Almeida (2003), entre outros, coletamos os dados que foram analisados à luz de procedimentos de pesquisa fenomenológica, sustentados por Bicudo (1994), Garnica (1995) e Bicudo (2000) e, iluminados pela pergunta diretriz: “O que se mostra importante na construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria?”.

Considerando a intenção da pesquisa, optamos pela metodologia de investigação qualitativa, que privilegia a interpretação, julgada como a mais apropriada para o tipo de questão por nós investigada. Durante a pesquisa entramos em contato direto com a literatura específica a respeito de instrumentos construídos com espelhos, bem como com os próprios espelhos para, posteriormente, passarmos à análise, momento em que buscamos as convergências entre os trabalhos estudados e entre os próprios instrumentos e suas possibilidades de utilização. Esse contato do pesquisador com o ambiente e/ou situação a ser investigada, tem sido apontado na literatura como procedimentos da pesquisa qualitativa, conforme Goldemberg (1999) e Alves-Mazzotti & Gewansznajder (2001).

A descrição dos instrumentos, a partir de obras que indicavam a utilização de instrumentos de espelhos para o ensino de geometria, construiu os dados, os quais foram analisados com recursos de procedimento da pesquisa fenomenológica. O momento da análise procede ao momento em que o fenômeno foi situado e à coleta bibliográfica, representada pelas descrições dos instrumentos. A análise acontece em dois momentos. O primeiro é o que se denomina ideográfico, que busca tornar visível o sistema das idéias presentes nas descrições; é nessa fase da análise que o pesquisador procura por unidades de significado (u.s.). Estas são discriminações prontas no texto, espontaneamente percebidas nas descrições e intencionalmente recortadas do texto; apresentam vínculo com a perspectiva do pesquisador e expressam divergências e convergências observadas nos dados disponíveis. O segundo momento é o da análise nomotética, na qual o pesquisador vale-se de unidades de significado

e, ligado ao movimento de análise, pode obter categorias de convergências que iluminam uma perspectiva do fenômeno e permitem uma compreensão/interpretação para/da a pergunta diretriz da pesquisa.

Finalmente, fundamentando-se nas convergências, construímos o conjunto de material didático com espelhos, e propomos uma nova utilidade para os caleidoscópios generalizados. As unidades de significado encontradas à luz da pergunta acima explicitada possibilitaram a elaboração de uma síntese explicativa a respeito de cada um dos instrumentos pesquisados e, depois, de outra síntese que apresenta elementos centrais convergentes dos instrumentos de espelho. Essas convergências imantam o que chamamos de kit de espelhos para o ensino de geometria.

Ressaltamos que os instrumentos apresentados nesse kit já existiam, e até mesmo já foram ou são utilizados para o ensino de geometria. Porém, não se tem notícia do agrupamento desses instrumentos e nem mesmo das possibilidades diversas de temas, conceitos e propriedades que podem ser abordados por meio deles. O kit elaborado contém algumas inovações, que são mostradas no decorrer do trabalho, quando apresentamos, respectivamente, a construção dos instrumentos, com soma e subtração de detalhes por nós sugeridos, visando a “otimização” dos mesmos, e as bases caleidoscópicas especialmente construídas para possibilitar a visualização dos poliedros de Arquimedes em caleidoscópios generalizados. A seguir, apresentamos uma breve história sobre os espelhos, algumas considerações sobre a sua utilização no ensino de geometria, uma síntese explicativa de cada um deles, e, também, a articulação dessas sínteses explicativas que, como já dissemos, foi elaborada a partir de procedimentos da pesquisa fenomenológica.

### **Sobre os espelhos**

Sobre a invenção do espelho, suspeita-se que sua criação foi inspirada nos espelhos de água. Para ter a forma e as inúmeras utilidades que tem atualmente, o espelho depende do vidro. Por isso, a seguir contaremos um pouco sobre a história da criação do vidro e apresentaremos informações a respeito dos espelhos.

Uma das hipóteses mais aceita para a invenção do vidro é que tenha sido “descoberto” por acaso, há quatro mil anos, nas redondezas do Oriente Médio, pela observação do líquido originário sob as fogueiras feitas sobre solo arenoso. Grãos de areia, quando submetidos à temperatura acima de mil graus centígrados, transformam-se em substância líquida, que se torna vidro.

No século 2 d.C. os romanos já utilizavam o vidro na forma de lentes, espelhos, utensílios domésticos, para decorar interiores, etc. É dos romanos que deriva o mundo envidraçado que habitamos hoje. O vidro foi responsável por duas importantes revoluções. Em 1285, a invenção dos óculos, prolongando assim a vida útil dos trabalhadores em mais de quinze anos, e possibilitando a invenção da prensa de Gutenberg, em 1445, com padrão pequeno de letras.

O século XVI foi responsável pela revolução iniciada quando Leonardo da Vinci utilizou um vidro metalizado para comparar a figura da tela à figura refletida pelo espelho. Essa prática se espalhou e foi utilizada por diversos artistas da época, desencadeando um movimento artístico de busca pelo real e pelo humano, que precipitou o desmoronamento da ordem social vigente na Idade Média, que valorizava o irreal e o divino, dando origem ao movimento que determinou o período denominado Renascimento.

A busca pelo conhecimento do mundo e das leis da existência foi facilitada pelos vidros, fossem eles simples frascos, microscópios ou telescópios. Aproximaram o mundo, revelaram astros do universo desconhecido e permitiram a visualização de fósseis microscópicos que denunciaram indícios da evolução humana. Isso possibilitou um avanço científico que transformou conceitos e crenças mundiais.

No que se refere aos espelhos, de acordo com Roger (1824), as primeiras manifestações desse objeto indicam que no início de sua existência não passava de um pedaço de metal polido, que produzia imagens por reflexões, chegando a ter a forma de disco de metal polido levemente convexo. Mais tarde apareceram os espelhos de mão, grande o suficiente para refletir o corpo todo. Estes espelhos foram adotados pelos Celtas, vindo dos Romanos, e no fim da Idade das Trevas tinham se tornado comum por toda a Europa, geralmente feitos de madeira, prata ou de bronze polido.

O espelho era feito de metal polido. Contudo, com o passar dos tempos, ele ganhou uma forma mais aperfeiçoada e conhecida até os dias atuais: uma lâmina de vidro prateada nas costas. Estes espelhos, feitos com sustentação de vidro e costa refletora, existem desde o fim do século XII e são produzidos em grande quantidade desde o século XVII. Atualmente, técnicas baratas de produção levaram a uma proliferação de seu uso, não só como luxos salpicados pela mobília, mas em guarda roupas, aparadores, em decorações de espaços públicos, como restaurantes, bares, e tudo o mais que conhecemos hoje e que são ornamentados com espelhos., além de ser um recurso didático para trabalhar temas da Geometria.

Na ótica, um espelho é qualquer superfície polida que divirja os raios de luz de acordo com as leis da reflexão. Ele pode ter superfícies planas ou curvas. Um espelho curvo pode ser côncavo ou convexo, dependendo de como a superfície reflete os raios pelo centro da curvatura do mesmo. Espelhos curvos geralmente têm superfícies que são esféricas, cilíndricas, parabólicas, elipsoidais ou hiperboloidais.

Espelhos esféricos produzem imagens que são reduções, e são utilizados em automóveis. Espelhos cilíndricos convergem todos os raios de um feixe de luz para um único ponto. Espelhos parabólicos podem ser usados para focar raios paralelos para um foco real, como ocorre em um espelho de telescópio, ou para produzir um feixe paralelo de uma origem e seus focos. Um espelho elipsoidal refletirá a luz de um de seus dois pontos focais para o outro e um objeto situado no foco desse espelho terá uma imagem virtual. Em nosso trabalho, todos os instrumentos que compõem o kit são construídos com espelhos planos.

### **Espelhos utilizados no ensino de geometria**

É possível prever o visual a ser obtido nas reflexões dos espelhos. Por isso, pode-se lançar mão dos espelhos para fins educacionais, principalmente na geometria, devido aos inúmeros objetos que possuem linhas de simetria e que, assim sendo, podem ser visualizados nos espelhos, visto que estes refletem simetricamente um ponto-objeto colocado à sua frente. Alguns autores se referem aos caleidoscópios que permitem a previsão do visual como “caleidoscópios educacionais”. Então, iremos nos apropriar desse termo e estendê-lo a todos os instrumentos articulados que constituem este kit, pois só o compõe por permitirem o visual previsto, o que possibilita sua utilização no ensino.

Pelo aprofundamento na literatura, a respeito de instrumentos construídos com espelhos e utilizados para o ensino de geometria, encontramos relatos da existência e possibilidades de utilização. Pudemos identificar vários instrumentos constituídos por espelhos simples e/ou articulados: espelho plano individual, espelho mágico (mira), caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos, caleidoscópios generalizados, caleidoscópios especiais, ou espelhos articulados especiais, os quais apresentaremos abaixo através de uma síntese explicativa de cada um deles. O modo como procedemos para fazer essa síntese será explicitado posteriormente. As descrições sintetizam os relatos encontrados nas obras pesquisadas, da maneira como cada autor concebeu, definiu e utilizou tal instrumento no âmbito do ensino de geometria.

O *espelho mágico* é uma ferramenta geométrica feita com um pedaço de plástico transparente e espelhado. Possui um dispositivo que o sustenta e que o mantém perpendicular ao plano de apoio. Serve para fazer cópia de figuras, para construções geométricas que até então eram feitas com régua e compasso, para estudo e abordagem dos conceitos de simetria reflexional, de reflexão e de linhas de simetria.

O *espelho simples* é produzido por uma superfície metálica polida, feita de vidro coberto com uma camada metálica refletora, geralmente de prata ou alumínio, que funciona como espelho. É utilizado para trabalhar o conceito de simetria, de figuras com estrutura simétrica e de reflexão.

O *conjunto de dois espelhos planos verticais e paralelos* é constituído de dois espelhos planos paralelos entre si, posicionados na vertical, com as faces espelhadas frente a frente. Servem para explicitação e abordagem dos conceitos de reflexão, orientação e translação.

O *caleidoscópio com dois espelhos* ou conjunto de dois espelhos articulados é um instrumento ótico construído a partir de dois espelhos planos, articulados na forma de um livro aberto, com as faces espelhadas voltadas para o interior, podendo ser encapado. É adequado para visualização de padrões simétricos, para obtenção de polígonos, estudo dos conceitos de ângulo, reflexão e rotação.

Os *caleidoscópios educacionais individuais com três espelhos* são conjuntos de espelhos planos articulados, dois a dois, perpendiculares a um mesmo plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. São utilizados para visualização de pavimentações do plano.

O *caleidoscópio educacional modificado com três espelhos*, para trabalho em grupo, é um instrumento produzido pela fusão entre os caleidoscópios com dois espelhos e com três espelhos. É construído por três espelhos, de modo que ao conjunto de dois espelhos articulados deve-se encostar um terceiro espelho, mais baixo. É utilizado para visualização de pavimentações planas.

O *caleidoscópio educacional modificado com quatro espelhos*, é um conjunto formado por quatro espelhos planos perpendiculares a um plano, com as faces espelhadas voltadas para o interior. Pode ser montado utilizando dois conjuntos de espelhos articulados do caleidoscópio modificado para trabalho em grupo. É utilizado para visualização de pavimentações do plano.

Os *caleidoscópios generalizados* são instrumentos que possibilitam a visualização de pontos sobre uma mesma esfera. São construídos com três espelhos, formando um ângulo triedral. Possibilitam a visualização de pontos sobre uma esfera, permitindo a visualização de

vértices isogonais, de tesselações esféricas por polígonos esféricos e de poliedros semi-regulares.

Os *espelhos articulados especiais*, ou caleidoscópios especiais, são instrumentos construídos pela articulação de espelhos cortados com ângulos precisos, cujo vértice é o único ponto em comum entre eles. São utilizados para a visualização dos poliedros de Platão.

Dessas sínteses, procedemos a mais um trabalho articulador, buscando reunir aspectos comuns nelas presentes, estruturando convergências com a intenção de antever aspectos centrais para a construção do kit pretendido, baixo apresentados:

- Todos os instrumentos são construídos a partir de espelhos, ou outro material espelhado, como é o caso da mira, uns simples e alguns articulados e arranjos para produzir visual simétrico. Desse modo, são recursos didáticos para a geometria, pois refletem o visual de objetos geométricos, na medida em que são colocados padrões à frente dos mesmos, possibilitando, assim, a exploração de temas, conceitos e propriedades de tais objetos. No caso dos caleidoscópios, temos as *bases caleidoscópicas*, que são figuras especialmente e intencionalmente construídas para gerar um visual pretendido.

- O espelho mágico, o espelho simples, os caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos permitem a visualização de objetos geométricos planos. Os caleidoscópios generalizados e os espelhos articulados especiais permitem “ver” poliedros e possibilitam a visualização de objetos geométricos do espaço.

- Todos os instrumentos foram utilizados para trabalhar conceitos, objetos, temas ou propriedades geométricas de figuras que possuem linhas de simetria. A partir da visualização desses “entes” é que o trabalho torna-se possível.

- Os caleidoscópios com três e quatro espelhos são utilizados para visualização de tesselações do plano ou do espaço, conforme as especificidades de cada um.

- Todos os instrumentos construídos com espelhos servem para visualização de figuras que possuem linhas de simetria. Assim, permitem o trabalho com objetos do mundo geométrico e, por isso, endereçados para essa utilidade no ensino de geometria.

Consideramos que o trabalho de construção de um kit de instrumentos feitos com espelho para o ensino de geometria traz contribuições importantes para a prática docente, visto que, os instrumentos podem ser utilizados como recurso didático para alunos do ensino Básico, Médio e Superior, para abordagem de conceitos e propriedades, através da visualização da reflexão obtida por figuras devidamente construídas. Pode-se, por meio dos instrumentos, visualizar objetos com linhas de simetria, padrões simétricos, tesselações planas e espaciais, fazer construções geométricas, abordar conceitos como: polígonos, poliedros

regulares e semi-regulares, ângulos, simetria, linhas de simetria, construções, translação, rotação, reflexão, etc.

Nas possibilidades de utilização dos caleidoscópios acima citadas, devemos ainda incluir o seu uso no estudo e visualização de ornamentos. Em nosso trabalho não exploramos muito este assunto, pois o mesmo está mais relacionado à Educação Artística, enquanto que nosso campo de aplicação, delimitado pela pergunta norteadora, encontra-se fortemente vinculado ao ensino-aprendizagem de Geometria.

### **Considerações finais**

Nosso trabalho toca em pedras angulares da Educação Matemática, pois é fruto de nossas angústias e insatisfações relacionadas ao ensino de Matemática. Acreditamos que os instrumentos de espelho abrem possibilidades de novas experiências de ensino e de aprendizagem, e ao pesquisarmos os arredores do fenômeno em questão nessa pesquisa – a construção, com espelhos, de um kit de instrumentos para o ensino de geometria – percebemos que se esta dissertação aponta para oportunidades de pesquisa de questões relacionadas ao ensino e aprendizagem através destes recursos, estamos nos envolvendo com a formação de professores, pois o ensino por meio de instrumentos que não são os tradicionais exige um diferente posicionamento do professor, cujo sistema de ensino não seja o passivo, e no qual aluno e professor devem estar no centro do processo de ensino-aprendizagem.

A fenomenologia, que não traz consigo a imposição de uma verdade teórica ou ideológica preestabelecida, foi o fio arrematador que abrilhantou a análise dos dados do nosso trabalho, possibilitou a investigação direta e a descrição do fenômeno experienciado conscientemente, sem teorias explicativas ou pressuposições.

O campo de percepções permitiu-nos compreender, interpretar e comunicar resultados, e abre, dessa forma, possibilidades de trabalhos nessa área, onde parece ser urgente a continuação de pesquisas que contribuam para impulsionar a utilização de recursos didáticos como auxílio no processo de ensino-aprendizagem que apoiem o ensino e estimulem a aprendizagem.

### **Referências**

ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II**. 2003. 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.



BATISTELA, R. F.; BICUDO, M. A. V.; MURARI, C. Os Espelhos e o Ensino de Geometria. In: BAUMANN, A. P. P.; MIARKA, R.; MONDINI, F.; LAMMOGLIA, B.; BORBA, M. C. (Orgs.). **Maria em Forma/Ação**. Rio Claro: Editora IGCE, 2010. p. 313 - 321. 1 CD.

ALSPAUGH, C. A. Kaleidoscopic geometry. **Arithmetic Teacher**, Washington, n. 17, p. 116-117, 1970.

ALVES-MAZOTI, A. J. ; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 2001.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

BICUDO, M. A. V. **Fenomenologia: confrontos e avanços**. São Paulo: Cortez, 2000. 167 p.

BICUDO, M. A. V. Sobre a fenomenologia. In: BICUDO M. A. V. ; ESPÓSITO V. H. C. (Org.). **Pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: UNIMEP, 1994, p. 15-22.

DAFFER, P. G. O.; CLEMENS, R. S. **Geometry: an investigative approach**. 2. ed. Menlo Park: Addison-Wesley, 1977. 445 p.

DAYOUB, I. M.; LOTT, J. W. What can be done with a Mira? **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 70, n. 5, p. 394-399, May 1977.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática**. 1995. 258 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1995.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. Rio de Janeiro: Record, 1999.

KINGSTON, J. M. Mosaics by reflection. **The Mathematics Teacher**, Reston, p. 280-286, apr. 1957.

MARTINS, R. A. **Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais**. 2003. 246 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**. 1999. 2 v. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

ROBERTSON, J. M. Geometric constructions using hinged mirrors. **The Mathematics Teacher**, Reston, v. 79, n. 5 p. 380-386, may 1986.

ROGER, P. M. Kaleidoscope. In: ENCICLOPÉDIA Britânica. 4. ed., Edimbourg: Editora Enciclopédia Britânica, 1824. v. 5, p. 163-171.

WALTER, M. One mirror, two mirrors.... **Mathematics teaching**, Derby, n. 96, p. 54-56, set. 1981.

WOODWARD, E. Geometry with a Mira. **The Arithmetic Teacher**, Reston, v. 24, n. 2. p. 117-118, 1977.