

Compreensões pré-predicativas sobre o espaço geométrico

Prepredicatives comprehensions about the geometric space

MARLI REGINA DOS SANTOS¹

MARIA APARECIDA VIGGIANI BICUDO²

Resumo

Este texto tematiza o espaço e explicita aspectos que apontam para a forte conexão entre o tratado pela Geometria, vista como ciência dedutiva, e a espacialidade vivenciada pelo sujeito no seu cotidiano. Apresenta uma discussão sobre o espaço, no âmbito da compreensão fenomenológica de mundo e conhecimento, na qual se destaca o conhecimento pré-predicativo na construção das ideias geométricas. Focando a relação entre o conhecimento geométrico e as vivências do sujeito, é apresentada uma pesquisa realizada junto a estudantes calouros de um curso de matemática, na qual são explicitados os significados atribuídos por eles aos entes geométricos fundamentais, a saber, ponto, reta, plano e espaço, avançando em termos de desdobramentos para as ideias geométricas e possibilidades pedagógicas.

Palavras-chave: fenomenologia, geometria espacial, conhecimento.

Abstract

This text thematizes the space and explicits aspects that point to the strong connection between the treated by geometry, seen as deductive science, and the spatiality experienced by individuals in their everyday life. It presents a discussion of the space within the phenomenological understanding of the world and knowledge, which emphasizes the prepredicative knowledge in the construction of geometric ideas. Focusing on the relationship between the geometrical knowledge and experiences of the subject, we accomplished a research with freshmen students in a course of mathematics, in which are explained the meanings attributed by them to the fundamental geometric entities, namely point, line, plane and space, advancing through the geometric ideas and teaching possibilities.

Keywords: phenomenology, spatial geometry, knowledge.

1. Da vivência cotidiana de espaço à sua matematização

Tematizar espaço, em qualquer nível de ensino, revela a complexidade dos modos pelos quais os alunos podem adentrar por diferentes sentidos e interpretações ao buscar compreender o exposto pelo professor quando este aborda a ideia de espaço em sua aula. O termo carrega uma vasta gama de possibilidades de significação, de modo que o próprio contexto de onde é destacado já solicita que certos aspectos de sua objetivação se explicitem em detrimento de outros. Para uma criança, o espaço é onde ela está localizada no horizonte da sua visão; em uma aula de mecânica, espaço é entendido

¹ Universidade Federal de Viçosa – marli.santos@ufv.br

² Universidade Estadual Paulista – mariabicudo@gmail.com

como o deslocamento realizado por um móvel; ao atentar para os planetas e estrelas, o espaço é o universo, o espaço sideral. As diferentes nuances destacadas a cada entendimento do termo (em distintos contextos) nos levam a inferir que (em cada um deles) estão sendo considerados termos distintos.

Se considerarmos o modo pelo qual o espaço é abordado por diversas áreas ou disciplinas, as perspectivas pelas quais ele é visado apontam para aspectos intrincados ao próprio fazer dessas disciplinas. Milton Santos (2006), ao se referir ao espaço geográfico, caracteriza-o em termos da inseparabilidade da ação humana, que o recria e modifica. Essa totalidade se destaca como traço dinâmico central na criação dos lugares (geográficos), que se renovam a cada movimento da sociedade. Assim, para o autor, o espaço é visto como uma forma-conteúdo, isto é, como uma forma que não tem existência empírica e filosófica se for considerada separadamente do conteúdo e um conteúdo que não poderia existir sem a forma que o abrigou (SANTOS, 2006).

No Dicionário de Filosofia (ABBAGNANO, 2007), são apresentados diferentes modos de se conceber o espaço: como o lugar onde a coisa está situada, ou seja, como sendo de grandeza suficiente para abarcá-la; como espaço vazio, que mesmo ausente de matéria dela necessita para ser definido; como espaço absoluto (sem relação com algo exterior) ou relativo (de dimensão móvel e que se dá na relação entre os corpos), ambos idênticos em sua forma; passível de ser distorcido proporcionalmente à massa e densidade dos objetos que abarca (Teoria Geral da Relatividade de Einstein); como associado ao instante em que se verifica determinado evento; como primeiro Deus, já que é o limite dos céus e o lugar de todas as coisas.

Assim, a geometrização, ou matematização, do espaço é apenas um dentre muitos modos pelos quais podemos nos embrenhar ao buscar compreender o que ele é. E mesmo focalizando a Geometria formalizada por meio de uma linguagem matemática que a caracteriza, outras análises quanto à sua relação com o espaço se colocam:

Se a geometria euclidiana, por exemplo, estrutura de modo adequado nossa experiência espacial cotidiana, a geometria riemanniana, que choca essa experiência, revela-se no entanto mais adequada para dar conta das relações espaciais de uma outra dimensão da experiência. Parece que, como queria Poincaré, o espaço não tem uma forma determinada *a priori*, cabendo nesta ou naquela geometria conforme as circunstâncias e conveniências. (SILVA, 2004)

A geometrização do espaço ocorre à medida que se busca dar conta da diversidade da experiência humana e, desse modo, destacam-se também a Geometria Projetiva, a

Descritiva e a Topológica, cada qual atentando para uma particularidade, característica ou propriedade do espaço e de seus objetos. A própria axiomatização da Geometria também se revela como um modo singular de o ser humano abordar o espaço e os entes geométricos, colocando de lado o caráter meramente intuitivo e empírico e assumindo a Geometria como disciplina racional, dedutiva e lógica, a partir da criação de definições, axiomas, postulados e teoremas (SILVA, 2007). Essa emergência de um modo particular de proceder se dá pela possibilidade, necessidade e capacidade humana de realizar tal empreendimento. A axiomatização se realiza como um modo humano de compreender, latente em suas possibilidades de desdobramento e em relação com o espaço e os sentidos advindos de um modo próprio de proceder.

A Geometria se mostra de diferentes perspectivas pelas quais podemos nos voltar para ela. Em um quadro de uma pintura, por exemplo, podem ser propostas possibilidades que se abrem para a compreensão de ideias geométricas mediante a experiência de olhar de modo atento tal quadro, dando-se destaque à visualização do espaço, aos traçados das linhas, bem como às formas que se delineiam, possibilitando a constituição de ideias geométricas que dizem do que está sendo compreendido e produzido (HUSSERL, 2012). Assim, tais ideias se doam em diferentes situações vivenciadas e podem avançar em complexidade, de modo a se produzirem conceitos ou tão somente explicitar, ou mesmo anunciar, evidências percebidas.

Constata-se que o conhecimento geométrico é dinâmico e não se esgota em uma única disciplina: ele solicita, mesmo nas aulas formais de Matemática, uma busca de sentido em diversas direções e diferentes contextos. Essa relação direta com situações do dia a dia e com as diversas áreas aponta para um conhecimento geométrico não formalizado e seus potenciais desdobramentos para os conceitos como tratados pela matemática.

Por outro lado, se considerarmos os livros-textos de disciplinas do Ensino Superior, como Geometria Espacial, Plana, Analítica, entre outras, em sua maioria e em grande parte de seu conteúdo, ao se atentarem para o caráter formal da Geometria, eles não abordam a exploração das diferentes significações relativas ao espaço, nem os modos pelos quais os alunos compreendem e interpretam as ideias e objetos geométricos, suas características e as relações entre eles. Em geral, os livros apresentam o espaço como aquele no qual se deve operar com entes ideais, como pontos, retas e planos, identificando relações, propriedades e conseqüências e suprimindo qualquer outro aspecto ou discussão distintos do modo matematicamente acordado de se compreender o espaço. Essas afirmações estão pautadas em livros dedicados ao ensino superior.

Entretanto, é possível encontrar em livros de Educação Básica tentativas de trabalhar-se a construção do conhecimento geométrico que dão destaque às experiências efetuadas pelo sujeito conhecedor em seu cotidiano.

O que não se pode desconsiderar é que, mesmo entre estudantes do Ensino Superior e no contexto das disciplinas citadas, as manifestações das compreensões dos alunos quanto ao que lhes é apresentado, bem como os encaminhamentos que se dão no ambiente coletivo visando a aprendizagem dos conceitos, estão além de definições e decorrentes aplicações. Ao apresentarem suas ideias, dúvidas e elaborações, os alunos revelam significados vivenciados em seu cotidiano, o que aponta para possibilidades de aberturas e compartilhamento de compreensões no ambiente coletivo de aprendizagem. Nas manifestações verbais e gestuais, na elaboração escrita de conclusões e entendimentos e nas avaliações que os alunos efetuam, o professor pode destacar diferentes sentidos e significados que se evidenciam nos seus modos de proceder ao buscarem conhecer o conteúdo que lhes é apresentado.

O conhecimento geométrico se desvela à medida que se destacam as maneiras de a Geometria se dar no mundo-vida³ em um nível pré-teórico ainda não desdobrado em interpretações por meio da linguagem específica do fazer matemático, ou seja, em um nível existencial, sem se basear em teorizações nas quais já estão presentes as formalizações constantes de teoremas e axiomas. Na abordagem fenomenológica, esse é um conhecimento pré-predicativo que se manifesta nas expressões dos sujeitos ao se voltarem, de modo espontâneo e imediato, para as ideias geométricas (no caso específico deste artigo). É um conhecimento constituído nas vivências, em um movimento intencional⁴ de busca de compreensão do entorno, realizado subjetiva e intersubjetivamente, na medida em que o mundo percebido faz sentido para o sujeito, podendo ser expresso ao outro. Assim, o conhecimento pré-predicativo refere-se ao conhecimento ainda não elaborado e trabalhado em termos de desdobramentos possibilitados pelos atos da razão e amparados pela lógica e metodologia à disposição no mundo da ciência (MERLEAU-PONTY, 1990; BICUDO, 2010).

³ Conforme Bicudo (2010, p. 23), *mundo-vida* é “entendido como a espacialidade (modos de sermos no espaço) e temporalidade (modos de sermos no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e natureza, bem como, com todas as explicações científicas, religiosas, e de outras áreas de atividades e de conhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um nós e para a comunidade em que estamos inseridos”.

⁴ *Intencionalidade* na visão fenomenológica, assumida pelas autoras, diz do modo como estamos voltados para, direcionados na direção de.

Estudos realizados no âmbito do grupo de pesquisa FEM (Fenomenologia e Educação Matemática) focalizam a Geometria e o conhecimento pré-predicativo, destacando possibilidades de se explorar pedagogicamente a relação entre eles (DETONI, 2000 e 2012; PAULO, 2001; KLUTH, 2001; BICUDO e KLUTH, 2010; MONDINI et al, 2010). Alguns desses estudos abordam o conhecimento geométrico pré-predicativo nascente na experiência vivenciada por crianças e mostram que elas se movimentam, atentamente, espacializando seu entorno, habitando horizontes que se abrem (DETONI, 2000; PAULO, 2001). Essa construção não se dá em um nível teórico, mas existencial, destacando o compreendido na experiência vivida. Do mesmo modo, ao expressar as ideias geométricas que vivenciou, a criança comunica aquilo que compreende na percepção⁵ sem pensá-lo a partir de conceitos decorrentes de quadros teóricos pré-dados. Assim, o nome de uma figura geométrica plana ao ser verbalizado para explicar as características de um sólido não traz consigo as definições clássicas dos termos utilizados, mas carrega os significados e sentidos presentes no solo cultural em que a criança está enredada. Quando ela usa, por exemplo, o termo *quadrado* para dizer do *cubo*, atenta-se para as faces do cubo em sua *quadraticidade* (ESPÓSITO, 1999 e 2006). A criança expressa sua compreensão do cubo por meio da linguagem disponível a ela e as palavras utilizadas não carregam significados por conta própria. Ao contrário, é dos significados atribuídos aos objetos na vivência que ressurgem as palavras, dando sentido à expressão do percebido.

O conhecimento pré-predicativo, como fenomenologicamente concebido, não se refere apenas ao pensar da criança que busca compreender seu entorno. Trata-se de um conhecimento não tematizado em termos de predicacões objetivas, ainda que possa vir a se desdobrar nessa direção, subjetiva e intersubjetivamente, em diferentes atos. Um matemático, por exemplo, pode avançar por compreensões pré-predicativas ao atentar-se para um teorema de Geometria, buscando pela evidência geométrica que permita emitir juízos a respeito daquilo que investiga em termos do percebido (intuído) como significativo. Os desdobramentos das compreensões pré-predicativas podem possibilitar novas reelaborações quanto ao objeto em foco, bem como a constituição de conclusões predicativas quanto ao investigado. Essas considerações apontam para as vivências, o pensamento pré-reflexivo, ou pré-predicativo, as expressões do compreendido e a

⁵ A percepção é o ato de entrar em contato com o que se mostra, enquanto presença, ou seja, como percebido no agora.

comunhão de ideias entre sujeitos constituindo possibilidades de significação para o indivíduo ou para uma comunidade.

Como área de conhecimento que trata de entes específicos por meio de uma linguagem própria, a Geometria é fruto das experiências intersubjetivas trazidas e reformuladas em sua objetividade, na história e na cultura humana. Mas, assim como outras Ciências teórico-formais, apesar de sustentar-se no mundo-vida ela sofre um afastamento do seu sentido na existência humana (HUSSERL, 2012). Por outro lado, o ensino e a aprendizagem da Geometria podem se ampliar em possibilidades quando se dão em um trabalho que foca suas relações com o cotidiano e com os conhecimentos prévios dos alunos.

A constatação da relação direta entre a ciência dedutiva e a espacialidade vivenciada pelo sujeito no seu dia a dia direcionou a realização de uma pesquisa junto a estudantes ingressantes do curso de graduação em matemática, em que se buscou explicitar as compreensões manifestadas por eles quanto aos seguintes entes geométricos: ponto, reta, plano e espaço (SANTOS, 2013). A pesquisa subsidiou o estudo de campo de Santos (2013) e focou as compreensões expostas pelos estudantes ao atentarem-se para tais conceitos matemáticos. A interpretação e análise dessas compreensões sustentaram-se na concepção fenomenológica de mundo e construção de conhecimento, buscando explicitar unidades significativas que se ressaltaram das respostas dos estudantes, para as pesquisadoras focadas na pergunta orientadora da investigação. Evidenciaram-se aspectos do conhecimento pré-predicativo e seus desdobramentos possíveis em direção à construção coletiva do conhecimento geométrico, buscando pelas possibilidades de compreensão e expressão do conhecimento geométrico objetivamente construído.

2. Investigando compreensões pré-predicativas sobre ponto, reta, plano e espaço

Buscando delinear os sentidos percebidos e os significados atribuídos por estudantes de graduação em Matemática quanto aos entes geométricos nucleares à Geometria – ponto, reta, plano e espaço – foi realizada uma pesquisa que subsidiou o estudo de campo da tese de doutorado de Santos (2013). Tal pesquisa teve como foco investigar como os estudantes calouros de um curso de Graduação em Matemática compreendiam os entes geométricos citados, os quais são abordados em diversas disciplinas ao longo do curso.

Foi aplicado um questionário aos 84 estudantes que estavam cursando a disciplina de Geometria Analítica, em duas turmas distintas, sendo a maioria calouros do curso de licenciatura em matemática. No questionário foi solicitado que escrevessem, do modo mais espontâneo possível, sobre o seu entendimento quanto à ideia de ponto, reta, plano e espaço. Foi explicado aos estudantes respondentes que eles não precisariam, necessariamente, usar uma linguagem matemática para apresentar o seu entendimento e que, se quisessem, poderiam fazer desenhos e esboços que os auxiliassem.

As respostas obtidas foram transcritas e organizadas a partir da ideia central a que elas remetiam e, a partir daí, foi realizado um trabalho de redução fenomenológica no qual se buscou evidenciar os invariantes para as quais essas ideias convergiam.

A redução fenomenológica não se refere a um resumo simplificado do que está sendo exposto. Ela é um modo de trabalhar as ideias que vão se fazendo, mediante um movimento de idas e vindas em torno dos sentidos expressos, em uma atitude atenta do pesquisador que, de modo constante, retoma sua interrogação e as ideias que estão se mostrando como significativas ao seu olhar, da perspectiva da interrogação formulada. No trabalho de análise, denominamos essas ideias de *unidades significativas* (Bicudo, 2011; Martins & Bicudo, 1988), as quais são destacadas da descrição das experiências vividas. Na articulação dessas ideias, efetua-se o movimento de realizar convergências, caminhando com a redução fenomenológica, focando os sentidos e significados comuns às unidades, articulando, então, compreensões mais amplas sobre eles e suas conexões possíveis.

No caso da pesquisa realizada, as unidades significativas foram explicitadas das respostas dos estudantes e, por meio delas, buscamos articular convergências. Neste artigo, não nos propomos a fazer uma análise em termos de teorizações, mas sim expor os sentidos relacionados aos entes geométricos em foco, considerando as respostas dos alunos, buscando desvelar sentidos e significados expressos, caracterizados a partir das unidades destacadas.

Assim, nos quadros a seguir, apresentamos, para cada ente geométrico, as unidades significativas destacadas das respostas dos estudantes e as asserções articuladas pelas pesquisadoras (autoras deste texto) no movimento de redução fenomenológica. As unidades foram agrupadas a fim de evidenciar o movimento de convergência para a asserção a que elas remetem. Ao final, tecemos algumas considerações quanto aos sentidos desvelados.

O que é o PONTO?

Unidade significativa (retirada das respostas dos estudantes)	Asserção articulada (pelas pesquisadoras)
Uma coordenada O estudante faz um desenho de um plano cartesiano representando o ponto por um par ordenado (x,y)	Relacionam o ponto com uma coordenada ou com sua representação cartesiana em duas dimensões (o que em geral é mais trabalhado no ensino básico que a representação tridimensional)
Marcação ou local em uma reta ou plano Parte de uma reta Pertence a um plano ou uma reta Ponto final ou inicial de uma reta Encontro de duas retas	O ponto é tratado em termos da possibilidade de estar localizado em um lugar bem determinado, ou como algo que pertence a outro ente geométrico. Pode pertencer a uma “reta” e estar em uma localização precisa: o ponto de início ou o final ganharam destaque em detrimento dos demais. O ponto pode ainda estar localizado no cruzamento de duas retas.
Referência de extensão desprezível Não tem dimensão Não tem distância, módulo ou sentido A menor representação geométrica de um plano ou da geometria Núcleo da geometria: menor e mais importante elemento onde os outros são derivamos dele Por onde se começa o estudo da geometria	O ponto é caracterizado em termos do que ele não possui, como dimensão, extensão ou sentido. Há uma comparação com outros entes, indicando a qualidade de ser menor que eles, mas, apesar do comparativo, a descrição em alguns casos destaca a importância atribuída ao ponto: tudo é gerado dele, ele é o núcleo da geometria.
Referência de localização no universo Lugar no espaço	É abordado em termos da possibilidade de ser um lugar ou uma referência de localização no espaço ou universo.
Igual a um furo de alfinete em um papel Uma estrela milhões de vezes maior que a terra, se observada por mim, não deixa de ser um ponto Reta vista de longe	Situações, cotidianas ou não, são apresentadas para dar a ideia de ponto, sendo possível elaborar imagens mentais que nos remetam ao ponto.
É um ponto!	Indica a impossibilidade de descrever algo cujo nome já predica todas as suas características.

O que é a RETA?

Unidade significativa (retirada das respostas dos estudantes)	Aserção articulada (pelas pesquisadoras)
Junção de pontos	A reta surge como derivada do ponto, ou seja, dele prescinde. Duas informações ganham destaque: a quantidade de pontos envolvidos na determinação da reta e a forma como eles estão dispostos. O termo conjunto indica a necessidade de mais de um, pelo menos. Os termos <i>paralelos</i> , <i>alinhados</i> , <i>na mesma direção</i> indicam a forma como esses pontos devem se comportar, já que para formarem uma reta eles não podem estar dispostos de qualquer modo.
Infinitos pontos	
Conjunto de pontos	
União de pontos um ao lado do outro	
Conjunto de pontos paralelos ligados	
Conjunto de pontos alinhados em uma só direção	
Vários pontos em determinada direção	
Conjunto infinito de pontos alinhados	
Prolongamento onde se encontra o ponto podendo ser de um ponto ao infinito	
A menor distância ou o menor segmento entre dois pontos	Não se atentam para o conceito matemático de reta, como algo ilimitado, mas a relacionam com um segmento de reta. As frases dizem do seu significado em situações cotidianas e práticas, como a determinação da (menor) distância entre dois pontos.
Segmento que une dois pontos	
Distância entre dois pontos	
Que tem uma dimensão, só comprimento	Fazem relação com a “forma” de uma reta: algo comprido, dada em seu comprimento, uma linha contínua. Novamente a “forma” da reta ganha destaque e o termo <i>linha</i> indica a característica de finura. Na última frase, focou-se a reta por meio de algo que ela não possui: curvas.
Segmento linear contínuo	
Linha infinita	
Linha continua infinita	
Linha com medidas	
Linha contínua sem curvas	
Linha dos pontos de uma equação do primeiro grau	Destaque para a abordagem cartesiana para o conceito de reta, focando na representação de uma equação da reta.

O que é o PLANO?

Unidade significativa	Aserção articulada
2D (duas dimensões) Tem comprimento e largura	O plano é associado com a quantidade de dimensões que possui. Relativamente às respostas dadas para a reta, mais uma dimensão se destaca para o plano: a largura.
Formado por retas coplanares Coleção de retas Conjunto de retas Composto de retas	Destacam a reta (ou conjunto de retas) como o elemento que compõe ou forma o plano. Relativamente às respostas dadas para a reta (como sendo formada por pontos), o plano é considerado como sendo formado por retas.
Conjunto de ponto Representado por pontos e retas Área de trabalho onde usamos ponto e reta Por onde passa um conjunto de pontos e retas Onde se pode representar com pontos várias coisas Contém diversos pontos, não necessariamente colineares	O ponto também se destaca quando dizem da reta. Em alguns casos relacionando com a possibilidade de o plano ser representado por, ou possuir, pontos e retas. Caracterizam-no também pela possibilidade de representar várias coisas ou como uma área, região, de trabalho. O ponto ganha destaque, mas buscam explicitar a diferenciação com reta, considerando que ambos são formados por pontos: há destaque para as diferentes formas como esses pontos estão dispostos, sendo não necessariamente colineares (no caso do plano).
Uma área Espaço delimitado por segmento de reta Superfície entre duas retas paralelas Uma representação no espaço da região interna delimitada por retas (em alguns casos fazem a representação de um plano como um paralelogramo, comum nos livros de Geometria espacial)	Assim como a reta, o plano se evidencia como algo limitado, no caso, por duas retas paralelas ou segmento de reta. As respostas nos remetem à ideia de uma região ou área delimitada e, em certos casos, apresentam um paralelogramo para representar o plano.
Faz um desenho com uma representação cartesiana e explica: onde são jogados os pontos, podendo haver ligação	Verifica-se a relação do plano com a abordagem cartesiana.

Por três pontos não colineares passa um único plano	Indica uma condição de existência para obter-se um plano sem, contudo, dizer o que ele é. Foca em elementos que ele contém: três pontos não colineares.
Espaço geométrico	O plano é tido como um espaço ou um lugar. Esse espaço pode conter retas e pontos.
Lugar no espaço	
É o espaço no qual estão contidos reta e ponto	
Dão exemplos para ilustrar suas respostas: parede, mesa (superfície superior), chão, quadro negro, piso da sala	Situações cotidianas são relacionadas com a ideia de plano.
Não sei definir	Indica impossibilidade de se definir o plano, seja por falta de condições ou mesmo por considerar que ele não é definível.
Sei, mas não sei explicar com palavras (as vezes, ilustra-se com um desenho)	
É subjetivo	
Aprendi que eles não têm uma definição	

O que é o ESPAÇO?

Unidade significativa (retirada das respostas dos estudantes)	Asserção articulada (pelas pesquisadoras)
Conjunto de pontos que formam três dimensões possíveis	O espaço é algo que acolhe, um continente, tratado em termos daquilo que o compõe, como pontos, retas, objetos. Indica a possibilidade de possuir, conter esses entes, de modo que esses próprios entes são parte da sua constituição. Suas dimensões se destacam, sendo de três dimensões, diferentemente da reta e do plano.
Conjunto de todos os pontos e objetos que o compõem.	
Conjunto de pontos e retas	
Tudo em que podemos colocar pontos	
Um conjunto de objetos	
Algo amplo onde se pode representar várias coisas	O espaço é tido com base no que ele pode representar, como uma forma geométrica determinada. O termo <i>amplo</i> destaca-o como sendo muito extenso.
Representação de formas	
Lugar que pode existir matéria	Destaque para a possibilidade de o espaço conter, ser ocupado, possuir, coisas ou mesmo não possuir nada, ser um vazio. Esse é o lugar onde se encontra a matéria, um corpo-objeto, formas sólidas e a até próprio espaço sideral.
O que pode ser ocupado	
Um local que pode ser ocupado por um corpo-objeto	
É um conjunto de itens onde pode conter tudo existente ou até nada	
Onde está contido algo, por exemplo, o espaço sideral	

Onde se encontram todas as formas sólidas	
Lugar de localização de qualquer matéria	
Onde se encontra tudo	
Distância percorrida por alguém ou objeto	A mensurabilidade do/no espaço ganha destaque na sua caracterização. É algo que possui volume ou área; é o intervalo entre duas retas, o que aponta para a propriedade de ser limitado, o espaço como a brecha, o espaçamento entre dois elementos que o produzem, como retas.
Tudo que possamos medir, calcular	
Intervalo entre duas retas	
Volume ou área	
Tudo aquilo que vemos	Aponta para a possibilidade de se ver o espaço, o que ele é, basta olhar ao redor. O espaço é o que nos cerca, como se estivéssemos contidos nesse continente, assim como na primeira asserção. Mas aqui se destaca o aspecto das vivências mundanas do ser humano no espaço. Ele e as coisas estão neste espaço e não há como escapar da possibilidade de se estar nele. É uma condição da existência.
Tudo que nos cerca	
Tudo que está a nossa volta	
Onde vivemos	
Algo compreendido onde estamos e que seja infinito	
Plano onde está tudo	
Lugar que os objetos e pessoas ocupam	
O meio onde trabalhamos	Destaca-se a possibilidade de o espaço ser objeto de análises matemáticas, com o estudo de suas propriedades. O termo <i>plano</i> aparece com a ideia de <i>lugar</i> onde podemos estudar certas propriedades geométricas, podendo ter dimensões variadas.
Qualquer ambiente que desejamos analisá-lo	
Terreno que usamos para estudar geometria	
Qualquer lugar onde deseja analisar que pode ter duas dimensões, três ou mais	
É o plano em que lidamos ao estudar alguma área da matemática	
Conceito abstrato	Algo abstrato

Nos quadros cima, foi possível evidenciar como as respostas dos estudantes revelam diferentes perfis pelos quais os termos indagados (ponto, reta, plano e espaço) podem se doar à compreensão e exporem-se em linguagem. Pode-se, em princípio, considerar que algumas dessas compreensões pré-predicativas expostas são inadequadas aos procedimentos da matemática (entendida como ciência do mundo ocidental), mas é importante atentar que nelas se evidenciam diversas vivências “geométricas”, indicando possibilidades de exploração dos sentidos percebidos e de direcionamentos pedagógicos para trabalhar-se com os conceitos envolvidos.

Nota-se que as ideias apresentadas pelos estudantes revelam convergências e articulações, ainda que indiquem, em um primeiro momento, sentidos “distantes”.

Portanto, é importante ao professor abrir-se a sua própria compreensão, já que muitas vezes, no cotidiano daquele que leciona, ganha destaque apenas certo aspecto do pensar matemático, ofuscando a complexidade das vivências significativas que perfazem a constituição dos conceitos trabalhados em sala de aula.

Como explica Heidegger (2001), o ser humano é espacial em seu próprio modo de ser. De maneira mais explícita, Husserl (2012), ao expor o modo pelo qual ocorre a constituição do sentido, fala do corpo-próprio⁶, intencionalmente situado, que percebe, age, ao estar com as coisas e cossujeitos, comunicando, compreendendo e (re)criando seu entorno. Em diversas ações cotidianas o sujeito vivencia experiências espaciais: guia-se em certa direção, visualiza determinada profundidade, estabelece relações de comparação, como maior, menor, mais perto, mais longe etc. São vivências que articulam ideias espaciais e sustentam o desencadeamento de outras.

Na pesquisa com os estudantes, foi possível constatar que o aspecto intuitivo de suas respostas se evidencia nos atos intencionais presentificados ao tematizarem os entes geométricos, indicando possibilidades de produção de conhecimento geométrico articulada a uma proposta de se questionar e disparar discussões ou análises sobre as compreensões expostas, voltando-se à subjetividade e à intersubjetividade e aos processos de busca pelo sentido das ideias e conceitos geométricos que se dão no diálogo e na partilha entre cossujeitos que participam de atividades de ensino e aprendizagem.

Assim, focando o ensino e a aprendizagem de Geometria e o conhecimento geométrico em suas possibilidades de entendimento e reelaboração subjetivos e intersubjetivos, damos-nos conta da importância de se considerar a historicidade do fazer geométrico enquanto fenômeno humano, dado nas vivências no cotidiano do mundo-vida, porém passível de reformulações que daí emergem, não se fechando em si, mas abrindo-se ao horizonte de compreensões.

O mundo se doa como sentido e os sentidos percebidos solicitam por desdobramentos que ocorrem em atos da consciência, como os psico-fisiológicos, cognitivos e do juízo (espirituais), compreendidos de modo mais focado na interpretação e expressos na linguagem. Damos-nos conta do nosso entorno à medida que, de modo atento, buscamos compreender e refletir sobre esses sentidos, reelaborando nosso entendimento nos vários perfis pelos quais podemos visar o objeto, nova e novamente.

⁶ *Corpo-próprio* “entendido como Leib, corpo com movimento intencional” (BICUDO & KLUTH, 2010, p.135).

3. Trabalhando na dimensão pedagógica

Torna-se importante trabalhar, em sala de aula, uma significação conjunta dos termos geométricos, avançando na constituição da intersubjetividade e respectivos modos de expressão do compreendido, na exploração dos aspectos de suas experiências, escolares ou não, matemáticas ou não, que dizem de compreensões, associações, relações etc., sugerindo fortes entrelaçamentos com as ideias e conceitos geométricos como formalmente considerados.

Trabalhar na direção da discussão coletiva desses sentidos e significados que vão se clareando, indica a possibilidade de uma atividade pedagógica que faz mais sentido aos estudantes, podendo ser mais dinâmica, especialmente frente às diversas possibilidades que se abrem ao explorar a geometria tridimensional, as experiências cotidianas dos estudantes e os sentidos próprios do fazer matemático.

Referências

- ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- ALES BELLO, A. *Introdução à fenomenologia*. Tradução Ir. Jacinta Turolo Garcia e Miguel Mahfoud. Bauru: EDUSC, 2006.
- BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa Qualitativa segundo a visão fenomenológica*. São Paulo: Cortez, 2011.
- _____. *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010.
- BICUDO, M. A. V.; KLUTH, V. S. Geometria e Fenomenologia. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. 1 ed. São Paulo: Editora UNESP, 2010.
- DETONI, A. R. A geometria se constituindo pré-reflexivamente: propostas. In *Revista Eletrônica de Educação*. São Carlos, v. 6, n. 2, nov. 2012. Disponível em <<http://www.reveduc.ufscar.br>> acesso em nov. 2012.
- _____. *Investigações acerca do espaço como modo de existência e da Geometria que ocorre no pré-reflexivo*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2000.
- ESPÓSITO, V. H. C. *Construindo o conhecimento da criança adulto: uma perspectiva interdisciplinar?* São Paulo: Martinari, 2006.
- _____. *Eu, um quadrado?: espoleta e seus asseclas*. São Paulo: Arte & Ciência, 1999.
- HEIDEGGER, M. *Ser e tempo*. Tradução de Márcia Sá Cavalcante Schuback. Petrópolis: Vozes, vol 1, 2001.

HUSSERL, E. *A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental: uma introdução à filosofia fenomenológica*. Trad. Diogo Falcao Ferrer. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

KLUTH, V. S. O conhecimento geométrico: trama de vivências corpóreo-sócio-culturais. In: BICUDO, M. A. V.; BELLUZZO, R. C. B. *Formação humana e educação*. Bauru: Edusc, 2001.

MARTINS, J.; BICUDO, M. A. V. *A pesquisa qualitativa em psicologia: fundamentos e recursos básicos*. São Paulo: Educ/Moraes, 1988.

MERLEAU-PONTY, M. *O primado da percepção e suas consequências filosóficas*. Trad. Constança Marcondes César. Campinas, SP: Papirus, 1990.

MONDINI, Fabiane; MOCROSKY, Luciane ; SANTOS, Marli. Regina. Compreensões de Geometria expressa por crianças: prelúdio fenomenológico. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Filosofia da Educação Matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. São Paulo: Editora UNESP, v. 1, p. 2010.

PAULO, R. M. *A compreensão geométrica da criança: um estudo fenomenológico*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001.

SANTOS, M. R. *Um estudo fenomenológico sobre conhecimento geométrico*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

SANTOS, M. *A Natureza do Espaço: Técnica e Tempo, Razão e Emoção*. 4. ed. São Paulo: Edusp, 2006.

SILVA, J. J. *Filosofias da matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 2007.

_____. Matemática e fenomenologia. In *Anais do II SIPEM*. Bauru, 2004. Disponível em <http://www.sepq.org.br/Isipeq/anais/pdf/mr1/mr1_2.pdf> acesso em 10/12/2011.

Recebido: 09/01/2014
Aceito: 21/03/2014